Pole czworokąta wpisanego w okrąg

Źródło: dostępny w internecie: pxhere.com, domena publiczna.

W tym materiale będziemy obliczać pole czworokąta wpisanego w okrąg, utrwalimy więc rożne wzory na pole czworokąta. Zanim przejdziemy do omówienia nowych treści, warto przypomnieć sobie twierdzenia związane z kątami w okręgu i odcinkami stycznymi.

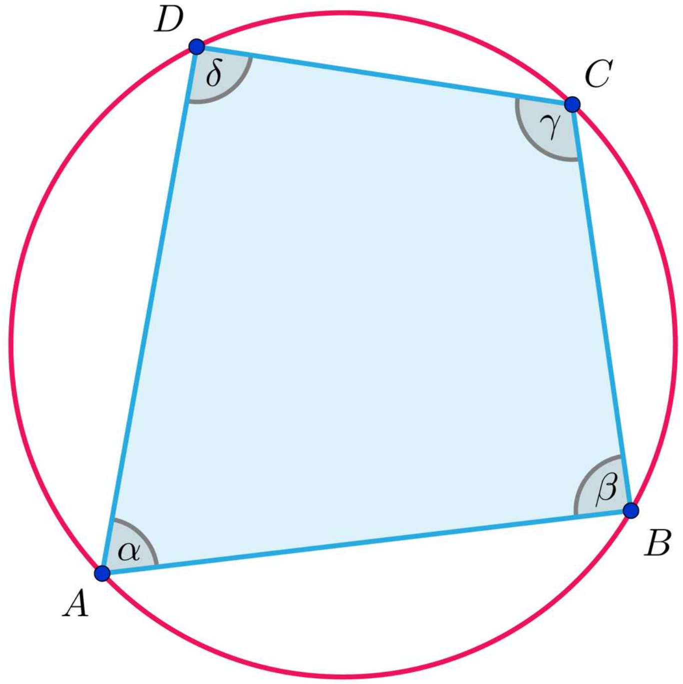
> **Twoje cele**
>
> - Wykorzystasz wzory na pole czworokąta w zadaniach związanych z okręgiem opisanym na czworokącie.
> - Wykorzystasz własności czworokątów wpisanych w okrąg w zadaniach geometrycznych.
> - Zastosujesz wzór Brahmagupty i twierdzenie Ptolemeusza w zadaniach geometrycznych.

Przeczytaj

Zacznijmy od przypomnienia definicji i najważniejszych własności czworokąta wpisanego w okrąg.

> **Definicja: Czworokąt wpisany w okrąg**
>
> Czworokąt, którego wszystkie wierzchołki leżą na jednym okręgu.

Własności czworokąta wpisanego w okrąg



> **Ważne!**
>
> Czworokąt wypukły można wpisać w okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy suma jego przeciwległych kątów jest równa 180°, czyli gdy
>
> $$\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180^\circ.$$
>
> Czworokąt można wpisać w okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy symetralne wszystkich jego boków przecinają się w jednym punkcie.
>
> **Wniosek: Trapez można wpisać w okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy jest równoramienny.**

Powyższy fakt możemy udowodnić, korzystając z własności kątów w trapezie i w czworokącie wpisanym w okrąg. Wniosek ten wynika również z prostej obserwacji, że symetralna dowolnej cięciwy w okręgu jest prostopadła do niej i przechodzi przez środek tego okręgu. Zatem dwie równoległe cięciwy mają wspólną oś symetrii (jest nią ich symetralna). Zatem trapez o wierzchołkach w końcach tych cięciw jest równoramienny.

> **Dla zainteresowanych**
>
> **Twierdzenie Ptolemeusza**
>
> Czworokąt $ABCD$ można opisać na okręgu wtedy i tylko wtedy, gdy iloczyn długości przekątnych równy jest sumie iloczynów długości przeciwległych boków.
>
> Dla czworokątów wpisanych w okrąg zachodzi, przypominający nieco wzór Herona, **wzór Brahmagupty:**
>
> $$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)},$$
>
> gdzie $p = \frac{1}{2}(a+b+c+d)$ – połowa obwodu czworokąta, $a,\ b,\ c,\ d$ – długości boków czworokąta.

Poniżej kilka przykładów wyznaczania pole czworokąta wpisanego w okrąg.

