



Zastosowanie funkcji wykładniczej

Zadania wykorzystujące funkcję wykładniczą w celu obliczenia: przyrostu populacji, przebiegu epidemii, zasięgu sieci społecznościowych w internecie, rozpadu pierwiastków promieniotwórczych, rozpadu węgla C-14, temperatury wody w miarę jej stygnięcia, absorpcji promieniowania rentgenowskiego. Ćwiczenia z wyjaśnieniami i rozwiązaniami.

Przykłady zastosowań funkcji wykładniczej: przyrost populacji, przebieg epidemii, zasięg sieci społecznościowych w internecie, rozpad pierwiastków promieniotwórczych, rozpad węgla C-14, ilość leku we krwi od chwili podania, temperatura wody w miarę jej stygnięcia, absorpcja promieniowania rentgenowskiego.

Zastosowanie funkcji wykładniczej

Za pomocą funkcji wykładniczej można opisać wiele zjawisk z życia codziennego. Funkcję tę stosujemy do opisu wielkości, które w stałym tempie się zmieniają, w ten sposób, że w kolejnych odcinkach czasu tyle samo razy lub o ten sam procent się zwiększają lub zmniejszają. Wielkości takie mają tę własność, że ich przyrost od pewnego momentu jest dużo szybszy niż wzrost liniowy. Za to spadek w tempie wykładniczym jest wolniejszy niż spadek w tempie liniowym. Z wzrostem i spadkiem wykładniczym mamy do czynienia w biologii, chemii, demografii, gospodarce.

Podamy poniżej kilka zastosowań funkcji wykładniczej.

Przykład 1

Żeby określić liczebność pewnej populacji osobników, można skorzystać ze wzoru

$$L(t) = L(0) \cdot a^t$$

gdzie

$L(0)$ jest początkową liczbą osobników w populacji,

a pewną stałą większą od zera, charakterystyczną dla tej populacji.

Populacja osobników w tempie wykładniczym rozmnaża się najczęściej przez pewien czas, po którym następuje czas względnej równowagi pomiędzy ilością osobników tworzących się i obumierających.

Przyrost populacji, przebieg epidemii czy zasięg sieci społecznościowych w internecie nie mogą wzrastać w nieskończoność, gdyż istnieją ograniczenia środowiska czy przestrzeni, w której dane zjawiska występują.

Pewna kolonia bakterii liczy na początku obserwacji 500000 osobników. Co godzina ich liczba wzrasta o 10%. Oblicz, ile bakterii będzie w tej kolonii po 3 godzinach, ile po 5 godzinach, a ile po 10 godzinach.

Liczbę osobników tej kolonii obliczymy ze wzoru $L(t) = 500000 \cdot 1,1^t$.

Zatem

$$L(3) = 500000 \cdot 1,1^3 = 665500$$

$$L(5) = 500000 \cdot 1,1^5 = 805255$$

$$L(10) = 500000 \cdot 1,1^{10} = 1296870.$$

Przykład 2

W pewnym mieście odnotowano w kolejnych latach podaną w tabeli liczbę mieszkańców.

Rok	Liczba ludności (w tysiącach)	Przyrost ludności (w tysiącach)
2009	30,30	-
2010	31,00	0,7
2011	31,71	0,71
2012	32,44	0,73
2013	33,19	0,75
2014	33,95	0,76

Zauważmy, że liczba mieszkańców nie przyrasta w sposób liniowy, ponieważ w kolejnych latach przyrost jest coraz większy. Obliczmy stosunek liczby mieszkańców w danym roku do liczby mieszkańców w poprzednim roku.

$$\frac{\text{liczba mieszkańców w 2014}}{\text{liczba mieszkańców w 2013}} = \frac{33,95}{33,19} \approx 1,023$$

$$\frac{\text{liczba mieszkańców w 2013}}{\text{liczba mieszkańców w 2012}} = \frac{33,19}{32,44} \approx 1,023$$

$$\frac{\text{liczba mieszkańców w 2012}}{\text{liczba mieszkańców w 2011}} = \frac{32,44}{31,71} \approx 1,023$$

$$\frac{\text{liczba mieszkańców w 2011}}{\text{liczba mieszkańców w 2010}} = \frac{31,71}{31} \approx 1,023$$

$$\frac{\text{liczba mieszkańców w 2010}}{\text{liczba mieszkańców w 2009}} = \frac{31}{30,3} \approx 1,023.$$

Ponieważ otrzymane ilorazy są równe (w pewnym przybliżeniu), wynika stąd, że liczba mieszkańców rośnie każdego roku o około 2,3%. Liczbę ludności w tym mieście po t latach od 2009 roku możemy opisać wzorem

$$X(t) = 30,3 \cdot (1,023)^t.$$

Zatem przyrost ludności w tym mieście ma charakter wykładniczy. Jeżeli w kolejnych latach przyrost ludności zachował ten charakter, ile osób mieszkało w tym mieście w latach 2016, 2020?

