



Funkcja rosnąca

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Animacja
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela



Jakie funkcje nazywamy rosnącymi?

Czy funkcja może być rosnąca w całej swojej dziedzinie?

Czy funkcja może być rosnąca tylko w przedziale, czy też w sumie przedziałów?

Odpowiedzi na te pytania uzyskasz po uważnej analizie poniższego materiału.

Twoje cele

- Rozpoznasz funkcję rosnącą na podstawie wykresu.
- Sprawdzisz, czy funkcja jest rosnąca.
- Uzasadnisz, że funkcja jest rosnąca.

Przeczytaj

Definicja: Funkcja rosnąca

Funkcja liczbową $f : X \rightarrow Y$ jest funkcją rosnącą w zbiorze A , $A \subset X$, wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych argumentów x_1, x_2 , należących do zbioru A , z nierówności $x_1 < x_2$ wynika nierówność:

$$f(x_1) < f(x_2)$$

Funkcję, która jest rosnąca w całej swojej dziedzinie, nazywamy funkcją rosnącą.

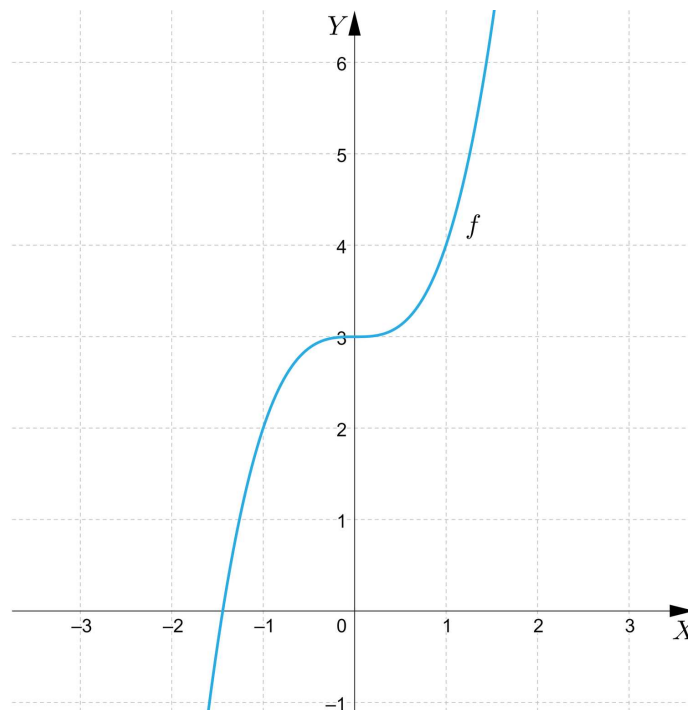
Definicję funkcji rosnącej możemy również zapisać następująco:

Funkcja liczbową $f : X \rightarrow Y$ jest funkcją rosnącą w zbiorze $A \subset X$, jeśli wraz ze wzrostem argumentów należących do zbioru A rosną wartości tej funkcji.

Poniższe przykłady pokażą nam sposoby sprawdzania, czy podana funkcja jest rosnąca.

Przykład 1

Funkcja f opisana jest za pomocą wykresu.



Pokażemy, że funkcja f jest funkcją rosnącą.

Rozwiązanie:

Obserwując wykres funkcji zauważamy, że wraz ze wzrostem argumentów rosną też wartości funkcji f .

Odczytajmy z wykresu wartości funkcji dla argumentów: $(-2), 1$: $f(-2) = -5$; $f(1) = 4$.

Z nierówności $-2 < 1$ wynika nierówność $f(-2) < f(1)$.

Możemy wybrać inną parę argumentów, np. (-1) i 0 i podobnie odczytać z wykresu wartości funkcji: $f(-1) = 2$; $f(0) = 3$

Z nierówności $-1 < 0$ wynika nierówność $f(-1) < f(0)$.

Na podstawie przedstawionego fragmentu wykresu funkcji możemy przypuszczać, że funkcja f jest **funkcją rosnącą**.

Przykład 2

Funkcja f opisana jest za pomocą zbioru par uporządkowanych.

$\{(-5, -2), (-4, -1), (-3, 0), (-2, 3), (1, 5), (2, 8)\}$

Określimy, czy funkcja f jest funkcją rosnącą.

Rozwiązanie:

Z nierówności $-5 < -4$ wynika nierówność $(f(-5) = -2) < (f(-4) = -1)$.

Z nierówności $-3 < 2$ wynika nierówność $(f(-3) = 0) < (f(2) = 8)$.

Analizując zbiór par uporządkowanych zauważamy, że dla każdej pary argumentów większej wartości argumentu odpowiada większa wartość funkcji.

Stąd wniosek, że funkcja f jest funkcją rosnącą.

Przykład 3

Funkcja f opisana jest za pomocą tabelki.

x	-4	-2	0	1	3	5
$f(x)$	-8	-6	-4	-2	0	3

Określimy, czy funkcja f jest **funkcją rosnącą**.

Rozwiązanie:

Analizując tabelkę opisującą funkcję f zauważamy, że im większy jest argument funkcji tym większa jest jej wartość.