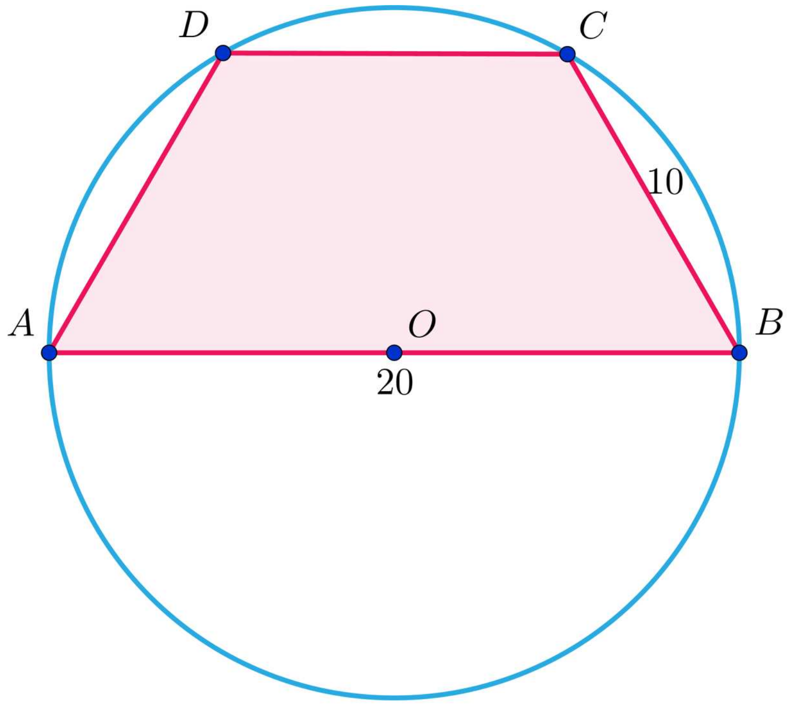
Zacznijmy od prostego przykładu.

> **Przykład 1**
>
> Obliczymy pole czworokąta wpisanego w okrąg. Promień tego okręgu jest równy 5. Przekątne tego czworokąta są średnicami tego okręgu i przecinają się pod kątem 30°.
>
> **Rozwiązanie**
>
> Aby rozwiązać to zadanie wystarczy, że zastosujemy wzór na pole czworokąta o danych przekątnych i kącie α między nimi:
>
> $P = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2 \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 10 \cdot \frac{1}{2} = 25.$

W powyższym przykładzie nie musieliśmy wykorzystywać faktu, że zadany czworokąt jest prostokątem (co wynika z faktu, że kąt oparty na średnicy jest kątem prostym).

Jednak w wielu zadaniach zanim zastosujemy odpowiedni wzór na pole czworokąta, będziemy musieli przeanalizować własności danego czworokąta.

> **Przykład 2**
>
> Trapez $ABCD$ wpisany jest w okrąg, przy czym dłuższa podstawa AB trapezu o długości 20 jest średnicą tego okręgu. Ramię BC ma długość 10. Obliczymy pole tego trapezu.



Rozwiązanie

Na początek przypomnijmy, że trapez wpisany w okrąg jest trapezem równoramiennym, zatem $|AD| = |BC| = 10$. Ponadto promień okręgu też jest równy 10, więc możemy wywnioskować, że trójkąty BOC i AOD są trójkątami równobocznymi. Ich kąty przy wierzchołku O mają miarę 60°. Kąt COD również ma miarę 60°. Wynika stąd, że trójkąt OCD jest również równoboczny. Zatem pole trapezu jest równe sumie pól trzech trójkątów równobocznych o boku długości 10:

$S = 3 \cdot \frac{10^2\sqrt{3}}{4} = 75\sqrt{3}.$

Przeanalizujmy teraz ważne zadanie związane z wyznaczeniem pola czworokąta, gdy dane są długości jego boków. Rozwiążemy ten problem dwoma sposobami.

Przykład 3

Obliczymy pole czworokąta $ABCD$ wpisanego w okrąg. Długości boków tego czworokąta są równe: $|AB| = 2$, $|BC| = 3$, $|CD| = 4$, $|DA| = 5$.

