



Pole powierzchni stożka

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Animacja 3D
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela



Jeżeli obracamy figurę płaską względem pewnej prostej, zawartej w tej samej płaszczyźnie, to otrzymujemy bryłę obrotową. Do takich brył zaliczamy m.in. stożek. Podobnie, jak w przypadku figur płaskich rozpatrując bryły obliczamy ich pola powierzchni. W materiale omówimy, jak obliczyć pole powierzchni całkowitej stożka, jeżeli dane są pewne wielkości. Opierając się na wiedzy teoretycznej oraz omówionych przykładach, rozwiążemy ćwiczenia interaktywne.

Twoje cele

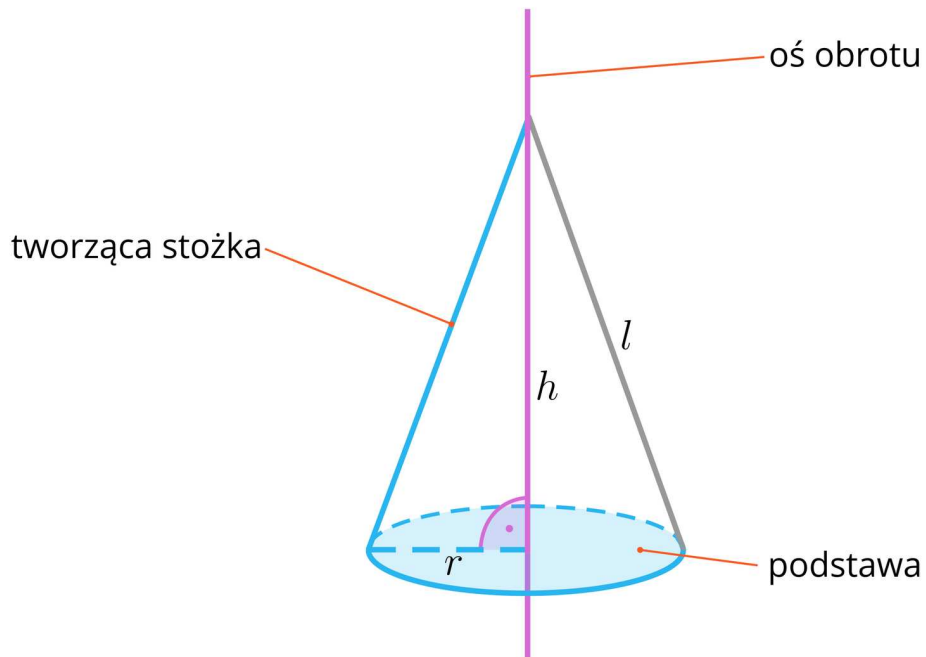
- Wyprowadzisz wzór na pole powierzchni stożka.
- Obliczysz pole powierzchni całkowitej stożka.
- Wykorzystasz wzór na pole powierzchni całkowitej stożka do rozwiązywania problemów matematycznych.

Przeczytaj

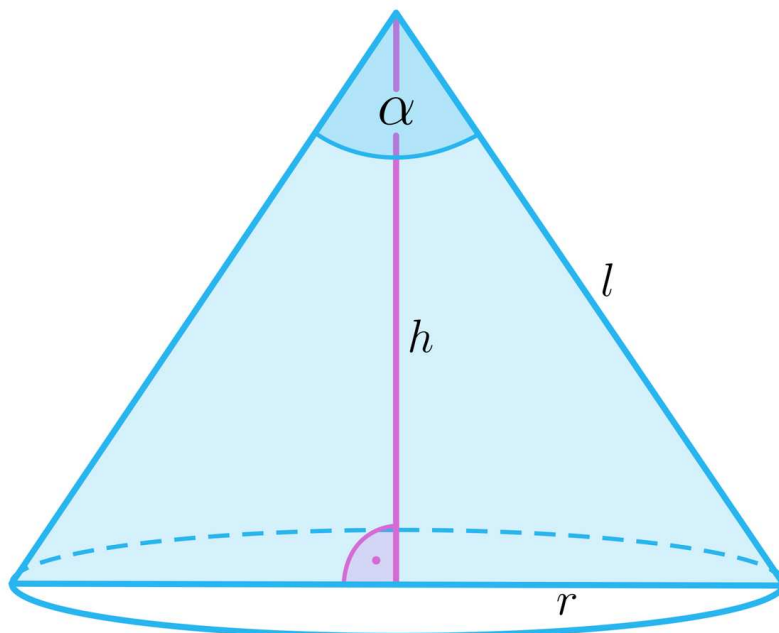
Przypomnijmy definicję stożka.

