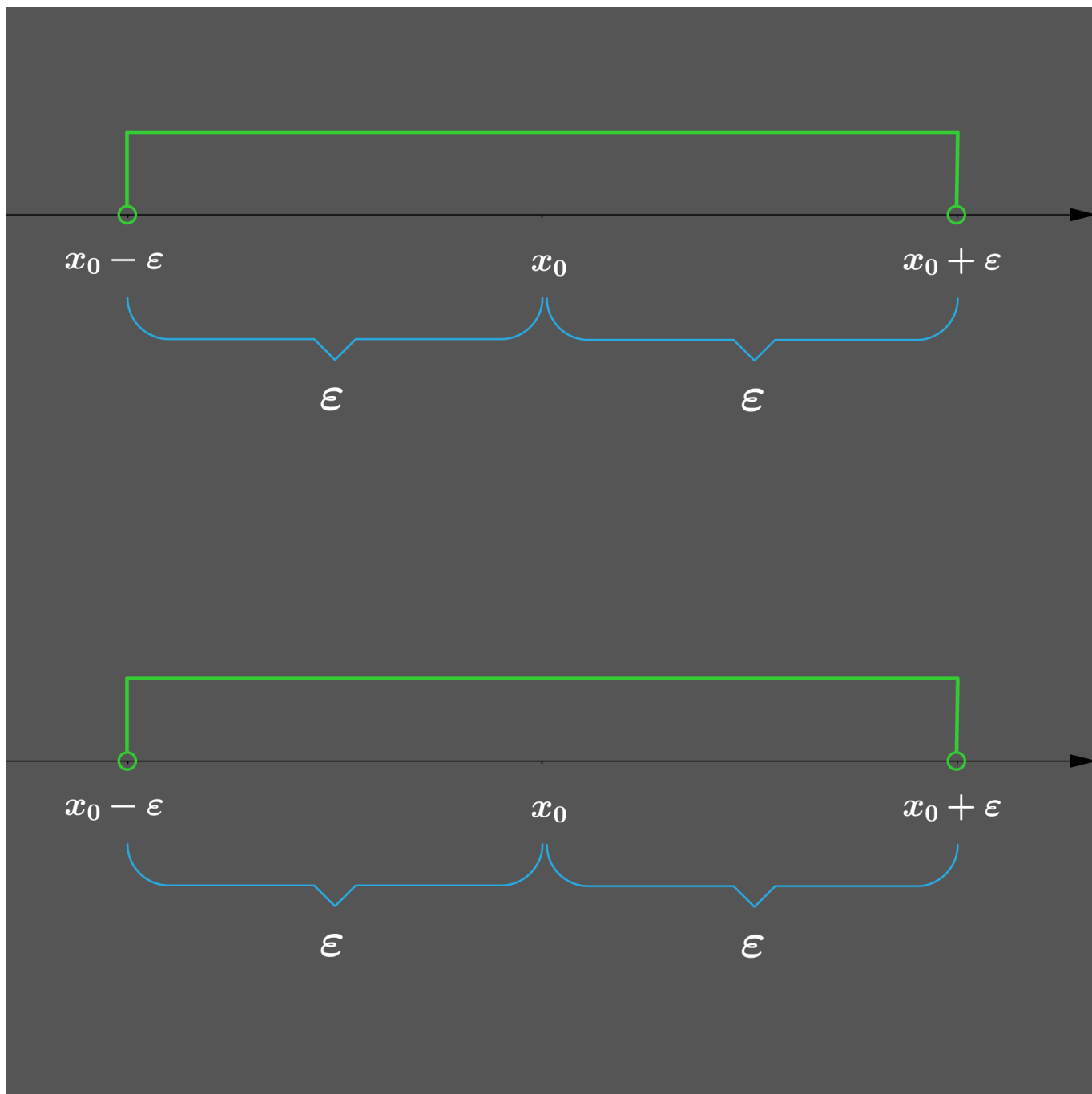