Rozwiązanie

Zadanie to można rozwiązać błyskawicznie wyliczając wartość połowy obwodu

$p = \frac{1}{2}(2 + 3 + 4 + 5) = 7$

i podstawiając do wzoru Brahmagupty:

$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}.$

Zatem

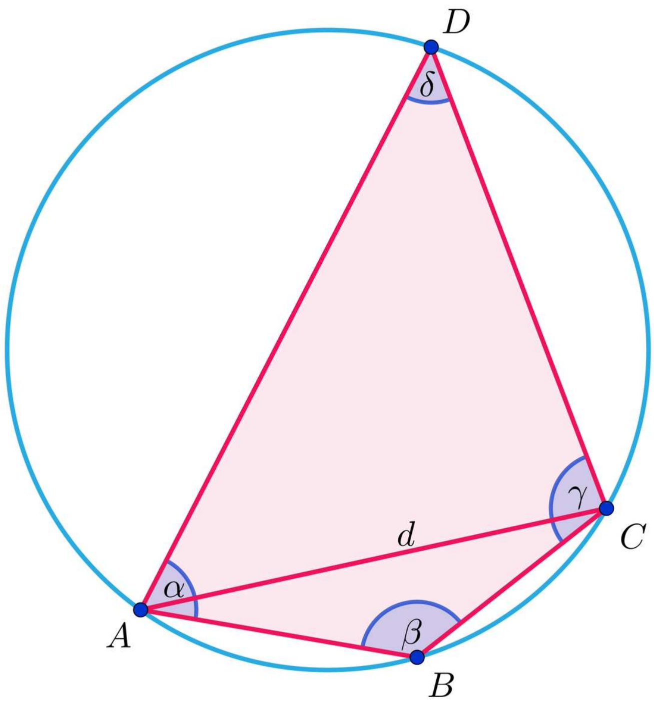
$$S=\sqrt{(7-2)(7-3)(7-4)(7-5)}=\sqrt{5\cdot4\cdot3\cdot2}=2\sqrt{30}.$$

Powyższego wzoru nie ma w tablicach matematycznych, rzadko też jest stosowany na lekcjach. Spróbujmy więc wyznaczyć to pole, odwołując się do wiadomości „szkolnych”. Powtórzymy przykład rozwiązując go inną metodą.

Przykład 4

Przypomnijmy, że szukamy pola czworokąta $ABCD$ wpisanego w okrąg. Długości boków tego czworokąta są równe: $|AB|=2$, $|BC|=3$, $|CD|=4$, $|DA|=5$.

Rozwiązanie



Oznaczymy długość przekątnej AC literą d i zastosujemy twierdzenie cosinusów dla trójkątów ABC i ADC. Wykorzystamy fakt, że $\delta=180^\circ-\beta$ oraz $\cos(180^\circ-\beta)=-\cos\beta$.

Otrzymujemy dwa równania:

$$d^2=4+9-12\cos\beta,$$

$$d^2=16+25+40\cos\beta.$$

Porównując prawe strony otrzymujemy:

$$4+9-12\cos\beta=16+25+40\cos\beta,$$

$52\cos\beta = -28,$

$\cos\beta = -\frac{7}{13}.$

Następnie korzystamy z jedynki trygonometrycznej:

$\sin\beta = \sqrt{1-(\cos\beta)^2} = \sqrt{1-\frac{49}{169}} = \sqrt{\frac{120}{169}} = \frac{2}{13}\sqrt{30}.$

Szukane pole czworokąta $ABCD$ jest sumą pól trójkątów ABC i ACD, więc wykorzystując wzór na pole trójkąta otrzymujemy:

$S = \frac{1}{2}\cdot|AB|\cdot|BC|\cdot\sin\beta + \frac{1}{2}\cdot|AD|\cdot|DC|\cdot\sin(180^\circ-\beta) =$

$= \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 3\cdot\frac{2}{13}\sqrt{30} + \frac{1}{2}\cdot 4\cdot 5\cdot\frac{2}{13}\sqrt{30} = \frac{26}{13}\sqrt{30} = 2\sqrt{30}.$

Ciekawostka

Przy okazji dwóch powyższych rozwiązań warto zauważyć, że postępując podobnie jak w przykładzie 3, możemy wyprowadzić wzór na pole czworokąta wpisanego w okrąg o danych długościach boków, więc wzór Brahmagupty.

Nieco bardziej skomplikowane jest wyprowadzenie wzoru na pole dowolnego czworokąta o danych długościach boków. Postępuje się podobnie, choć potrzebna jest nam wtedy dodatkowa informacja o czworokącie (np. kąt lub przekątna).

