

Walec. Pole powierzchni walca

Walec. Opis walca. Przekroje w walcu. Zaznaczanie odcinków na przekrojach walca. Prezentacja multimedialna – powstawanie walca poprzez obrót wokół jednego z boków.

Rysowanie siatek walca. Pole powierzchni walca. Przykłady na obliczanie pola powierzchni walca. Rysunek interaktywny – siatka walca w zależności od długości jego promienia i tworzącej. Animacja 3D – tworzenie walca przez złożenie jego siatki.

Rysowanie i obliczanie pola przekroju walca. Rysunek interaktywny – tworzenie przekroju walca. Animacje 3D – odcinki i przekroje w walcu.

Ćwiczenia na obliczanie pola powierzchni walca, w tym ćwiczenia interaktywne.

Ćwiczenia na obliczanie pola powierzchni walca. Ćwiczenia, zadania otwarte z podanymi rozwiązaniami.

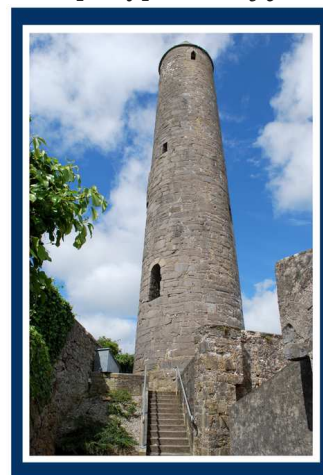
Walec. Pole powierzchni walca

W tym materiale zawarte są wiadomości dotyczące walców – budowy, przekrojów, siatek, pola powierzchni. Utrwalisz zdobytą wiedzę, wykonując ćwiczenia.

Budowa walca

Przykład 1

W jakim kształcie są wieże na zdjęciach? Jakie bryły geometryczne przypominają?



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Przykład 2

Zmieniaj wymiary obracającego się prostokąta. Jaka jest zależność między wysokością otrzymywanego walca, a jego tworzącą? Jaka jest zależność między promieniem podstawy walca, a długością boku prostokąta prostopadłego do osi obrotu?

Walec

◀ etap 1 z 3 ▶

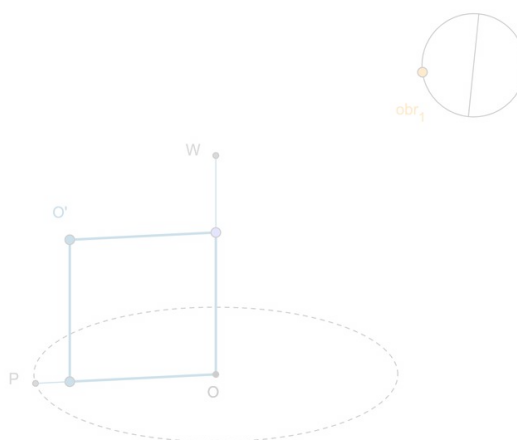
Poruszaj suwakiem obr_1 po okręgu i obserwuj, jak w wyniku obrotu prostokąta wokół jednego jego boków tworzy się bryła obrotowa - walec.

Kliknij w poniższe przyciski animacji.

▶ ||

odśwież konstrukcję

↺



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/b/P13d3i7Fl>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

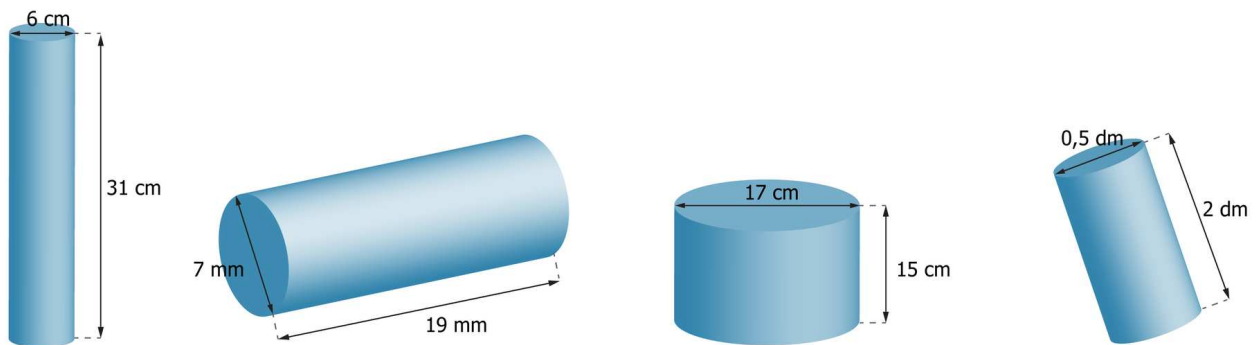
W wyniku obrotu prostokąta wokół prostej, przechodzącej przez jeden z boków, otrzymujemy bryłę zwaną walcem.