Definicja: stożek

Stożkiem nazywamy bryłę obrotową, która powstaje przez obrót trójkąta prostokątnego wokół osi, zawierającej jedną z przyprostokątnych.



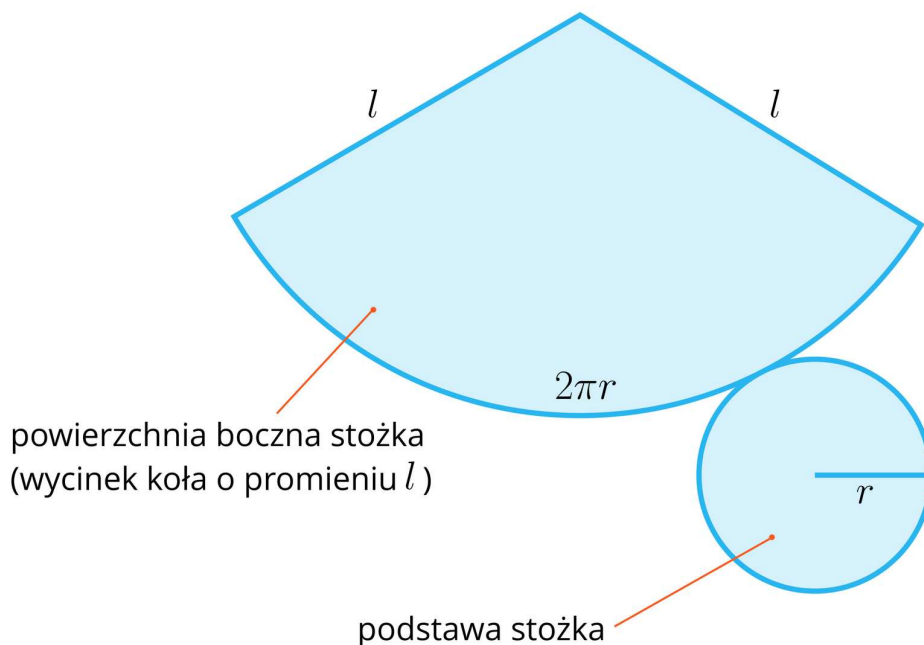
Przekrojem osiowym stożka nazywamy przekrój stożka płaszczyzną zawierającą jego oś obrotu. Jest nim trójkąt równoramienny utworzony ze średnicy podstawy stożka i dwóch tworzących.



Kąt pomiędzy ramionami przekroju osiowego (oznaczony na rysunku jako α) nazywamy kątem rozwarcia stożka.

W materiale omówimy, jak obliczyć pole powierzchni całkowitej stożka.

Pole powierzchni całkowitej stożka



Zauważmy, że podstawa stożka jest kołem o promieniu r , a powierzchnia boczna stożka jest wycinkiem koła o promieniu l .

Pole powierzchni całkowitej stożka jest równe sumie pola powierzchni jego podstawy oraz powierzchni bocznej.