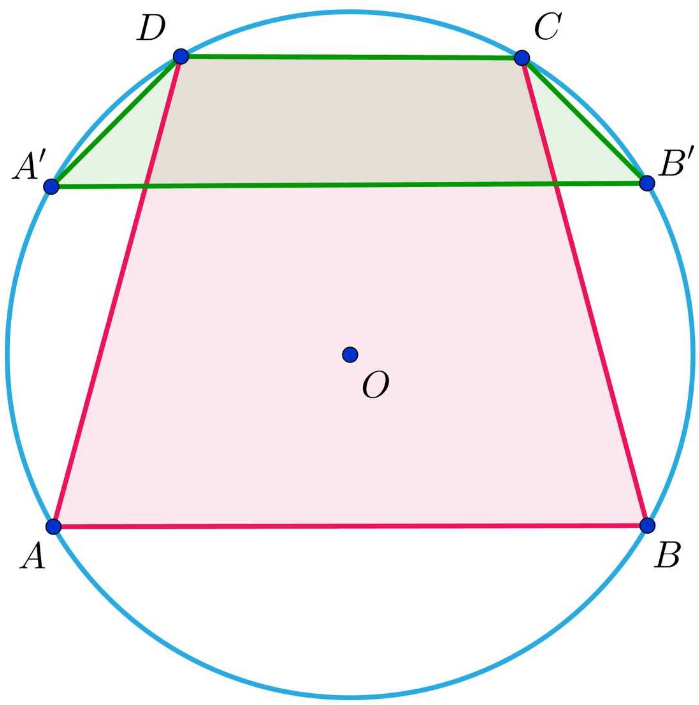
Okazuje się, że spośród wszystkich czworokątów o zadanych długościach kolejnych boków, największe pole ma ten wpisany w okrąg!

Przykład 5

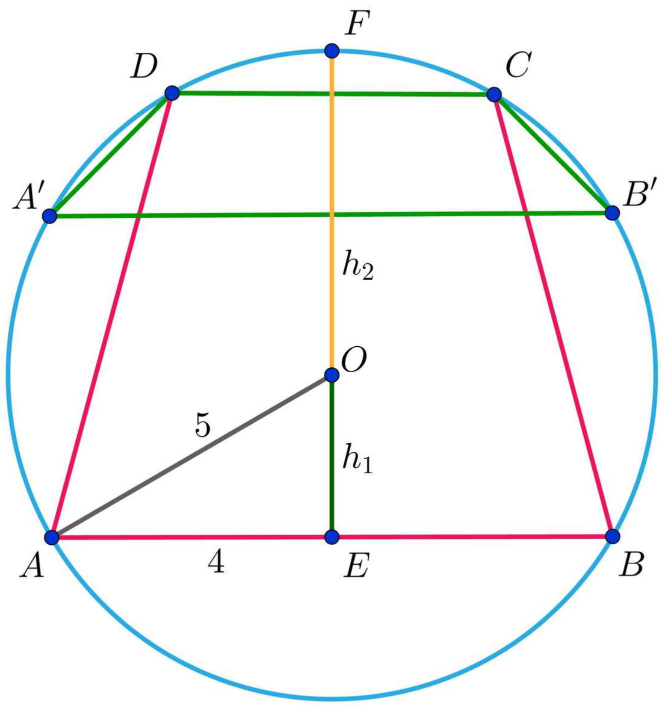
Trapez równoramienny wpisany jest w okrąg o promieniu 5, przy czym dłuższa podstawa ma długość 8, a krótsza 6. Zastanówmy się jakie może być pole tego trapezu.

Rozwiązanie

Polecenie „jakie może być pole trapezu” sugeruje, że odpowiedź nie musi być jednoznaczna. W zadaniu mamy okrąg o promieniu 5 i dwie równoległe cięciwy (będące podstawami trapezu). Możliwe są zatem dwie opcje (rysunek):



Wyznaczymy wysokości tych trapezów, czyli odległości podstaw. Zauważmy że można to zrobić wyznaczając odległość środka okręgu od dłuższej podstawy (h_1) oraz od krótszej podstawy (h_2). Trapez o większym polu będzie miał wysokość równą sumie tych odległości, natomiast trapez o mniejszym polu będzie miał wysokość równą różnicy tych odległości.