Walec ma dwie równoległe podstawy w kształcie przystających kół. Odcinek łączący podstawy walca i prostopadły do tych podstaw to wysokość walca. Wysokość jest równa odległości podstaw walca.

Każdy odcinek zawarty w powierzchni bocznej walca o końcach należących do podstaw walca nazywamy tworzącą. Długość tworzącej walca jest równa jego wysokości.

Polecenie 1

Określ dla każdego z walców jego wysokość, długość tworzącej, promień podstawy i średnicę podstawy.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Przekroje walca

Przykład 3



Film dostępny pod adresem </preview/resource/R15BERfvVupU0>

3D_walec_1538

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja 3D pokazuje baterię elektryczną. Kreślone są krawędzie – powstaje walec. Następnie przekroje skośne i poprzeczne dzielą walec na dwie bryły.

Przykład 4



Film dostępny pod adresem </preview/resource/R9GsY10YyZZ0G>

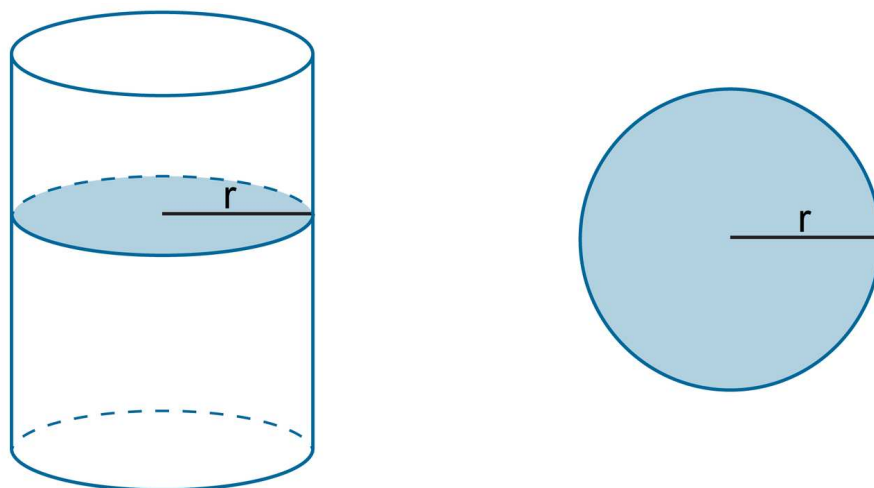
Walec. Pole powierzchni walca_4111

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja pokazuje trójwymiarowy walec. Możemy zaobserwować, że przekrój poprzeczny walca jest kołem o promieniu równym promieniowi podstawy walca, a przekrój osiowy jest prostokątem o szerokości równej średnicy okręgu w podstawie walca i o wysokości równej wysokości walca.

Przykład 5

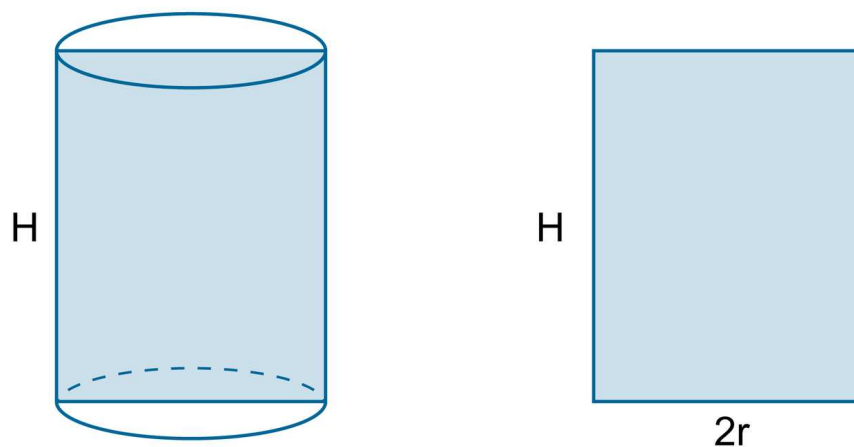
Poniższa ilustracja pokazuje jak wygląda przekrój poprzeczny walca.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