Stąd wniosek, że funkcja f jest funkcją rosnącą.

Przykład 4

Funkcja f opisana jest za pomocą wzoru.

$$f(x) = 3x - 5 \text{ dla } x \in \mathbb{R}.$$

Korzystając z definicji wykażemy, że funkcja f jest rosnąca.

Rozwiązanie:

Założenie: $f(x) = 3x - 5$, $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ oraz $x_1 < x_2$

Teza: $f(x_1) < f(x_2)$

Dowód:

Obliczamy wartości funkcji f dla argumentów x_1 i x_2 .

$$f(x_1) = 3x_1 - 5$$

$$f(x_2) = 3x_2 - 5$$

Obliczamy różnicę wartości funkcji: $f(x_1) - f(x_2)$

$$\begin{aligned} f(x_1) - f(x_2) &= (3x_1 - 5) - (3x_2 - 5) = 3x_1 - 5 - 3x_2 + 5 = \\ &= 3x_1 - 3x_2 = 3 \cdot (x_1 - x_2) \end{aligned}$$

Na podstawie założeń ustalimy znak otrzymanego iloczynu.

$x_1 - x_2 < 0$, bo z założenia $x_1 < x_2$.

Zatem iloczyn $3 \cdot (x_1 - x_2) < 0$.

Stąd $f(x_1) - f(x_2) < 0$.

Dla dowolnych dwóch liczb $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ z nierówności $x_1 < x_2$ wynika nierówność $f(x_1) < f(x_2)$.

Stąd wniosek, że funkcja f jest rosnąca w zbiorze \mathbb{R} .

Przykład 5

Funkcja f opisana jest za pomocą wzoru.

a) $f(x) = -\frac{3}{x}$, gdy $x \in (-\infty, 0)$,

b) $f(x) = -\frac{3}{x}$, gdy $x \in (0, \infty)$,

c) $f(x) = -\frac{3}{x}$, gdy $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Sprawdzimy, czy funkcja jest rosnąca.

Rozwiązanie:

Ad. a)

Założenie: $f(x) = -\frac{3}{x}$, $x_1, x_2 \in (-\infty, 0)$ oraz $x_1 < x_2$

Teza: $f(x_1) < f(x_2)$

Dowód:

Obliczamy wartości funkcji f dla argumentów x_1 i x_2 .

$$f(x_1) = -\frac{3}{x_1}$$

$$f(x_2) = -\frac{3}{x_2}$$

Obliczamy różnicę wartości funkcji: $f(x_1) - f(x_2)$

$$f(x_1) - f(x_2) = -\frac{3}{x_1} - \left(-\frac{3}{x_2}\right) = -\frac{3}{x_1} + \frac{3}{x_2} = \frac{3x_1 - 3x_2}{x_1 \cdot x_2} = \frac{3 \cdot (x_1 - x_2)}{x_1 \cdot x_2}$$

Ustalamy znak otrzymanego ilorazu na podstawie założeń:

- $x_1 - x_2 < 0$, bo z założenia $x_1 < x_2$,
- $x_1 \cdot x_2 > 0$, ponieważ z założenia wiadomo, że $x_1 < 0$ oraz $x_2 < 0$.

Zatem $\frac{3 \cdot (x_1 - x_2)}{x_1 \cdot x_2} < 0$, stąd $f(x_1) < f(x_2)$.

Dla dowolnych dwóch liczb x_1, x_2 należących do przedziału $(-\infty, 0)$ z nierówności $x_1 < x_2$ wynika nierówność $f(x_1) < f(x_2)$.

Zatem funkcja f jest rosnąca w przedziale $(-\infty, 0)$.

Ad. b)

Założenie: $f(x) = -\frac{3}{x}$, $x_1, x_2 \in (0, \infty)$ oraz $x_1 < x_2$

Teza: $f(x_1) < f(x_2)$

Dowód:

Obliczamy wartości funkcji f dla argumentów x_1 i x_2 .

$$f(x_1) = -\frac{3}{x_1}$$

$$f(x_2) = -\frac{3}{x_2}$$

Obliczamy różnicę wartości funkcji: $f(x_1) - f(x_2)$

$$f(x_1) - f(x_2) = -\frac{3}{x_1} - \left(-\frac{3}{x_2}\right) = -\frac{3}{x_1} + \frac{3}{x_2} = \frac{3x_1 - 3x_2}{x_1 \cdot x_2} = \frac{3 \cdot (x_1 - x_2)}{x_1 \cdot x_2}$$

Ustalamy znak otrzymanego ilorazu na podstawie założeń:

- $x_1 - x_2 < 0$, bo z założenia $x_1 < x_2$,
- $x_1 \cdot x_2 > 0$, ponieważ z założenia wiadomo, że $x_1 > 0$ oraz $x_2 > 0$.

Zatem $\frac{3 \cdot (x_1 - x_2)}{x_1 \cdot x_2} < 0$, stąd $f(x_1) < f(x_2)$.

Dla dowolnych dwóch liczb x_1, x_2 należących do przedziału $(0, \infty)$ z nierówności $x_1 < x_2$ wynika nierówność $f(x_1) < f(x_2)$.