Zatem:

$$P_c = P_p + P_b.$$

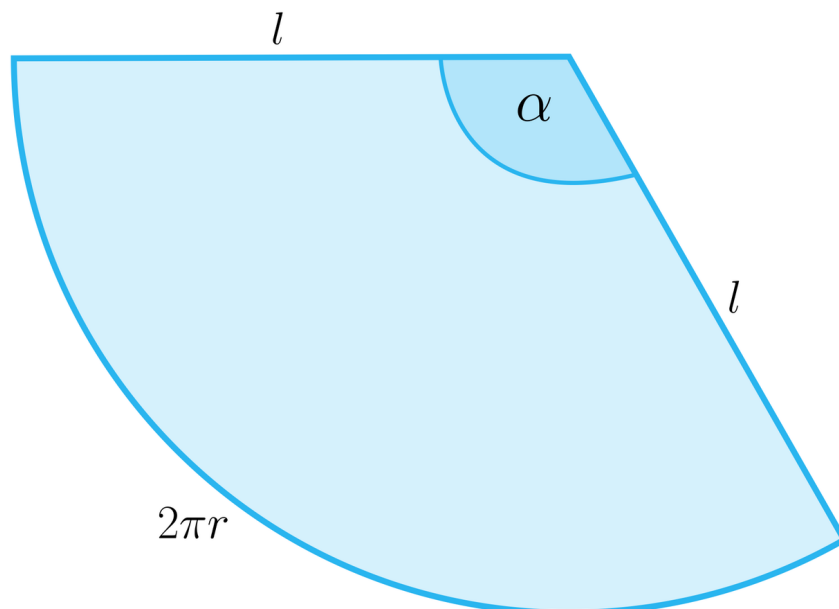
Jeżeli promień podstawy stożka ma długość r , wysokość stożka h , a tworząca ma długość l , to:

$$P_c = \pi r^2 + \pi r l = \pi r(r + l).$$

Ważne!

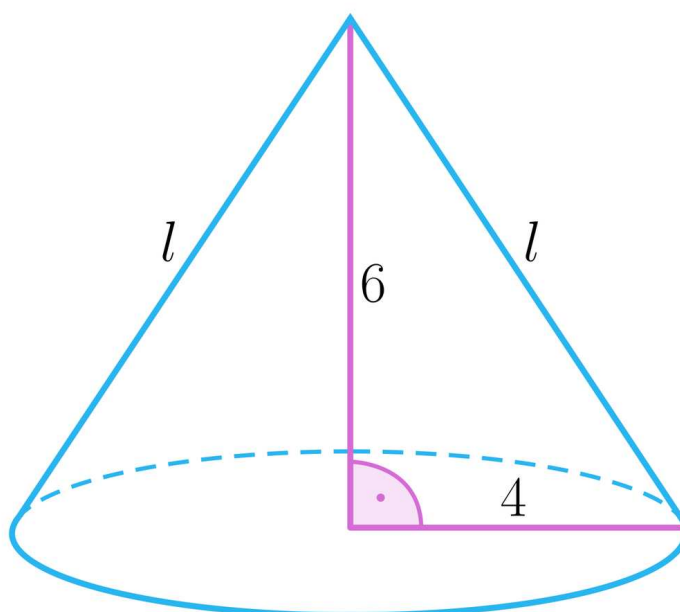
Zauważmy, że po rozwinięciu **powierzchnia boczna stożka** jest wycinkiem koła o promieniu l , zatem jej pole możemy obliczyć ze wzoru:

$$P_b = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi \cdot l^2.$$



Przykład 1

Obliczmy pole powierzchni całkowitej stożka z rysunku.



Rozwiązanie

Jeżeli przez r oznaczymy długość promienia podstawy stożka, a przez h długość wysokości stożka, to:

$$r = 4 \text{ oraz } h = 6.$$

Długość tworzącej stożka obliczamy z twierdzenia Pitagorasa:

$$r^2 + h^2 = l^2$$

$$4^2 + 6^2 = l^2$$

$$16 + 36 = l^2, \text{ czyli } l^2 = 52.$$

$$\text{Zatem } l = 2\sqrt{13}.$$

Wobec tego pole powierzchni całkowitej stożka jest równe:

$$P_c = \pi \cdot r^2 + \pi \cdot r \cdot l$$

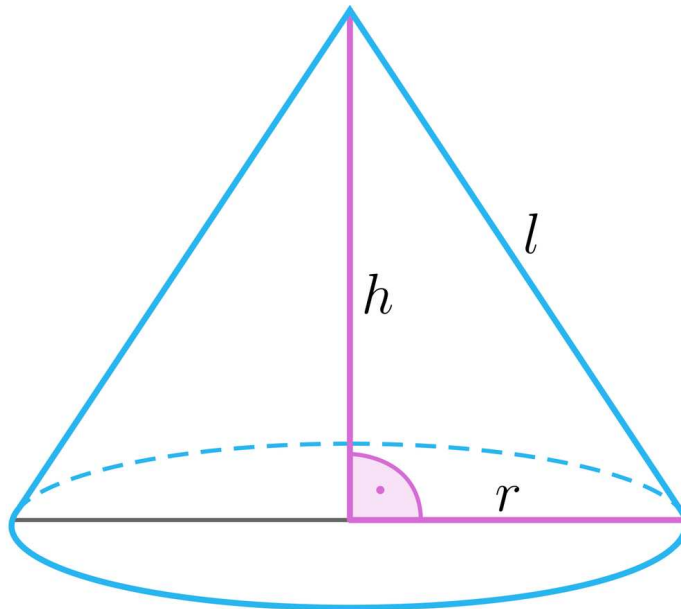
$$P_c = \pi \cdot 4^2 + \pi \cdot 4 \cdot 2\sqrt{13} = 16\pi + 8\sqrt{13}\pi.$$

Przykład 2

Wiadomo, że pole powierzchni podstawy stożka jest równe 16π , a pole powierzchni całkowitej wynosi 36π . Obliczymy długość tworzącej w tym stożku.

Rozwiązanie

Narysujmy stożek i wprowadźmy oznaczenia, jak na rysunku.



Ponieważ pole podstawy stożka wynosi 16π , zatem do obliczenia długości promienia podstawy rozwiązujemy równanie:

$$16\pi = \pi r^2$$

$$16 = r^2.$$

Wobec tego $r = 4$.

Zauważmy, że pole powierzchni bocznej stożka obliczamy ze wzoru:

$$P_b = P_c - P_p$$

$$P_b = 36\pi - 16\pi = 20\pi.$$

Ponieważ $P_b = \pi r l$, zatem do wyznaczenia długości tworzącej stożka rozwiązujemy równanie:

$$20\pi = \pi \cdot 4 \cdot l, \text{ czyli } l = 5.$$

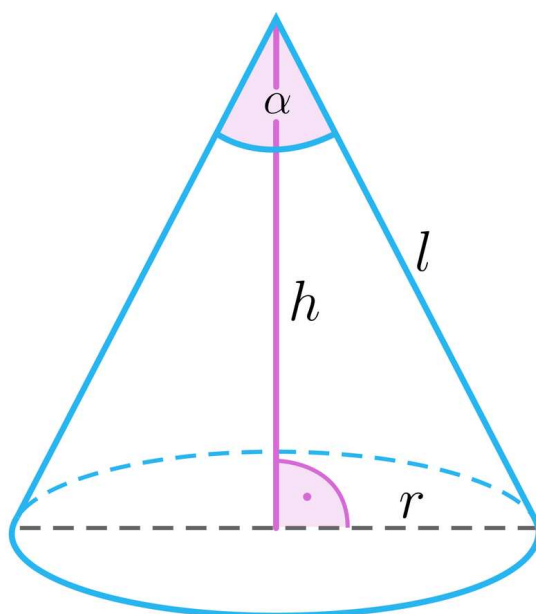
Tworząca stożka ma długość 5.

Przykład 3

Obliczymy pole powierzchni całkowitej stożka, w którym cosinus kąta rozwarcia wynosi $\frac{1}{3}$, a tworząca stożka ma długość 6.

Rozwiązanie

Narysujmy stożek i wprowadźmy odpowiednie oznaczenia.



Z zadania wynika, że długość tworzącej $l = 6$ oraz $\cos \alpha = \frac{1}{3}$.

Do wyznaczenia długości promienia r podstawy stożka wykorzystamy twierdzenie cosinusów.