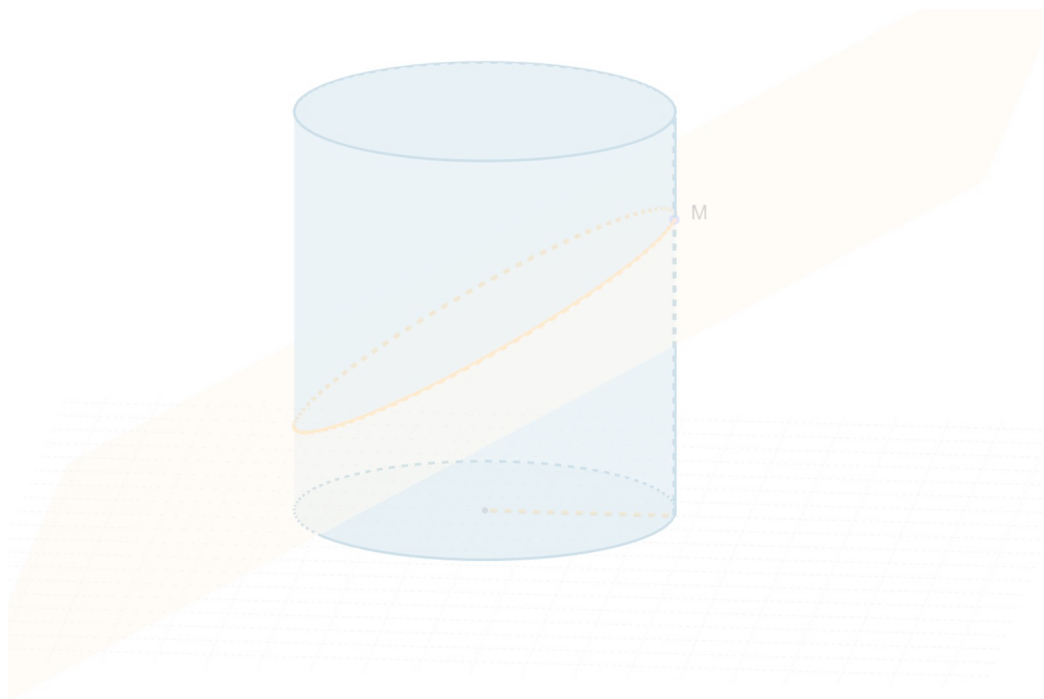
Przykład 6

Poniższa ilustracja pokazuje jak wygląda przekrój osiowy walca.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Przykład 7



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/b/P13d3i7Fl>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Przykład 8

Przekrój osiowy walca jest prostokątem o szerokości 9 cm. Pole tego przekroju jest równe 108 cm^2 .

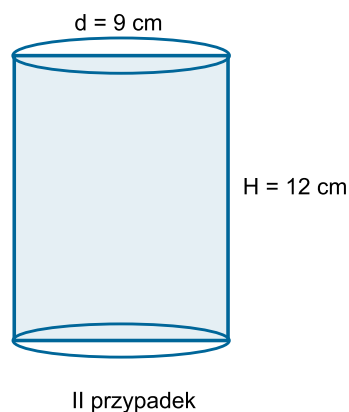
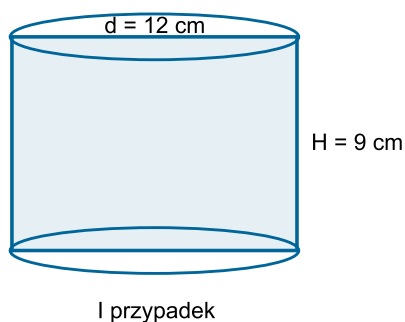
Określ wysokość i promień podstawy walca.

Obliczamy długość prostokąta, będącego przekrojem osiowym walca.

$$\frac{108 \text{ cm}^2}{9 \text{ cm}} = 12 \text{ cm}.$$

Prostokąt, będący przekrojem osiowym walca, ma wymiary 9 cm na 12 cm.

Możliwe są dwa przypadki.



- I przypadek:

Wysokość walca jest równa 9 cm, a promień jego podstawy jest równy $\frac{12 \text{ cm}}{2} = 6 \text{ cm}$.