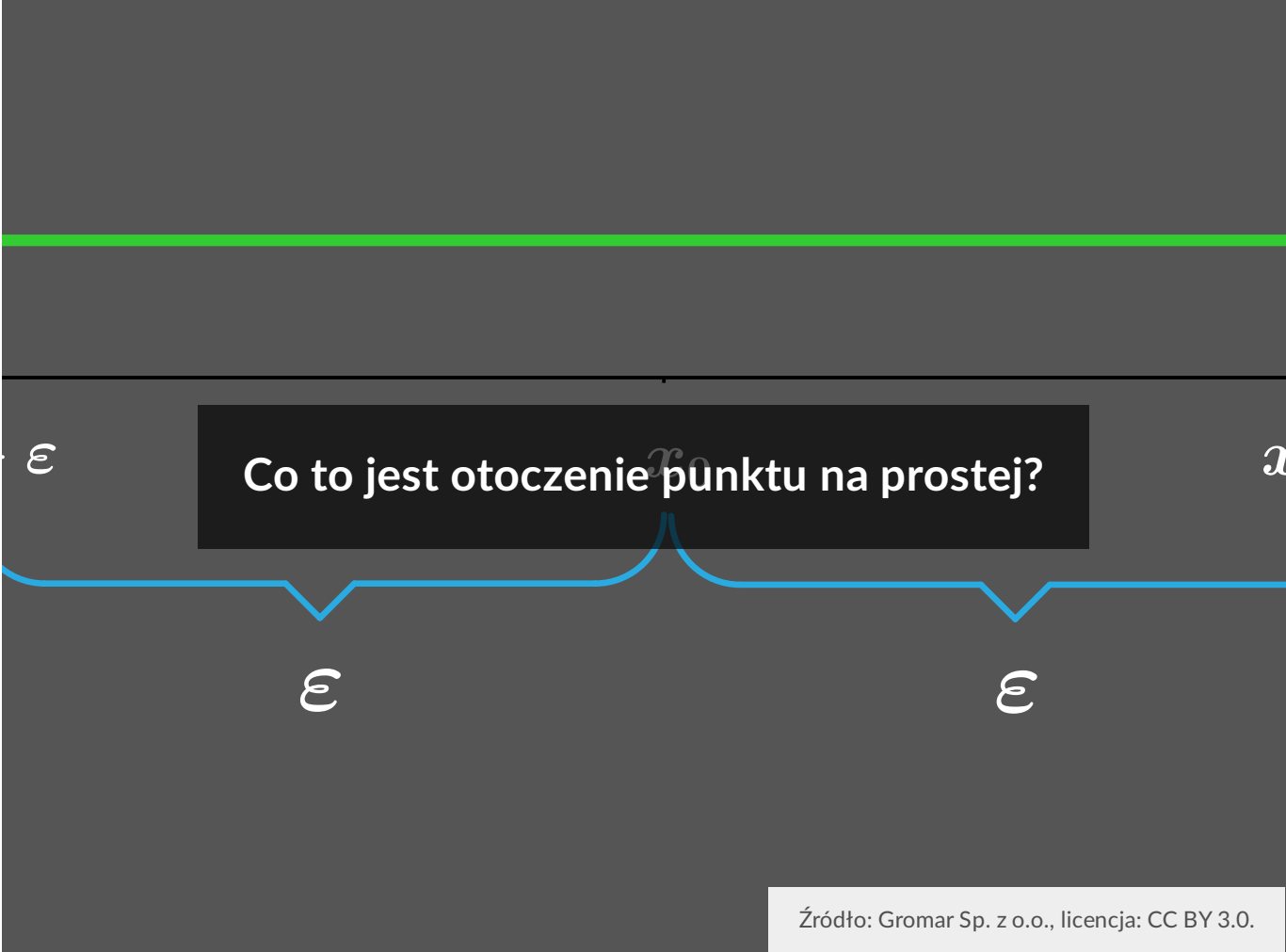