W roku 2016 było $33,95 \cdot (1,023)^2 \approx 35,53$, czyli około 35,53 tysięcy mieszkańców.

Liczba mieszkańców w 2020 roku wynosiła

$$X(11) = 30,3 \cdot (1,023)^{11} \approx 38,91,$$

czyli około 38,91 tysięcy.

Przykład 3

Pierwiastki promieniotwórcze samoistnie rozpadają się. Czasem połowicznego rozpadu nazywamy czas, po którym masa próbki takiego pierwiastka zmniejszy się o połowę. Masę próbki po upływie czasu t możemy obliczyć ze wzoru

$$m(t) = m(0) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$$

gdzie

$m(0)$ – jest masą próbki na początku,

T to okres połowicznego rozpadu.

Izotop jodu ma czas połowicznego rozpadu 8 dni. Ile miligramów jodu zostanie z 20 mg próbki po upływie 32 dni? Jaki procent izotopu ulegnie rozpadowi w tym czasie?

32 dni to 4 okresy połowicznego rozpadu izotopu jodu, bo $\frac{t}{T} = \frac{32}{8} = 4$. Mamy więc

$$m(32) = 20 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{20}{16} = \frac{5}{4} = 1,25.$$

Zatem z próbki złożonej z 20 mg pozostanie po 32 dniach 1,25 mg. Rozpadowi ulegnie więc 18,75 mg z 20 mg. Układamy proporcję

$$\begin{array}{rcl} 100\% & - & 20 \text{ mg} \\ x & - & 18,75 \text{ mg} \end{array}$$

Stąd

$$x = \frac{18,75 \cdot 100\%}{20} = 93,75\%.$$

Przykład 4

W naturze występują trzy izotopy węgla $C - 12$, $C - 13$, $C - 14$, różniące się między sobą liczbą protonów i neutronów w jądrze. Węgiel $C - 14$ jest radioaktywny i jego czas połowicznego rozpadu jest równy 5730 lat. Powstaje on w górnych warstwach atmosfery w wyniku bombardowania atomów azotu neutronami o wysokiej energii z promieniowania kosmicznego. Izotopu $C - 14$ jest bardzo mało w zawartym w powietrzu dwutlenku węgla, jeden atom przypada na około 10^{12} atomów węgla $C - 12$. Wszystkie rośliny pobierają z atmosfery oba rodzaje węgla. Także zwierzęta, jedząc rośliny, pobierają oba rodzaje węgla. Okazuje się, że zawartość węgla $C - 14$ w organizmach jest podobna do jego zawartości w atmosferze. Po śmierci kończy się dopływ węgla z zewnątrz i wtedy węgiel $C - 12$ pozostaje w komórkach, a węgiel $C - 14$ ulega rozpadowi.

Liczbę atomów węgla $C - 14$ w próbce po czasie t obliczymy ze wzoru

$$N(t) = N(0) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5730}}.$$

1. Ile lat temu zginął człowiek, jeżeli w jego szczątkach znajduje się tylko 6,25% ilości węgla, jaka jest w żywym organizmie?

Zbadajmy, jaka ilość węgla $C - 14$ pozostanie po kolejnych okresach.

Okres, jaki upłynął	Ilość węgla $C - 14$, jaka pozostanie
5730	50%
11460	25%
17190	12,5%
22920	6,25%

Zatem człowiek ten żył około 22920 lat temu.

2. Znaleziono kość pewnego zwierzęcia, w której 1 atom węgla $C - 14$ przypada na $4 \cdot 10^{12}$ atomów zwykłego węgla. Jaki czas upłynął od śmierci tego zwierzęcia?

Ponieważ w atmosferze na 1 atom węgla $C - 14$ przypada 10^{12} atomów zwykłego węgla, więc ilość węgla zmniejszyła się czterokrotnie. Po pierwszym okresie, czyli łącznie po 5 730 latach, ilość węgla zmniejszyła się o połowę i po kolejnym okresie, czyli po 11 460 latach, ilość węgla zmniejszyła się czterokrotnie. Zatem zwierzę żyło około 11 500 lat temu.