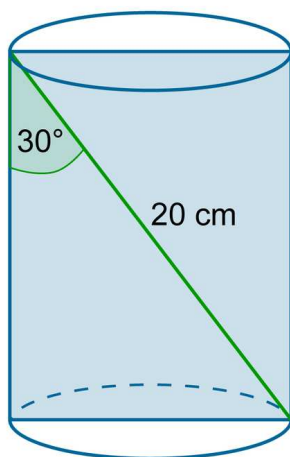
- II przypadek:

Wysokość walca jest równa 12 cm, a promień jego podstawy jest równy

$$\frac{9 \text{ cm}}{2} = 4,5 \text{ cm}.$$

Przykład 9

Przekrój osiowy walca jest prostokątem, którego przekątna długości 20 cm jest nachylona do dłuższego boku pod kątem 30° . Wysokość walca jest równa długości tego prostokąta. Oblicz pole podstawy walca.



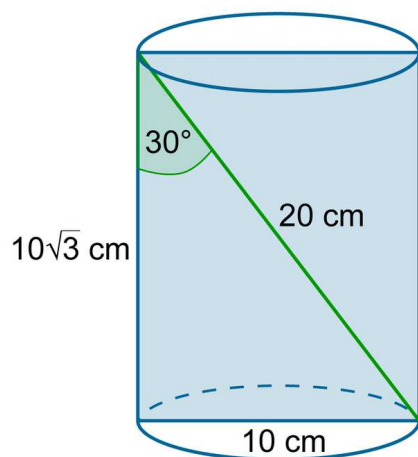
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Przekątna dzieli prostokąt, będący przekrojem osiowym walca, na dwa przystające trójkąty prostokątne.

Przeciwprostokątna w tak otrzymanym trójkącie ma długość 20 cm, a jeden z kątów ostrych ma miarę 30° .

W takim trójkącie naprzeciw kąta o mierze 30° leży przyprostokątna dwa razy krótsza od przeciwprostokątnej, czyli w tym przypadku o długości $\frac{20 \text{ cm}}{2} = 10 \text{ cm}$.

Druga z przyprostokątnych ma długość $10\sqrt{3} \text{ cm}$.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Promień podstawy walca jest więc równy $\frac{10 \text{ cm}}{2} = 5 \text{ cm}$.

Obliczamy pole koła, będącego podstawą walca

$$P = \pi \cdot 5^2,$$

$$P = 25\pi \text{ cm}^2,$$

Pole podstawy walca jest równe $25\pi \text{ cm}^2$.

Przykład 10

Obwód koła, będącego przekrojem poprzecznym walca, jest równy $34\pi \text{ dm}$. Stosunek wysokości walca do promienia podstawy jest równy $7 : 9$. Oblicz wysokość walca.

Obliczamy promień r podstawy walca

$$2\pi r = 34\pi \quad | : 2\pi,$$

$$r = 17 \text{ dm}.$$

Korzystamy z tego, że stosunek wysokości H walca do promienia jego podstawy jest równy $7 : 9$

$$\frac{H}{r} = \frac{7}{9},$$

$$\frac{H}{17} = \frac{7}{9},$$

$$H = \frac{119}{9},$$

$$H = 13\frac{2}{9} \text{ dm.}$$

Wysokość walca jest równa $13\frac{2}{9}$ dm.

Siatka walca. Pole powierzchni walca



Film dostępny pod adresem </preview/resource/RcPLrL8xWUoIW>

Matematyka_3D_5008

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja 3D pokazuje stojące na stole kubki w kształcie walca. Kreślone są krawędzie jednego kubka – powstaje walec, który następnie rozkłada się na siatkę walca.



Film dostępny pod adresem </preview/resource/ROsbV7N6fQw4G>

Matematyka_3D_5009

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja 3D pokazuje siatkę walca, która składa się w walec. Następnie walec zamienia się w kubek. Na stole stoją kubki w kształcie walca.

Przykład 11

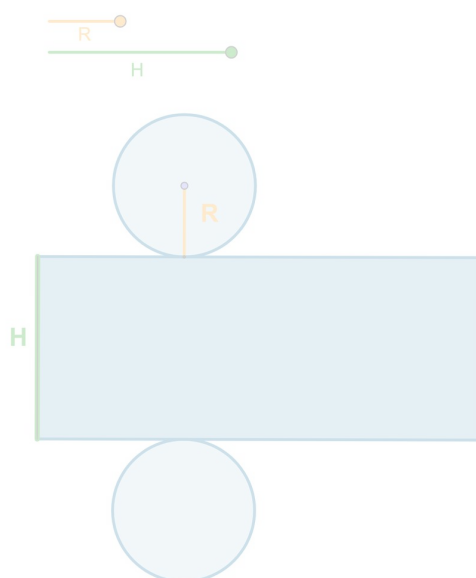
Obserwuj, jak wraz ze zmianą wysokości i promienia podstawy walca, zmieniają się wymiary figur tworzących siatkę walca. Co zauważasz?