Co to jest otoczenie punktu na prostej?

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Infografika](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



## Co to jest otoczenie punktu na prostej?

Źródło: Gromar Sp. z o.o., licencja: CC BY 3.0.

Otoczenie to pojęcie, które często pojawia się w życiu codziennym. Może oznaczać coś co znajduje się dookoła nas lub grupę ludzi wśród których często przebywamy. Również w matematyce odgrywa ono bardzo ważną rolę, szczególnie w teorii granic ciągów i funkcji. Jest też jednym z podstawowych pojęć w dziedzinie matematyki zwanej topologią. W dalszej części dowiesz się czym jest otoczenie punktu na osi liczbowej oraz czym różni się od sąsiedztwa.

### Twoje cele

- Zmierzysz odległości między punktami na prostej.
- Dowiesz się czym jest otoczenie punktu na osi liczbowej.
- Przeanalizujesz różnice między otoczeniem a sąsiedztwem punktu.

# Przeczytaj

Przed sformułowaniem definicji otoczenia punktu przypomnijmy, że jeśli mamy dane dwie liczby rzeczywiste  $x$  i  $y$  na osi liczbowej, to ich odległość definiujemy jako wartość bezwzględną ich różnicy, czyli liczbę  $|x - y|$ .

## Przykład 1

Odległość liczb  $x = -1$  oraz  $y = 5$  na osi liczbowej wynosi:

$$|x - y| = |-1 - 5| = |-6| = 6.$$

## Dla zainteresowanych

W ogólnym przypadku, do mierzenia odległości między elementami danego zbioru  $A$ , wykorzystuje się funkcję nazywaną metryką. Funkcja ta, oznaczana zazwyczaj literą  $d$ , przekształca zbiór  $A$  w zbiór  $(0, \infty)$  oraz dla dowolnych  $x, y, z \in A$  spełnia warunki

1.  $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2.  $d(x, y) = d(y, x)$
3.  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

Pierwszy warunek mówi, że odległość punktu od siebie jest równa zero, natomiast odległość między różnymi punktami jest różna od zera. Drugi warunek orzeka, że odległość od punktu  $x$  do punktu  $y$  jest zawsze taka sama jak odległość od  $y$  do  $x$ . Z trzeciego warunku wynika, że odległość między punktami  $x$  i  $y$  jest nie większa niż suma odległości tych punktów od dowolnego punktu  $z$ . Ostatni warunek nazywany jest nierównością trójkąta i można go zinterpretować następująco: droga od punktu  $x$  do punktu  $y$  przez dowolny punkt  $z$  zawsze będzie nie mniejsza niż bezpośrednia droga z punktu  $x$  do  $y$ .

Można sprawdzić, że w przypadku gdy zbiór  $A$  jest zbiorem liczb rzeczywistych to funkcja  $d(x, y) = |x - y|$  spełnia warunki 1 – 3, zatem jest metryką.

## Czym jest otoczenie punktu?

### Definicja: Otoczenie punktu

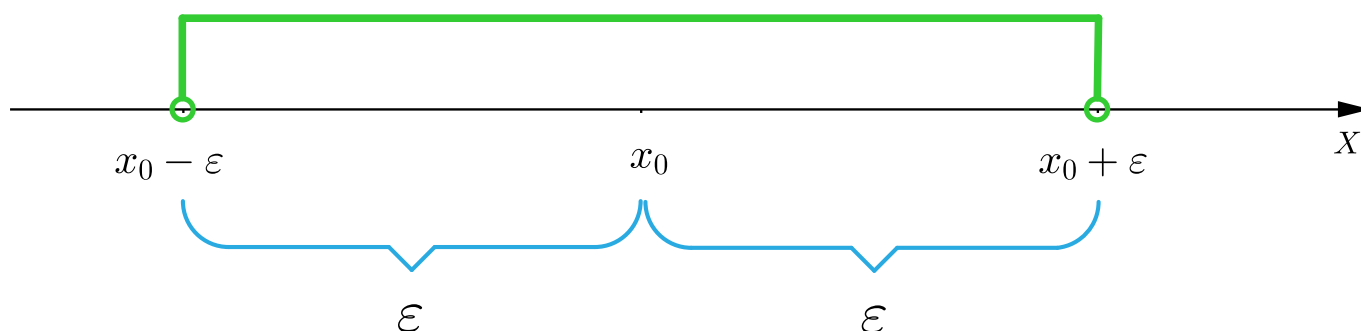
Otoczeniem punktu  $x_0 \in \mathbb{R}$  o promieniu  $\varepsilon > 0$  nazywamy zbiór wszystkich liczb rzeczywistych, których odległość od  $x_0$  jest mniejsza od  $\varepsilon$ . Otoczenie punktu  $x_0$  o promieniu  $\varepsilon$  oznaczamy  $U(x_0, \varepsilon)$ . Powyższą definicję możemy zatem zapisać symbolicznie

$$U(x_0, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < \varepsilon\}$$

Korzystając z definicji **wartości bezwzględnej** możemy zapisać otoczenie punktu w równoważny sposób w postaci przedziału

$$U(x_0, \varepsilon) = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$$

Pojęcie otoczenia punktu ilustruje poniższy rysunek.