Zatem

$$(2r)^2 = 6^2 + 6^2 - 2 \cdot 6 \cdot 6 \cdot \frac{1}{3}$$

$$4r^2 = 36 + 36 - 24$$

$$4r^2 = 48$$

$$r^2 = 12$$

$$r = 2\sqrt{3}.$$

Pole powierzchni całkowitej tego stożka jest równe:

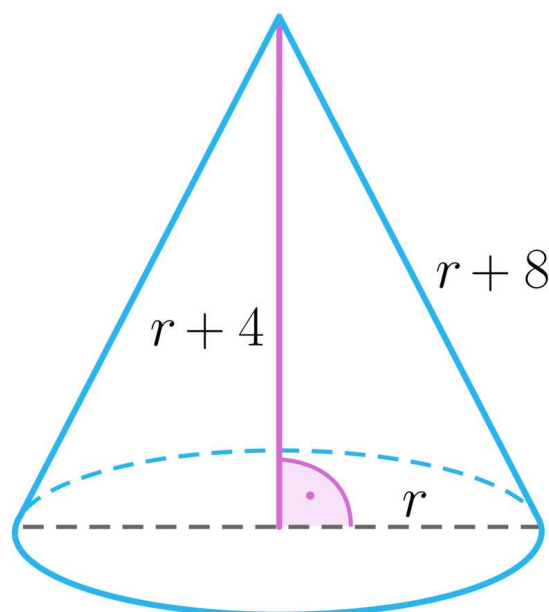
$$P_c = \pi \cdot (2\sqrt{3})^2 + \pi \cdot 2\sqrt{3} \cdot 6 = 12\pi + 12\sqrt{3}\pi.$$

Przykład 4

Długości promienia podstawy, wysokości oraz tworzącej stożka w pewnym stożku są w podanej kolejności wyrazami ciągu arytmetycznego o różnicy 4. Obliczmy pole powierzchni całkowitej tego stożka.

Rozwiązanie

Narysujmy stożek i wprowadźmy odpowiednie oznaczenia.



Ponieważ podstawa, wysokość oraz tworząca stożka tworzą trójkąt prostokątny, zatem do wyznaczenia wartości r rozwiązujemy równanie:

$$r^2 + (r + 4)^2 = (r + 8)^2$$

$$r^2 + r^2 + 8r + 16 = r^2 + 16r + 64$$

$$r^2 - 8r - 48 = 0$$

Zatem $r = 12$.

Wobec tego długość tworzącej wynosi $r + 8 = 20$.

Pole powierzchni całkowitej tego stożka wynosi:

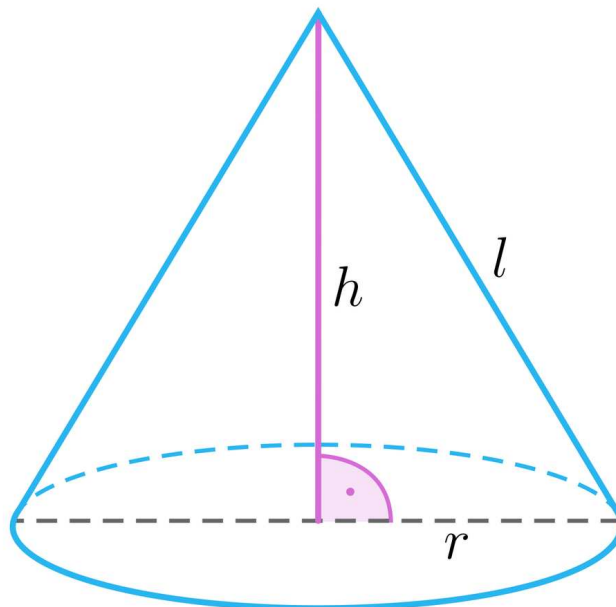
$$P_c = \pi \cdot 12^2 + \pi \cdot 12 \cdot 20 = 144\pi + 240\pi = 384\pi.$$

Przykład 5

Przekrój osiowy stożka jest trójkątem równobocznym o polu $3\sqrt{3}$. Wyznamy pole powierzchni całkowitej tego stożka.