Walec i jego siatka

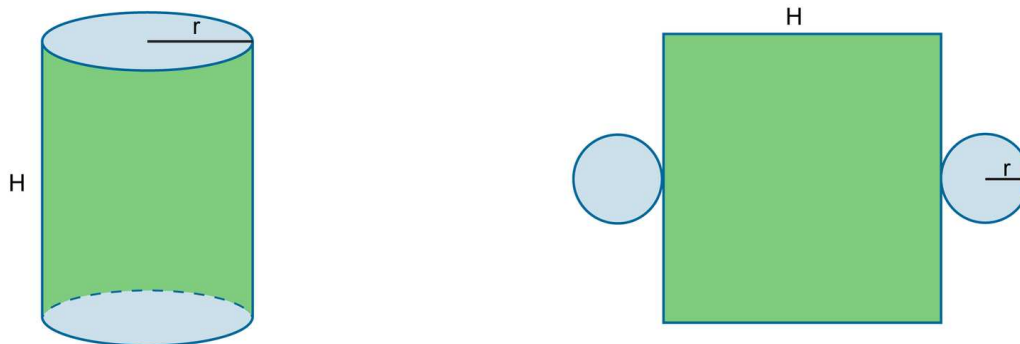
Skonstruujmy siatkę walca o promieniu podstawy R i wysokości H .

Na siatkę tę składają się dwie podstawy koła o promieniu R oraz prostokąt, którego długość jest równa obwodowi podstawy, czyli $2\pi R$ i szerokości, będącej wysokością H walca.

Zmieniaj długości odcinków R i H , by zaobserwować, jak zmienia się walec i jego siatka.



Siatka walca składa się z dwóch przystających kół i prostokąta. Promień każdego z tych kół jest równy promieniowi podstawy walca. Boki prostokąta są równe odpowiednio wysokości walca i obwodowi koła, będącego podstawą.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ważne!

Pole P powierzchni walca o wysokości H i promieniu podstawy r jest równe

$$P = 2 \cdot P_p + P_b,$$

gdzie:

- P_p – pole podstawy,
- P_b – pole powierzchni bocznej,
- $P = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot H$.

Przykład 12

Ile cm^2 blachy zużyto na wykonanie metalowej puszki w kształcie walca o wysokości 20 cm i średnicy 8 cm? Wynik podaj z dokładnością do dwóch miejsc po przecinku.

Promień podstawy walca jest równy $\frac{8 \text{ cm}}{2} = 4 \text{ cm}$. Obliczamy, ile blachy zużyto na wykonanie denka puszki

$$P = \pi r^2,$$

$$P_p = \pi \cdot 4^2,$$

$$P_p = 16\pi \text{ cm}^2.$$

Obliczamy, ile blachy użyto na wykonanie powierzchni bocznej puszki

$$P_b = 2\pi \cdot 4 \cdot 20,$$

$$P_b = 160\pi \text{ cm}^2.$$

Teraz obliczamy, ile blachy użyto na wykonanie całej puszki

$$P = 2 \cdot 16\pi + 160\pi = 192\pi.$$

Liczbę π zastępujemy jej przybliżeniem

$$P \approx 192 \cdot 3,14 = 602,88,$$

$$P \approx 602,88 \text{ cm}^2.$$

Na wykonanie puszki zużyto około $602,88 \text{ cm}^2$ blachy.

Przykład 13

Powierzchnia boczna walca po rozwinięciu na płaszczyźnie jest prostokątem o wymiarach $15 \text{ cm} \times 24 \text{ cm}$. Oblicz promień podstawy walca, wiedząc, że wysokość walca jest równa 15 cm .

Obwód koła, który jest podstawą walca, jest równy długości prostokąta, w kształcie którego jest powierzchnia boczna walca

$$2\pi r = 24,$$

$$r = \frac{24}{2\pi} = \frac{12}{\pi}.$$

Promień podstawy walca jest równy $\frac{12}{\pi} \text{ cm}$.

Przykład 14

Tort ma kształt walca o wysokości 25 cm i średnicy podstawy 30 cm . Na pokrycie 100 cm^2 powierzchni tortu potrzeba 8 dag polewy. Oblicz, ile dag polewy należy przygotować na pokrycie powierzchni tortu.