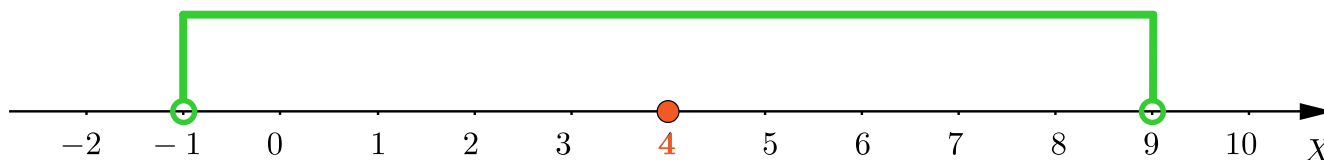
Źródło: Gromar Sp. z o.o., licencja: CC BY-SA 3.0.

## Przykład 2

Otoczeniem punktu  $x_0 = 4$  o promieniu  $\varepsilon = 5$  jest zbiór

$$U(4, 5) = \{x \in \mathbb{R} : |x - 4| < 5\}$$

Możemy zapisać w postaci przedziału  $(-1, 9)$ .



Źródło: Gromar Sp. z o.o., licencja: CC BY 3.0.

## Uwaga!

Często można spotkać bardziej ogólną definicję otoczenia punktu. Mianowicie za otoczenie punktu  $x_0$  na osi liczbowej można przyjąć dowolny przedział  $P$ , dla którego istnieje liczba  $\varepsilon > 0$  taka, że

$$U(x_0, \varepsilon) \subset P$$

Innymi słowy za otoczenie punktu  $x_0$  można przyjąć dowolny przedział zawierający zbiór  $U(x_0, \varepsilon)$  dla pewnej dodatniej liczby  $\varepsilon$ .

Z powyższej uwagi wynika w szczególności, że za otoczenie każdego punktu na osi liczbowej można przyjąć całą oś! Nie jest to jednak z punktu widzenia zastosowań ciekawy przypadek. W praktyce najczęściej żąda się aby otoczenia były małe, tzn. miały dostatecznie mały promień.

## Co to jest sąsiedztwo punktu i czym różni się od otoczenia?

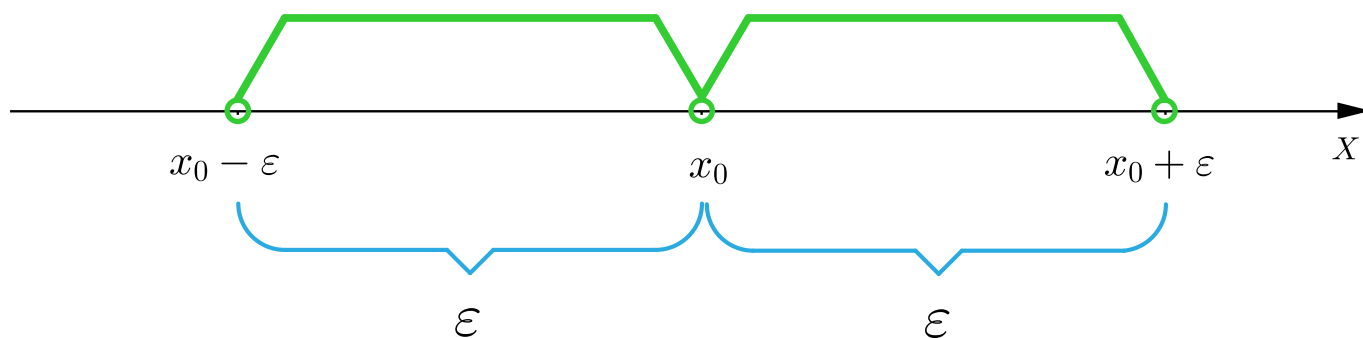
Często pojawia się potrzeba zbadania pewnej własności w otoczeniu jakiegoś punktu na osi liczbowej, lecz nie interesuje nas ta własność w samym punkcie. W takiej sytuacji możemy posłużyć się pojęciem [sąsiedztwa](#).