Przykład 5

Po podaniu pewnego leku do organizmu substancja czynna tego leku przenika do krwiobiegu. Następnie z każdą godziną ilość tej substancji maleje o około 40%. Jeżeli podana dawka leku zawierała 250 mg substancji, to po ilu godzinach zostanie w krwiobiegu pacjenta mniej niż 32,4 mg substancji?

- sposób I

Jeżeli z każdą następną godziną ilość substancji w krwiobiegu maleje o 40%, to znaczy, że po każdej godzinie pozostanie 0,6 ilości substancji obecnej w poprzedniej godzinie. Zatem $X(t) = 250 \cdot (0,6)^t$, gdzie t oznacza ilość czasu w godzinach, jaki upłynął od podania leku, a $X(t)$ to ilość leku w organizmie po t godzinach.

Mamy więc $250 \cdot (0,6)^t < 32,4$. Stąd $(0,6)^t < 0,1296$. Ponieważ $0,1296 = (0,6)^4$, więc nierówność ma postać $(0,6)^t < (0,6)^4$. Funkcja $y = (0,6)^t$ jest funkcją malejącą, więc dla większych argumentów przyjmuje mniejsze wartości. Stąd wynika, że $t > 4$.

- sposób II

W kolejnych godzinach mamy:

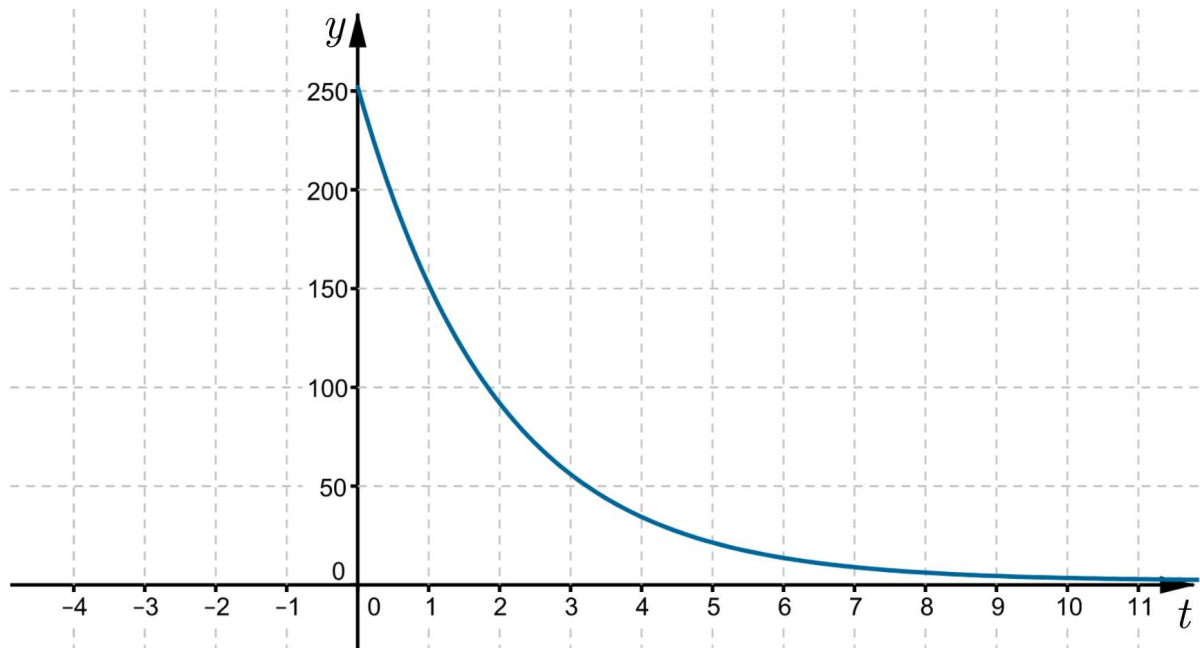
$$X(1) = 250 \cdot 0,6 = 150$$

$$X(2) = 150 \cdot 0,6 = 90$$

$$X(3) = 90 \cdot 0,6 = 54$$

$$X(4) = 54 \cdot 0,6 = 32,4.$$

Funkcja opisująca ilość leku we krwi jest funkcją malejącą oraz dla argumentu 4 przyjmuje dokładnie wartość 32,4, zatem dla argumentów większych przyjmuje wartości mniejsze.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