Polewą będzie pokryta podstawa górna walca, w kształcie którego jest tort i jego powierzchnia boczna. Obliczamy pole powierzchni do pokrycia

$$P = 2\pi \cdot \left(\frac{30}{2}\right) 25 + \pi \cdot \left(\frac{30}{2}\right)^2,$$

$$P = 750\pi + 225\pi = 975\pi,$$

$$P \approx 975 \cdot 3,14 = 3061,5,$$

$$P \approx 3061,5 \text{ cm}^2.$$

Obliczamy, ile dag polewy potrzeba

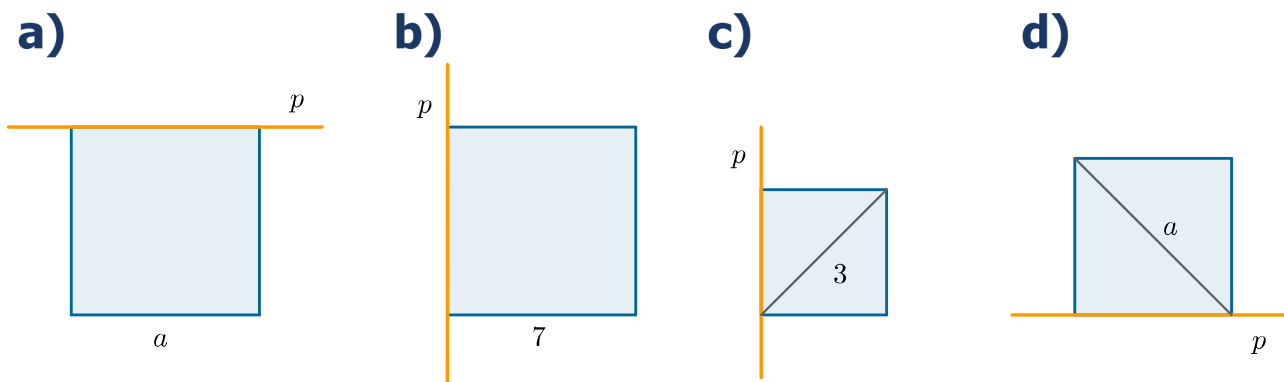
$$(3061,5 : 100) \cdot 8 = 30,615 \cdot 8 = 244,92.$$

Liczbę π zaokrągliliśmy z dołu, zatem żeby nie zabrakło polewy, należy przygotować jej trochę więcej niż 244,92 dag.

Ćwiczenie 1



Kwadrat obracamy wokół prostej p . Określ wysokość i promień podstawy tak otrzymanego walca.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Połącz oznaczenie bryły z odpowiednim promieniem i wysokością.

b)

$$r = a, H = a$$

c)

$$r = 7, H = 7$$

a)

$$r = H = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

d)

$$r = \frac{a\sqrt{2}}{2}, H = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 2



Prostokąt o wymiarach $10 \text{ cm} \times 4 \text{ cm}$ obracamy wokół dłuższego boku. Ile jest równa średnica podstawy tak otrzymanego walca? Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐ 4 cm

☐ 20 cm

☐ 8 cm

☐ 10 cm

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 3



Uzupełnij zdania, przeciągając w luki odpowiednie liczby lub kliknij w lukę i wybierz odpowiedź z listy rozwijalnej.

- Przekrój osiowy walca jest kwadratem o polu $0,25 \text{ dm}^2$. Promień podstawy tego walca jest równy dm.
- Przekrój osiowy walca jest kwadratem. Pole podstawy walca jest równe 81π . Wysokość tego walca jest równa .
- Przekrój osiowy walca jest kwadratem. Średnica podstawy walca jest równa 12 cm . Wysokość walca jest równa cm.

16 0,50 8 10 0,25 18 0,35 12 14

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 4



Oblicz odpowiednie wielkości w walcach, a następnie przeciągnij i upuść odpowiednie liczby do tabeli.