Rozwiązanie

Narysujmy stożek i wprowadźmy odpowiednie oznaczenia:



Ponieważ przekrój osiowy stożka jest trójkątem równobocznym to $l = 2r$.

Z faktu, że pole przekroju osiowego stożka wynosi $3\sqrt{3}$ wynika równanie:

$$3\sqrt{3} = \frac{l^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$$

$$l^2 = 12, \text{ czyli } l = 2\sqrt{3}.$$

$$\text{Zatem } r = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} = \sqrt{3}.$$

Pole powierzchni całkowitej tego stożka wynosi:

$$P_c = \pi \cdot (\sqrt{3})^2 + \pi \cdot \sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} = 3\pi + 6\pi = 9\pi.$$

Słownik

powierzchnia boczna stożka

powierzchnia zakreślona przez przeciwprostokątną trójkąta prostokątnego podczas obrotu

pole powierzchni

miara przyporządkowująca powierzchni pewną nieujemną liczbę, która określa jej rozmiar

Animacja 3D

Polecenie 1

Obejrzyj animację 3D, a następnie wykonaj poniższe polecenie.

Trwa wczytywanie danych...

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DYo70dUyU>

Film nawiązujący do treści materiału, prezentujący pole powierzchni stożka.

Polecenie 2

Oblicz pole powierzchni całkowitej stożka, jeżeli promień podstawy oraz wysokość są równej długości, a tworząca ma długość 8.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Ćwiczenie 2



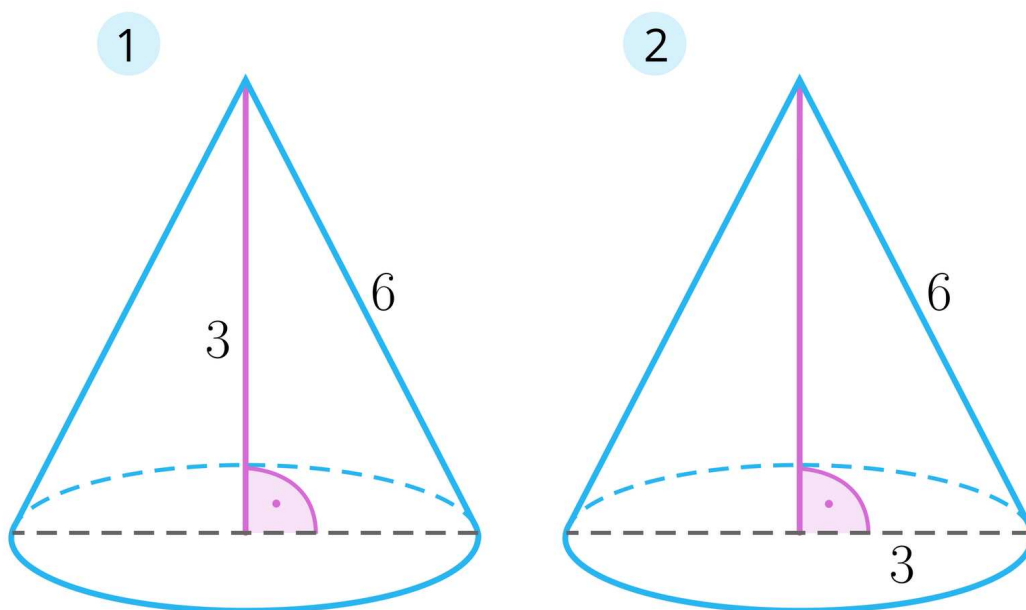
Ćwiczenie 3



Ćwiczenie 4



Na rysunkach 1 i 2 przedstawiono stożki.



Ćwiczenie 5



Ćwiczenie 6



Ćwiczenie 7



W stożku pole powierzchni bocznej jest 6 razy większe od pola podstawy. Wyznacz pole powierzchni całkowitej w zależności od promienia podstawy r .