### Definicja: Sąsiedztwo punktu

Sąsiedztwem punktu  $x_0 \in \mathbb{R}$  o promieniu  $\varepsilon > 0$  nazywamy zbiór

$$S(x_0, \varepsilon) = U(x_0, \varepsilon) - \{x_0\} = (x_0 - \varepsilon, x_0) \cup (x_0, x_0 + \varepsilon)$$

Sąsiedztwo punktu możemy zatem interpretować jako otoczenie punktu bez tego punktu.



Źródło: Gromar Sp. z o.o., licencja: CC BY 3.0.

Czasami w praktyce potrzebujemy zbadać pewną własność jedynie z lewej lub z prawej strony pewnego punktu. Mówimy wówczas o sąsiedztwie lewostronnym lub prawostronnym. Bardziej precyzyjnie sąsiedztwem lewostronnym punktu  $x_0 \in \mathbb{R}$  nazywamy zbiór  $S^-(x_0) = (x_0 - \varepsilon, x_0)$  dla pewnej liczby  $\varepsilon > 0$ , natomiast sąsiedztwem prawostronnym punktu  $x_0 \in \mathbb{R}$  nazywamy zbiór  $S^+(x_0) = (x_0, x_0 + \varepsilon)$  dla pewnej liczby  $\varepsilon > 0$ .

# Słownik

wartość bezwzględna liczby  $x$

$$|x| = \begin{cases} x & \text{dla } x \geq 0 \\ -x & \text{dla } x < 0 \end{cases}$$

otoczenie punktu

$$U(x_0, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < \varepsilon\}$$

sąsiedztwo punktu

otoczenie punktu bez tego punktu

# Infografika

---

## Polecenie 1

Zapoznaj się z poniższą infografiką ilustrującą na osi liczbowej otoczenie o promieniu  $\varepsilon$  punktu o współrzędnej 1, a następnie odpowiedz na zamieszczone niżej pytania.

Źródło: Gromar Sp. z o.o., licencja: CC BY 3.0.

## Polecenie 2

Na podstawie zamieszczonej infografiki wyznacz promień otoczenia punktu o współrzędnej 1.

## Polecenie 3

Zapisz za pomocą wartości bezwzględnej, otoczenie punktu o współrzędnej 1, przedstawione w infografice.

# Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

## Ćwiczenie 1



Przyporządkuj pary liczb do odległości między nimi.

$$|x - y| = 2$$

$$x = -3, y = -2$$

$$x = -1, y = 2$$

$$x = 3, y = 5$$

$$x = 4, y = 1$$

$$x = 1, y = -1$$

$$|x - y| = 3$$

$$x = 3, y = 4$$

$$x = 0, y = -1$$

$$|x - y| = 1$$

## Ćwiczenie 2



Jaki jest promień otoczenia  $(-1, 5)$  liczby 2?

☐ 3

☐ 2

☐ 1

### Ćwiczenie 3



Dane jest otoczenie  $(2, 8)$  pewnego punktu  $x_0$ . Jaki to punkt, jeśli promień tego otocznia jest równy 3?

☐ 6

☐ 5

☐ 4

### Ćwiczenie 4



Wskaż otoczenia o środku w punkcie o współrzędnej 1.

☐  $(-1, 3)$

☐  $(0, 2)$

☐  $(-1, 2)$

☐  $(-2, 4)$

☐  $(-2, 2)$

## Ćwiczenie 5



Uzereguj podane otoczenia liczby  $x_0 = -2$  rosnąco według ich promieni.

$$\left(-\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}\right)$$



$$(-5, 1)$$



$$(-4, 0)$$



$$(-3, -1)$$



$$\left(-\frac{7}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$



## Ćwiczenie 6



Połącz w pary otoczenia z ich środkami  $x_0$  i promieniami  $\varepsilon$ .

$$(1, 3)$$

$$x_0 = 2, \varepsilon = 1$$

$$(1, 4)$$

$$x_0 = -1, \varepsilon = 2$$

$$(0, 3)$$

$$x_0 = \frac{5}{2}, \varepsilon = \frac{3}{2}$$

$$(-3, 1)$$

$$x_0 = \frac{3}{2}, \varepsilon = \frac{3}{2}$$

$$(-2, 2)$$

$$x_0 = 0, \varepsilon = 2$$

## Ćwiczenie 7



Wśród otoczeń punktu  $x_0 = 1$  wskaż te, których promień jest mniejszy od 2.