Wysokość walca	Średnica podstawy walca	Pole przekroju osiowego	Pole przekroju płaszczyzną równoległą do podstawy	Długość przekątnej przekroju osiowego
5		30π		
			16π	10
	12	120		
1,2			$1,44\pi$	

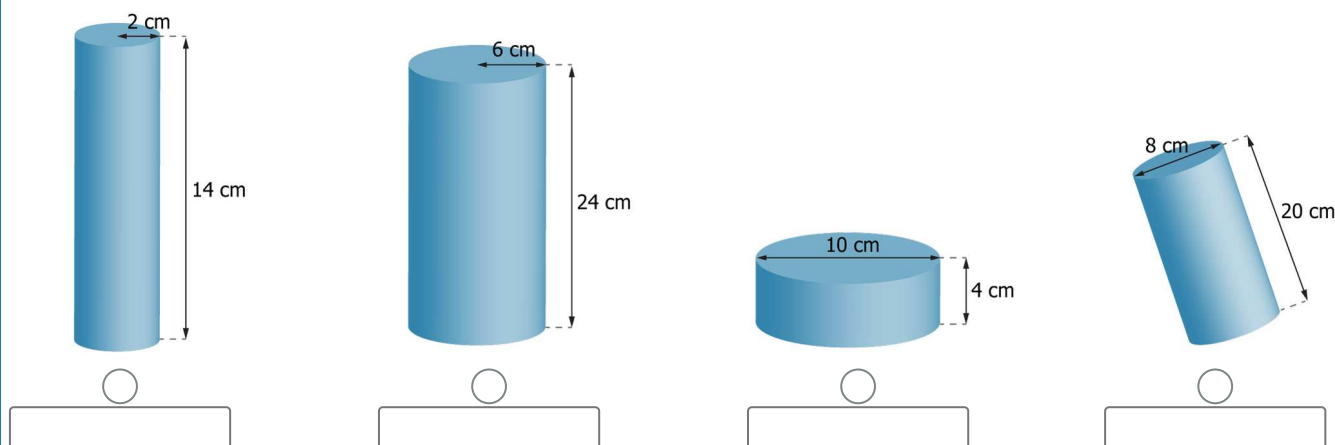
8 6 2,88 $9\pi^3$ 36π $2\sqrt{61}$ 10 48 $3\sqrt{0,8}$ 2,4 $\sqrt{25 + 36\pi^2}$
 6π

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 5



Uzupełnij rysunek, przeciągając w puste miejsca wyrażenia określające pole powierzchni bocznej danego walca. Przyjmij $\pi = 3,14$.



125,6 cm²

175,84 cm²

502,4 cm²

904,32 cm²

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 6



Pole powierzchni całkowitej walca jest równe 748. Promień podstawy walca jest równy 7. Przyjmij $\pi = \frac{22}{7}$. Ile równa jest wówczas wysokość walca? Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐ 8

☐ 49

☐ 7

☐ 10

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 7



Powierzchnia boczna walca po rozwinięciu na płaszczyźnie jest prostokątem o wymiarach $10 \text{ dm} \times 12 \text{ dm}$. Oblicz pole powierzchni całkowitej walca. Rozważ dwa przypadki. Zaznacz odpowiedź, która zawiera oba prawidłowe pola.

☐ $\left(115 + \frac{78}{\pi}\right) \text{ dm}^2$ lub $\left(110 + \frac{25}{\pi}\right) \text{ dm}^2$

☐ $\left(120 + \frac{72}{\pi}\right) \text{ dm}^2$ lub $\left(140 + \frac{60}{\pi}\right) \text{ dm}^2$

☐ $\left(125 + \frac{52}{\pi}\right) \text{ dm}^2$ lub $\left(121 + \frac{50}{\pi}\right) \text{ dm}^2$

☐ $\left(120 + \frac{72}{\pi}\right) \text{ dm}^2$ lub $\left(120 + \frac{50}{\pi}\right) \text{ dm}^2$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 8



Dany jest prostokąt o wymiarach $6 \text{ cm} \times 8 \text{ cm}$. W wyniku obrotu tego prostokąta wokół prostej, na której leży dłuższy bok, otrzymano walec W , a w wyniku obrotu tego prostokąta wokół prostej, na której leży krótszy bok, otrzymano walec W_1 . Zaznacz wszystkie zdania prawdziwe.

☐ Pole przekroju osiowego walca W jest większe od pola przekroju osiowego walca W_1 .

☐ Pole powierzchni bocznej walca W jest większe od pola powierzchni bocznej walca W_1 .

☐ Wysokość walca W jest większa od wysokości walca W_1 .

☐ Pole podstawy górnej walca W jest równe polu podstawy dolnej walca W_1 .

☐ Średnica podstawy walca W jest mniejsza od średnicy podstawy walca W_1 .

☐ Pole powierzchni całkowitej walca W jest równe polu powierzchni całkowitej walca W_1 .