Ćwiczenie 8



Tworząca stożka ma długość 30, a wysokość jest o 6 dłuższa od promienia podstawy.
Oblicz pole powierzchni całkowitej tego stożka.

Dla nauczyciela

Autor: Tomasz Wójtowicz

Przedmiot: Matematyka

Temat: Pole powierzchni stożka

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

X. Stereometria

Zakres podstawowy. Uczeń:

6) oblicza objętości i pola powierzchni graniastosłupów, ostrosłupów, walca, stożka i kuli, również z wykorzystaniem trygonometrii i poznanych twierdzeń;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- wyprowadza wzór na pole powierzchni stożka,
- oblicza pole powierzchni całkowitej stożka,
- podaje wzory na pole powierzchni bocznej i pole powierzchni całkowitej stożka,
- wykorzystuje wzór na pole powierzchni całkowitej stożka do rozwiązywania problemów matematycznych.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja;

- liga zadaniowa;
- metoda krokodyla;
- drzewo pomysłów.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda;
- telefony z dostępem do internetu.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Ustalenie celu lekcji i kryteriów sukcesu w temacie: „Pole powierzchni stożka”.
2. Uczniowie metodą burzy mózgów przypominają poznane pojęcia związane z tematem lekcji.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie w grupach zapoznają się z przykładami zawartymi w sekcji „Przeczytaj”. Ich zadaniem jest najpierw rozwiązanie danego zadania, a dopiero następnie porównanie jego rozwiązania. Grupy tworzą drzewa pomysłów, na których umieszczają przykłady. Po prezentacji prac grup powstaje jedno, wspólne dla całej klasy, drzewo pomysłów.
2. Uczniowie zapoznają się indywidualnie z treścią sekcji „Animacja 3D”. Zapisują ewentualne pytania dotyczące napotkanych trudności, po czym następuje dyskusja, w trakcie której nauczyciel wyjaśnia niezrozumiałe elementy z materiału.
3. Uczniowie w kolejnym kroku rozwiązują ćwiczenia nr 1 i 2 z sekcji „Sprawdź się”. Każdy z uczniów robi to samodzielnie. Po ustalonym czasie wybrani uczniowie przedstawiają rozwiązania. Nauczyciel w razie potrzeby koryguje odpowiedzi, dopowiada istotne informacje, udziela uczniom informacji zwrotnej.
4. Nauczyciel dzieli klasę na 4-osobowe grupy. Uczniowie rozwiązują ćwiczenia 3-5 na czas (od łatwiejszego do trudniejszych). Grupa, która poprawnie rozwiąże ćwiczenia jako pierwsza, wygrywa, a nauczyciel może nagrodzić uczniów ocenami za aktywność. Rozwiązania są prezentowane na forum klasy i omawiane krok po kroku.
5. Uczniowie wykonują ćwiczenia nr 6-8 z sekcji „Sprawdź się” metodą krokodyla. Krokodylem jest nauczyciel, który „czeka nieruchomo na brzegu rzeki” i „ożywia się” tylko w przypadku, gdy uczeń nie może sobie poradzić z zadaniem.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Wybrany uczeń podsumowuje zajęcia, zwracając uwagę na nabyte umiejętności, odnosząc się do wyświetlonych na tablicy interaktywnej celów z sekcji „Wprowadzenie”.

Praca domowa:

1. Zadanie dla kolegi/koleżanki. Uczniowie dobierają się w pary i opracowują zadania analogiczne do ćwiczeń 7 i 8 z sekcji „Sprawdź się”. Następnie przesyłają je do siebie mailem, rozwiązują i na następnej lekcji porównują wyniki.

Materiały pomocnicze:

- [Bryły obrotowe - stożek](#)

Wskazówki metodyczne:

- Nauczyciel może wykorzystać materiał w sekcji „Animacja 3D” do pracy przed lekcją. Uczniowie zapoznają się z jego treścią i przygotowują do pracy na zajęciach tak, aby samodzielnie rozwiązać zadania dotyczące obliczania pola powierzchni stożka.