☐  $(-1, 4)$ ☐  $(-\frac{1}{2}, \frac{5}{2})$ ☐  $(0, 2)$ ☐  $(-2, 4)$ ☐  $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ 

## Ćwiczenie 8



Wiedząc, że wszystkie otoczenia w lewej kolumnie mają promień równy 2, przyporządkuj do nich ich środki.

 $(-\frac{4}{3}, \frac{8}{3})$  $x_0 = 2$  $(0, 4)$  $x_0 = \frac{4}{3}$  $(-\frac{5}{3}, \frac{7}{3})$  $x_0 = 3$  $(-2, 2)$  $x_0 = \frac{2}{3}$  $(1, 5)$  $x_0 = \frac{1}{3}$  $(-\frac{2}{3}, \frac{10}{3})$  $x_0 = 0$

# Dla nauczyciela

---

**Autor:** Mariusz Doliński

**Przedmiot:** Matematyka

**Temat:** Co to jest otoczenie punktu na prostej

**Grupa docelowa:**

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

**Podstawa programowa:**

VI. Ciągi

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

1) oblicza granice funkcji (w tym jednostronne).

**Kształtowane kompetencje kluczowe**

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

**Cele operacyjne:**

Uczeń:

- mierzy odległości między punktami na prostej;
- definiuje otoczenie punktu na osi liczbowej;
- analizuje różnice między otoczeniem a sąsiedztwem punktu.

**Strategie nauczania**

- konstruktywizm.

**Metody i techniki nauczania**

- rozmowa nauczająca z wykorzystaniem medium bazowego i ćwiczeń interaktywnych.

**Formy pracy**

- praca indywidualna;
- praca w grupach.

### **Środki dydaktyczne**

- komputery z głośnikami i dostępem do Internetu, słuchawki;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda;
- duże arkusze papieru, flamastry dla każdej grupy.

### **Przebieg zajęć**

#### **Faza wstępna:**

1. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć oraz wspólnie z uczniami ustala kryteria sukcesu.
2. Uczniowie tworzą pytania dotyczące tematu zajęć, na które odpowiedzą w trakcie lekcji.

#### **Faza realizacyjna:**

1. Nauczyciel przedstawia uczniom rysunek osi liczbowej z zaznaczonymi na niej dwoma liczbami i prosi uczniów o wyznaczenie odległości między nimi. Po uzyskaniu poprawnej odpowiedzi prosi wybranego ucznia bądź uczniów o podanie intuicyjnej definicji odległości dwóch punktów na prostej.
2. Praca z infografiką. Po przedstawieniu informacji na temat otoczenia i sąsiedztwa punktu uczniowie zostają zapoznani z infografiką przedstawiającą przykładowe otoczenie punktu. Następnie wykonują Polecenia 2 i 3.
3. Nauczyciel dzieli uczniów w pary i rozdaje im arkusze papieru oraz flamastry. Następnie prosi uczniów o naszkicowanie na arkuszu papieru otoczenia o podanym przez nauczyciela środku i promieniu. Każda para powinna otrzymać inne otoczenie do narysowania. Środek i promień mogą być losowane przez uczniów.
4. Uczniowie rozwiązują ćwiczenia interaktywne wskazane przez nauczyciela. Wspólnie omawiają odpowiedzi.

#### **Faza podsumowująca:**

- Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, udzielając im tym samym informacji zwrotnej.

### **Praca domowa**

Uczniowie wykonują ćwiczenia interaktywne, których nie zrobili na lekcji.

#### **Materiały pomocnicze:**

- [Ciąg arytmetyczny](#)

- Ciągi – własności ciągów arytmetycznych

**Wskazówki metodyczne opisujące różne zastosowania multimedium:**

Uczniowie mogą przeanalizować treść infografiki jako pracę własną przed lekcją lub po niej, jako podsumowanie.