Wartości h_1 oraz h_2 obliczamy z twierdzenia Pitagorasa:

$h_1{}^2 + 4^2 = 5^2 \ \Rightarrow \ h_1 = 3$

$h_2{}^2 + 3^2 = 5^2 \;\Rightarrow\; h_2 = 4$

Zatem szukane pole ma wartość:

$S = \frac{1}{2}(8+6)(3+4) = 49$

lub

$S = \frac{1}{2}(8+6)(4-3) = 7.$

Słownik

trapez

czworokąt (wypukły) mający przynajmniej jedną parę równoległych boków; (wybraną) parę boków równoległych nazywa się podstawami, pozostałe boki noszą nazwę ramion, odległość między podstawami nazywa się wysokością trapezu

symetralna odcinka

prosta prostopadła do danego odcinka przechodząca przez jego środek; równoważnie – prosta będąca zbiorem punktów równo oddalonych od obu końców odcinka

Symulacja interaktywna

Polecenie 1

W poniższym aplecie zmieniaj długości boków i miary kątów wybranych czworokątów. Przy ustalonym obwodzie obserwuj, w jakich przypadkach na powstałym czworokącie można opisać okrąg oraz jak zmienia się pole czworokąta. Wyciągnij wnioski.

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/D12r5O9bW

Polecenie 2

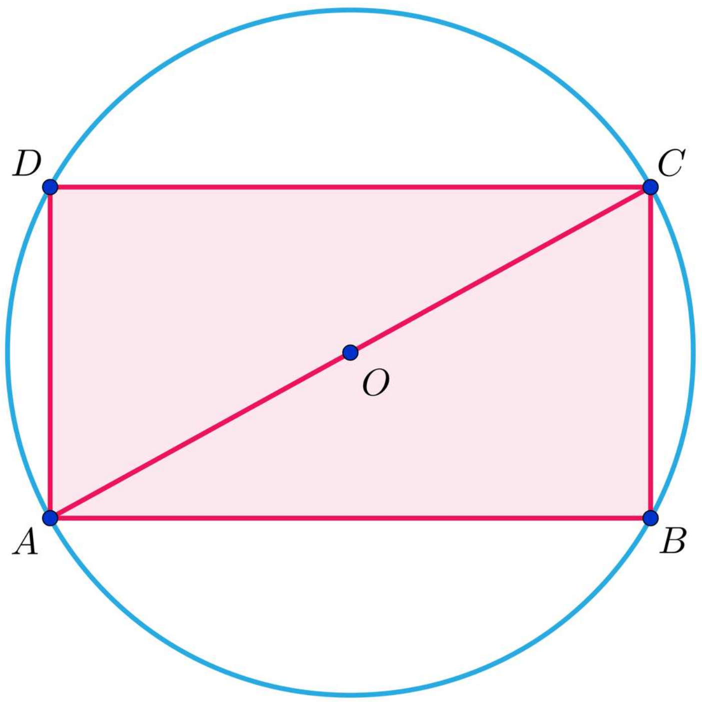
Korzystając z poznanego twierdzenia, dzięki powyższej symulacji, oblicz największe możliwe pole czworokąta, który ma dwa boki długości 1 i dwa boki długości 2.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Prostokąt $ABCD$ wpisany jest w okrąg o promieniu 4. Długość boku $|AB| = 7$.