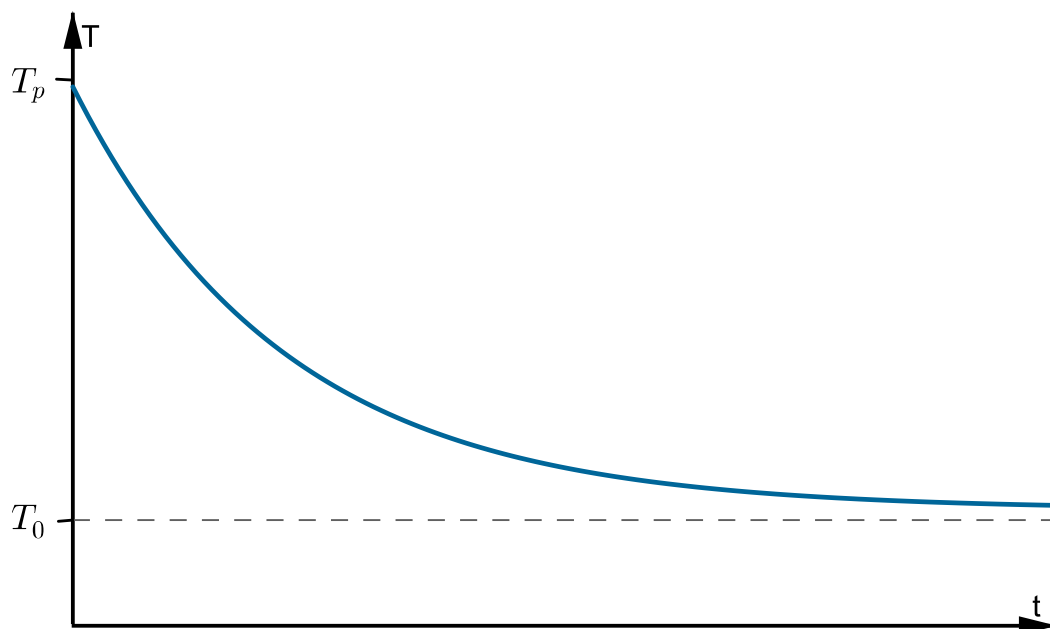
Po czasie dłuższym niż 4 godziny w organizmie pacjenta pozostanie mniej niż 32,4 g leku.

Przykład 6

Jeżeli umieścimy przedmiot w stałej temperaturze otoczenia, niższej od jego temperatury, to przedmiot ten będzie stygł aż do osiągnięcia temperatury otoczenia. Temperaturę po określonym czasie obliczymy za pomocą wzoru

$$T(t) = T_0 + (T_p - T_0)a^{-t}$$

T_0 to temperatura otoczenia, T_p to temperatura początkowa przedmiotu, a jest stałą charakterystyczną dla danego przedmiotu.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Zagotowaliśmy wodę do temperatury 100°C , a następnie umieściliśmy w pomieszczeniu o temperaturze 25°C . Po 10 minutach zmierzylśmy temperaturę wody i okazało się, że wynosi ona 70°C . Jaką temperaturę będzie miała woda po następnych 10 minutach?

Temperaturę wody po 10 minutach opisuje wzór:

$$T(10) = 25^{\circ} + (100^{\circ} - 25^{\circ}) \cdot a^{-10} = 70^{\circ}$$

stąd:

$$75^{\circ} \cdot a^{-10} = 45^{\circ}.$$

Otrzymujemy więc $a^{-10} = 0,6$. Stąd $a^{10} = \frac{1}{0,6} \approx 1,67$, a więc $a = \sqrt[10]{1,67} \approx 1,053$.

Po następnych 10 minutach, czyli po 20 minutach od zagotowania wody jej temperatura będzie równa:

$$\begin{aligned} T(20) &\approx 25^{\circ} + 75^{\circ} \cdot 1,053^{-20} = \\ &= 25^{\circ} + 75^{\circ} \cdot 0,356 = \\ &= 25^{\circ} + 27^{\circ} = 52^{\circ} \end{aligned}$$

Przykład 7

Przykładem zastosowania funkcji wykładniczej w medycynie jest zanik monochromatycznej wiązki promieniowania rentgenowskiego przy przechodzeniu przez materię. W tym przypadku natężenie promieniowania I przy przejściu przez ciało grubości x dane jest wzorem:

$$I(x) = I_0 e^{-kx}$$

gdzie

I_0 – natężenie wychodzące z lampy rentgenowskiej,

k – liniowy współczynnik pochłaniania promieniowania w materii,

x – grubość warstwy pochłaniającej.

e – liczba niewymierna, $e \approx 2,718$.

Jednostką liniowego współczynnika pochłaniania (absorpcji) jest $\left[\frac{1}{\text{m}}\right]$.