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 9



Przekątna przekroju osiowego walca ma długość $4\sqrt{2}$ cm. Przekątna ta tworzy kąt o mierze 45° z jednym z boków prostokąta, będącego przekrojem osiowym walca. Oblicz pole powierzchni całkowitej walca, a następnie uzupełnij zdanie, przeciągając w lukę odpowiednią liczbę lub kliknij w lukę i wybierz odpowiedź z listy rozwijalnej.

Pole powierzchni całkowitej walca wynosi cm^2 .

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 10



Kwadrat o boku długości 16 cm obrócono wokół jednego z boków. Oblicz pole powierzchni bocznej tak otrzymanego walca. Zaznacz odpowiedź, w której wszystkie pola są właściwe.

☐ $516\pi \text{ cm}^2$ lub $26\pi\sqrt{5} \text{ cm}^2$

☐ $500\pi \text{ cm}^2$ lub $22\pi\sqrt{3} \text{ cm}^2$

☐ $512\pi \text{ cm}^2$

☐ $525\pi \text{ cm}^2$ lub $27\pi\sqrt{2} \text{ cm}^2$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 11



Walec powstał w wyniku obrotu prostokąta wokół jednego z jego boków. Przekątna tego prostokąta ma długość 5 cm i jest nachylona do jego boku pod kątem 60° . Oblicz pole powierzchni bocznej walca, a następnie uzupełnij zdanie, przeciągając w lukę odpowiednią liczbę lub kliknij w lukę i wybierz odpowiedź z listy rozwijalnej.

Pole powierzchni bocznej walca wynosi cm^2 .

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 12



Zaznacz wszystkie zdania prawdziwe.

☐ Istnieje przekrój walca, który nie jest kołem ani prostokątem.

☐ Każdy przekrój poprzeczny walca jest kołem.

☐ Tworzące walca mogą mieć różne długości.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 13



Udowodnij, że wszystkie przekroje poprzeczne walca są przystającymi kołami.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 14



Prostokąt o wymiarach $a \text{ cm} \times b \text{ cm}$ obrócono wokół boku o długości $a \text{ cm}$ i otrzymano walec W_1 . Ten sam prostokąt obrócono wokół boku o długości $b \text{ cm}$ i otrzymano walec W_2 . Walce W_1 i W_2 mają równe pola powierzchni całkowitej. Wykaż, że prostokąt ten jest kwadratem.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 15



Dwa prostokąty P_1 i P_2 są podobne w skali 1 : 2. Prostokąt P_1 ma wymiary $5 \text{ cm} \times 10 \text{ cm}$. Oblicz pole powierzchni bocznej walca powstałego w wyniku obrotu prostokąta P_2 wokół dłuższego boku, a następnie uzupełnij zdanie, przeciągając w lukę odpowiednią liczbę lub kliknij w lukę i wybierz odpowiedź z listy rozwijalnej.

Pole powierzchni bocznej wynosi cm^2 .

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 16



Oblicz pole przekroju osiowego walca otrzymanego w wyniku obrotu prostokąta o wymiarach $20 \text{ cm} \times 5 \text{ cm}$ wokół krótszego boku, a następnie uzupełnij poniższe zdanie, wpisując w lukę odpowiednią liczbę.

Pole przekroju osiowego walca wynosi cm^2 .

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 17



Przekątna przekroju osiowego walca ma długość $12\sqrt{2}$ i tworzy z płaszczyzną podstawy walca kąt o mierze 45° . Oblicz pole powierzchni całkowitej walca, a następnie uzupełnij zdanie, przeciągając w lukę odpowiednią liczbę lub kliknij w lukę i wybierz odpowiedź z listy rozwijalnej.

Pole powierzchni całkowitej walca wynosi .

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 18



Udowodnij, że stosunek powierzchni bocznej dowolnego walca do powierzchni przekroju osiowego tego walca jest zawsze taki sam.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 19



Przekątna przekroju osiowego walca ma długość 10 cm, a wysokość walca 8 cm. Oblicz pole figury, będącej siatką tego walca, a następnie uzupełnij zdanie, przeciągając w lukę odpowiednią liczbę lub kliknij w lukę i wybierz odpowiedź z listy rozwijalnej.

Pole powierzchni wynosi cm^2 .

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 20



Pole powierzchni całkowitej walca jest równe 216π . Wysokość walca jest równa średnicy jego podstawy. Oblicz promień podstawy walca oraz jego wysokość i zaznacz odpowiedź, która zawiera prawidłowe wymiary.

☐ $r = 8, H = 10$ ☐ $r = 4, H = 16$ ☐ $r = 6, H = 14$ ☐ $r = 6, H = 12$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.