Zatem funkcja f jest rosnąca w przedziale $(0, \infty)$.

Ad. c)

W poprzednich podpunktach wykazaliśmy, że funkcja f jest rosnąca w przedziale $(-\infty, 0)$ oraz w przedziale $(0, \infty)$. Sprawdźmy, czy jest rosnąca w sumie przedziałów.

Weźmy dwa argumenty funkcji f należące do zbioru $\mathbb{R} \setminus \{0\}$,

$$x_1 = -3 \text{ oraz } x_2 = 3$$

i obliczmy wartości funkcji dla tych argumentów:

$$f(-3) = 1 \text{ oraz } f(3) = -1.$$

Okazuje się, że $x_1 < x_2$, ale $f(x_1) > f(x_2)$.

Stąd funkcja f nie jest rosnąca w zbiorze $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Ważne!

- Funkcja jest rosnąca, jeżeli wraz ze wzrostem argumentów rośnie wartość funkcji.
- Funkcja jest rosnąca w przedziale lub w poszczególnych przedziałach, ale nie w sumie przedziałów.

Słownik

funkcja rosnąca

funkcja jest rosnąca, jeżeli ze wzrostem argumentów rosą jej wartości

Animacja

Polecenie 1

Przeanalizuj uważnie materiał przedstawiony w animacji. Spróbuj najpierw samodzielnie rozwiązać podane przykłady, a następnie porównaj je z podanymi rozwiązaniami.

Po przeanalizowaniu przykładów przedstawionych w animacji wykonaj samodzielnie poniższe polecenia.

Trwa wczytywanie danych ..

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D7IplhN93>

Film nawiązujący do treści materiału

Polecenie 2

Funkcja f opisana jest za pomocą wzoru.

$$f(x) = \sqrt{x - 5}, \text{ gdy } x \in \langle 5, \infty \rangle.$$

Korzystając z definicji, wykaż, że jest to funkcja rosnąca.

Polecenie 3

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Ćwiczenie 2



Ćwiczenie 3



Ćwiczenie 4



Ćwiczenie 5



Ćwiczenie 6



Ćwiczenie 7



Ćwiczenie 8



Dla nauczyciela

Autor: Anna Jeżewska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Funkcje rosnące

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

V. Funkcje. Zakres podstawowy.

Uczeń:

2) oblicza wartość funkcji zadanej wzorem algebraicznym,

4) odczytuje z wykresu funkcji: dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe, przedziały monotoniczności, przedziały, w których funkcja przyjmuje wartości większe (nie mniejsze) lub mniejsze (nie większe) od danej liczby, największe i najmniejsze wartości funkcji (o ile istnieją) w danym przedziale domkniętym oraz argumenty, dla których wartości największe i najmniejsze są przez funkcję przyjmowane.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- rozpoznaje funkcje rosnące
- sprawdza, czy funkcja jest rosnąca
- uzasadnia, że funkcja jest rosnąca

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- metaplan
- dyskusja

Formy pracy:

- praca indywidualna
- praca w parach
- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami i dostępem do Internetu, słuchawki
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel podaje temat i cele lekcji oraz ustala z uczniami kryteria osiągnięcia sukcesu.
2. Uczniowie tworzą metaplan przedstawiający sposoby wyznaczania zbioru wartości funkcji opisanej za pomocą wykresu, zbioru par uporządkowanych, tabelki oraz wzoru.
3. Po zakończonej pracy umieszczają swoje przemyślenia w widocznym miejscu w sali lekcyjnej.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie samodzielnie analizują przykłady zamieszczone w sekcji „Przeczytaj”.
2. Po upływie wyznaczonego czasu łączą się w pary i porównują między sobą uzyskane informacje. Następnie, podzieleni na dwie grupy poszukują odpowiedzi na pytania postawione w sekcji „Wprowadzenie”. Wnioski przedstawiają na forum klasy.
3. Uczniowie oglądają animację przedstawiającą przykłady sposobów sprawdzania, czy dana funkcja jest rosnąca i rozwiązują samodzielnie wskazane polecenia.
4. Uczniowie wykonują ćwiczenia interaktywne 1 – 4 i wspólnie omawiają odpowiedzi.

Faza podsumowująca:

1. Jeden z uczniów podsumowuje zajęcia, zwracając uwagę na nabyte umiejętności.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazując na mocne i słabe strony pracy uczniów.
3. Nauczyciel ocenia indywidualną pracę i zaangażowanie poszczególnych uczniów.

Praca domowa:

1. Uczniowie rozwiązują w domu ćwiczenia 5 – 8.

2. Zadanie dla chętnych:

Funkcja f opisana jest za pomocą wzoru $f(x) = -(x - 3)^2$, gdy $x \in \mathbb{R}$. Wykaż, że funkcja f jest rosnąca w przedziale $(-\infty, 3)$.

Materiały pomocnicze:

[Monotoniczność funkcji](#)

[Funkcja i jej własności](#)

Wskazówki metodyczne:

Nauczyciel może wykorzystać animację na zajęciach podsumowujących wiadomości o funkcjach.