Ćwiczenie 1



Kolonia bakterii składała się z 500 organizmów. Po każdej godzinie liczba bakterii rośnie o 20%. Ile bakterii będzie po 3 godzinach? Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐ 968

☐ 864

☐ 800

☐ 1500

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 2



Na początku obserwacji kolonia liczyła 500, a na końcu 845 bakterii. O ile procent przyrastała liczba bakterii w ciągu godziny, jeżeli liczba bakterii przyrasta w tempie wykładniczym, czyli według wzoru $L(t) = L(0) \cdot a^t$, a eksperyment trwał 2 godziny? Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐ 25%

☐ 30%

☐ 37%

☐ 43%

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 3



Na początku obserwacji kolonia liczyła 1000 bakterii. Po 5 godzinach liczba ta wzrosła do 1800. Ile osobników będzie liczyła kolonia po 20 godzinach w zaokrągleniu do tysięcy? Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐ 18000

☐ 14000

☐ 10000

☐ 6000

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 4



W pewnej kolonii liczba bakterii zwiększa się co godzinę o 25%. W której godzinie liczba ta uległa podwojeniu? Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐ W 2 godzinie.

☐ W 3 godzinie.

☐ W 4 godzinie.

☐ W 5 godzinie.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 5



W pewnej miejscowości mieszkało 1400 osób. Miejscowość rozwija się pręźnie, tak że każdego roku liczba ta zwiększa się o 10%. Po ilu latach liczba mieszkańców przekroczy 2000? Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐ Po 5 latach.

☐ Po 2 latach.

☐ Po 4 latach.

☐ Po 3 latach.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 6



W pewnej kolonii bakterii po 4 godzinach od rozpoczęcia doświadczenia liczba organizmów była równa 7500, a po 6 godzinach była już równa 37500. Wiedząc, że liczba bakterii przyrastała w sposób wykładniczy oblicz, ile bakterii było na początku doświadczenia oraz ile po 12 godzinach. Uzupełnij poniższe zdanie, wpisując w luki odpowiednie liczby.

Na początku było bakterii, natomiast po 12 godzinach .

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 7



Dla uranu ^{235}U czas połowicznego rozpadu wynosi 713 milionów lat. Ile lat potrzeba, żeby z 1 g pierwiastka pozostało nie więcej niż 0,125 g? Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐ 1827 milionów lat

☐ 1935 milionów lat

☐ 2038 milionów lat

☐ 2139 milionów lat

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 8



Po upływie 15 dni z początkowej próbki o masie 2 g pozostanie 0,25 g bizmutu ^{210}Bi . Jaki jest czas połowicznego rozpadu tego pierwiastka? Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐ $T = 7,5$ dnia

☐ $T = 10$ dni

☐ $T = 5$ dni

☐ $T = 2,5$ dnia

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 9



W próbce znajduje się 0,05 g izotopu wapnia. Jaka masa izotopu była 3 lata wcześniej, jeżeli okres połowicznego rozpadu dla wapnia wynosi 6 miesięcy? Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐ 0,3 g

☐ 3,6 g

☐ 3,2 g

☐ 3,0 g

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 10



Ile wynosi okres połowicznego rozpadu kobaltu, jeżeli wiadomo, że podczas doświadczenia, które trwało 20 lat, z próbki ważącej 40 g pozostało 2,5 g tego pierwiastka? Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐ 8 lat

☐ 7 lat

☐ 5 lat

☐ 6 lat

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 11



W pewnej kości zawartość węgla $C - 14$ jest mniejsza o 75% od zawartości w atmosferze. Ile wynosi wiek znaleziska? Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐ 13730 lat

☐ 10860 lat

☐ 11460 lat

☐ 12340 lat

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 12



Określ wiek znaleziska archeologicznego, wiedząc, że jeden atom węgla $C - 14$ przypada na $16 \cdot 10^{12}$ atomów węgla $C - 12$. Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐ 22540 lat

☐ 24820 lat

☐ 22920 lat

☐ 20780 lat

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 13



Jaki procent węgla $C-14$ pozostał w znalezisku archeologicznym, które ma 15000 lat? Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐ 18%

☐ 16%

☐ 20%

☐ 15%

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 14



Pewien płyn podgrzano do temperatury 80°C , a następnie odstawiono do pomieszczenia o temperaturze 25°C , żeby wystygł. Po 15 minutach temperatura płynu wynosiła 60°C . Jaka temperaturę miał płyn po godzinie od podgrzania? Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐ około 40°C

☐ około 28°C

☐ około 0°C

☐ około 34°C

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.