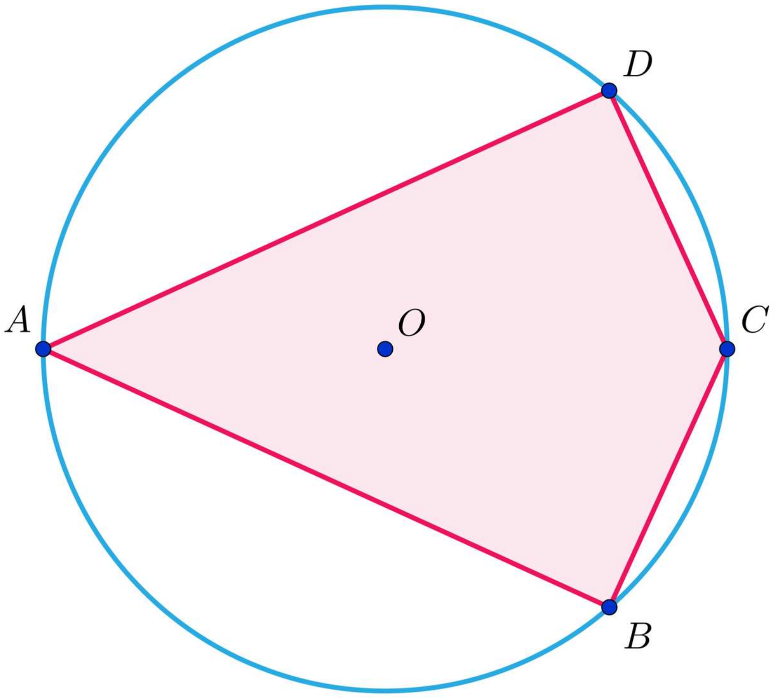


Jakie jest pole tego prostokąta? Zaznacz prawidłową odpowiedź.

- 28
- 14
- $7\sqrt{15}$
- 56

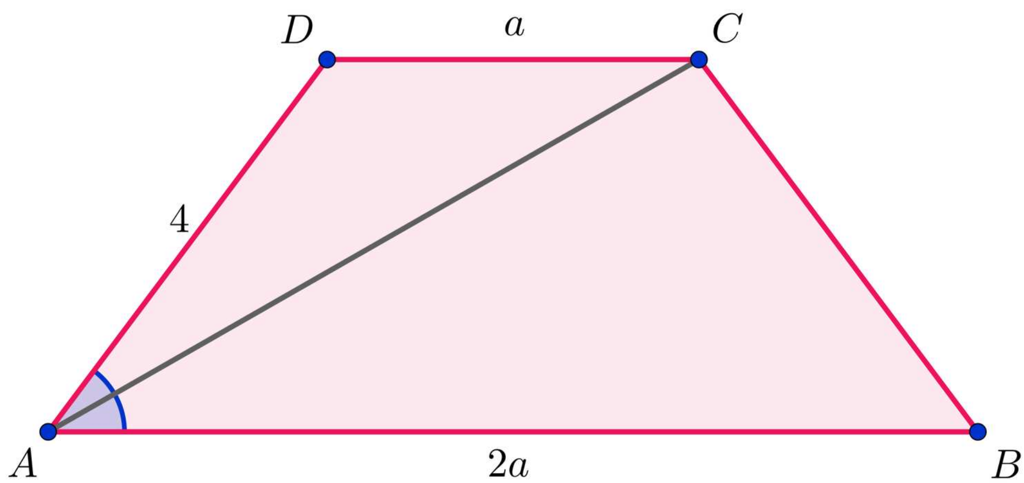
Ćwiczenie 2

Udowodnij, że jeżeli na deltoidzie o bokach x i y można opisać okrąg, to jego pole wyraża się wzorem $P = xy$.



Ćwiczenie 3

W trapezie $ABCD$ wpisanym w okrąg jedna z podstaw jest dwa razy dłuższa od drugiej, a przekątna jest dwusieczną kąta przy dłuższej podstawie. Oblicz pole tego trapezu, jeżeli jego ramię ma długość 4.



Ćwiczenie 4

Przekątne trapezu wpisanego w okrąg są prostopadłe. Wysokość tego trapezu jest równa 10. Wskaż zdania prawdziwe.

- [ ] Pole jest równe 10.
- [ ] Można wyznaczyć sumę długości podstaw trapezu.
- [ ] Pole jest równe 50.
- [ ] Przekątne tego trapezu są równej długości.
- [ ] Za mało jest danych, aby obliczyć pole tego trapezu.
- [ ] Nie można wyznaczyć sumy długości podstaw trapezu.

Ćwiczenie 5

Na czworokącie wypukłym $ABCD$ można opisać okrąg. Wiadomo, że $|AB| = |BC|$, $|AD| = 2\sqrt{3}$, $|DC| = 3 - \sqrt{3}$, $|AC| = 3\sqrt{2}$.
Uporządkuj etapy rozumowania prowadzącego do wyznaczenia pola tego czworokąta.

- Ponadto $|AB| = |BC|$, więc jest to trójkąt równoboczny o boku długości $|AB| = |BC| = |AC| = 3\sqrt{2}$.
- Pole czworokąta $ABCD$ jest więc równe $\frac{9-3\sqrt{3}}{2} + \frac{9\sqrt{3}}{2} = \frac{9+6\sqrt{3}}{2}$.
- $|AC|^2 = |AD|^2 + |CD|^2 - 2|AD| \cdot |CD| \cdot \cos(\sphericalangle D)$
- Pole trójkąta jest równe $\frac{\left(3\sqrt{2}\right)^2\sqrt{3}}{4} = \frac{9\sqrt{3}}{2}$.
- Znając kąt przy wierzchołku D obliczamy pole trójkąta ACD.
- Podstawiając dane do powyższego równania wyznaczamy $\cos(\sphericalangle D) = -\frac{1}{2}$.
- $S = \frac{1}{2}|AD| \cdot |CD| \cdot \sin(120^\circ) = \frac{9-3\sqrt{3}}{2}$
- Na wstępie zauważmy, że podane długości boków trójkąta ACD pozwalają, z twierdzenia cosinusów obliczyć cosinus kąta D.
- Rozważmy teraz trójkąt ABC.
- Ponieważ suma przeciwległych kątów w czworokącie opisanym na okręgu jest równa 120°, więc kąt przy wierzchołku B ma miarę 60°.
- Oznacza to, że kąt przy wierzchołku D ma miarę 120°.

Ćwiczenie 6

Obwód trapezu $ABCD$ wpisanego w okrąg wynosi 32. Wysokość DE, poprowadzona z wierzchołka kąta rozwartego dzieli podstawę na dwa odcinki o długościach $|AE| = 3$ i $|EB| = 11$. Połącz w pary - daną wielkość i odpowiadającą jej liczbę.

pole trójkąta ABC	8
$\|CD\|$	4
$\|DE\|$	44
$\|AD\|$	28
pole trapezu $ABCD$	5

Ćwiczenie 7

Na czworokącie $ABCD$ można opisać okrąg. Długości boków tego czworokąta są równe $|BC| = 12$, $|CD| = 6$, $|AD| = 10$, a kąt ABC ma miarę 60°. Oblicz pole czworokąta $ABCD$.

Ćwiczenie 8

W okrąg o średnicy 26 wpisano trapez równoramienny w ten sposób, że suma kwadratów długości jego podstaw jest równa 914, a sinus kąta ostrego wynosi $\frac{12}{13}$. Oblicz pole tego trapezu.

Dla nauczyciela

Autor: Paweł Dziuba

Przedmiot: Matematyka

Temat: Pole czworokąta wpisanego w okrąg

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

VIII. Planimetria.

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto stosuje własności czworokątów wpisanych w okrąg i opisanych na okręgu.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- wykorzystuje własności czworokątów wpisanych w okrąg w zadaniach geometrycznych,
- stosuje wzór Brahmagupty i twierdzenie Ptolemeusza, obliczając pole czworokąta wpisanego w okrąg.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja
- metoda tekstu przewodniego

Formy pracy:

- praca indywidualna
- praca w grupach
- praca całego zespołu

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do internetu,
- projektor multimedialny.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

- Uczniowie przypominają własności czworokątów.
- Nauczyciel podaje temat i cele zajęć, uczniowie ustalają kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

- Nauczyciel inicjuje dyskusję na temat warunków jakie musi spełniać czworokąt, aby mógł być wpisany w okrąg. Uczniowie formułują wnioski korzystając z symulacji interaktywnej.
- Nauczyciel dzieli klasę na grupy. Uczniowie w grupach lub indywidualnie, metodą tekstu przewodniego, analizują przykłady 1 – 4, następnie na forum klasy dyskutują rozwiązania.
- Nauczyciel przedstawia rozwiązanie przykładu 5.
- Uczniowie wykonują ćwiczenia interaktywne 1-6.

Faza podsumowująca:

- Nauczyciel prosi wybranych uczniów o przedstawienie najważniejszych elementów, jakie były omawiane w trakcie lekcji.

Praca domowa:

- Nauczyciel poleca, aby uczniowie wykonali w domu ćwiczenia 7 -8 z sekcji „Sprawdź się” oraz polecenia związane w symulacją interaktywną.

Materiały pomocnicze:

Obliczanie pól i obwodów czworokątów

Wskazówki metodyczne:

Symulacja interaktywna może zostać wykorzystana przez uczniów do stworzenia infografiki prezentującej warunki wpisania czworokątów w okrąg.

Może być też wykorzystana przy omawianiu tematów dotyczących własności czworokątów wpisanych w okrąg.