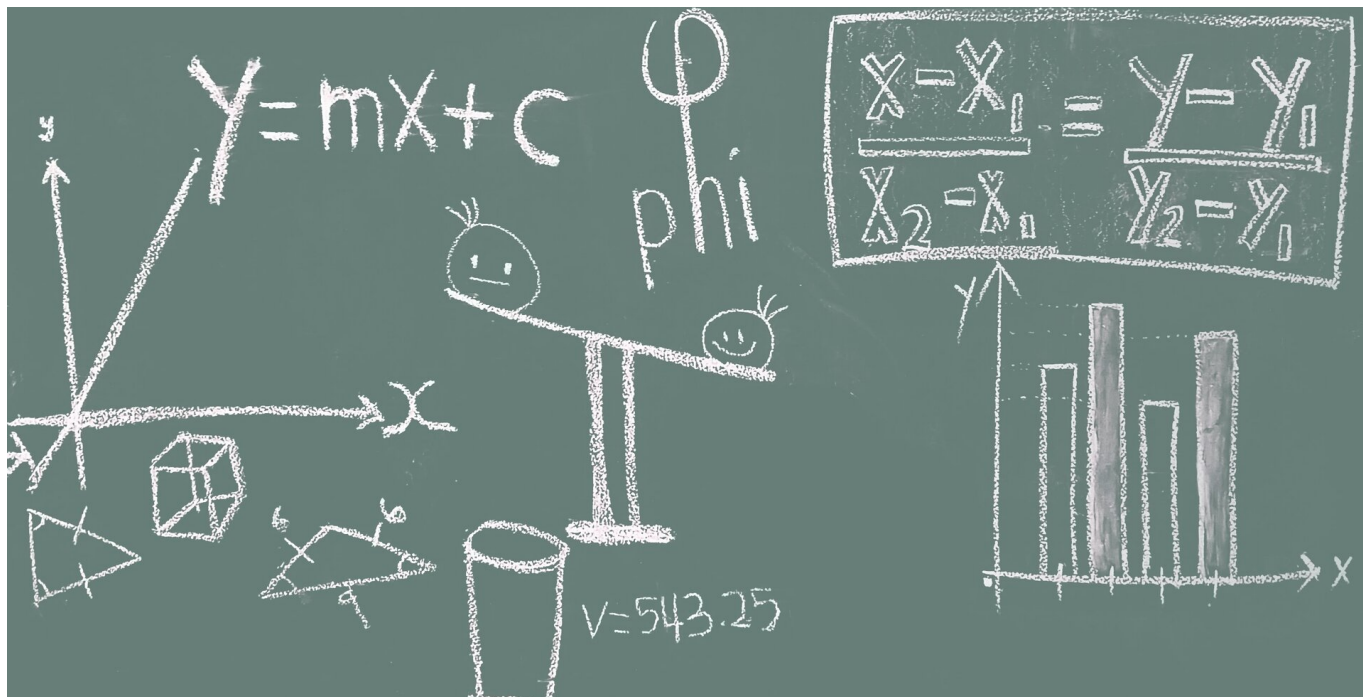




Rysowanie wykresów funkcji liniowych na podstawie danych własności tych funkcji

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Animacja](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)

Rysowanie wykresów funkcji liniowych na podstawie danych własności tych funkcji

Źródło: Joanna Kosińska, dostępny w internecie: www.unsplash.com, domena publiczna.

Wiele praw fizycznych zapisywanych jest za pomocą zależności liniowych. Sformułowane w 1929 roku przez Hubble'a prawo mówi, że prędkości oddalających się galaktyk są proporcjonalne do ich odległości od Ziemi. Zapisuje się je w formie

$$v = H \cdot r$$

gdzie:

v – prędkość oddalania się galaktyki,

r – jej odległość od Ziemi,

H – stała Hubble'a.

Z tego prawa wynika, że im dalej od nas znajduje się galaktyka, z tym większą prędkością się od nas oddala.

W tym materiale wykorzystamy poznane wiadomości o funkcji liniowej do rysowania wykresów tych funkcji.



Edwin Hubble (1889-1953), amerykański astronom

Źródło: dostępny w internecie:

<https://commons.wikimedia.org>, domena publiczna.

Twoje cele

- Naszkicujesz wykres funkcji liniowej na podstawie informacji o jej własnościach.
- Wykorzystasz wykresy funkcji liniowej do rozwiązywania zadań.
- Utrwalisz wiadomości związane z funkcją liniową.

Przeczytaj

Przypomnijmy

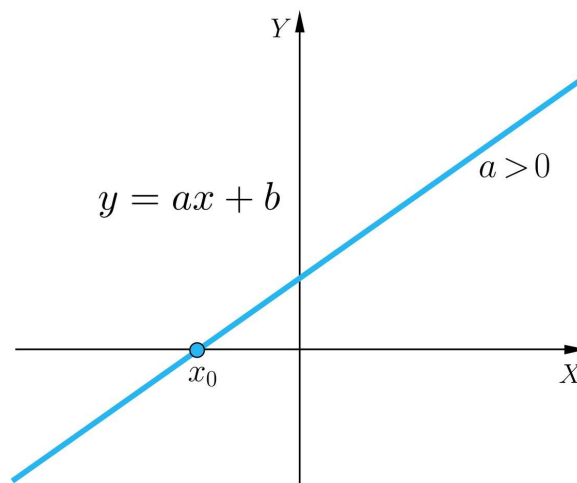
Funkcję postaci $y = ax + b$, gdzie a i b są danymi liczbami rzeczywistymi, nazywamy **funkcją liniową**, „ a ” nazywamy współczynnikiem kierunkowym, „ b ” – wyrazem wolnym.

Wykresem funkcji $y = ax + b$, gdzie $x \in \mathbb{R}$, jest prosta przecinająca oś Y w punkcie $(0, b)$ i nachylona do osi X pod takim kątem α , że $\operatorname{tg} \alpha = a$.

Wykres funkcji liniowej sporządzamy zazwyczaj tak, że znajdujemy jego punkty wspólne z osiami układu współrzędnych, a następnie prowadzimy przez nie prostą.

Dla funkcji $y = ax + b$, $a \neq 0$, są to punkty: $A = (-\frac{b}{a}, 0)$ i $B = (0, b)$.

Funkcja $y = ax + b$ jest rosnąca, $a > 0$.



$y < 0$ dla $x \in (-\infty, x_0)$, $y > 0$ dla $x \in (x_0, \infty)$.

Przykład 1

Narysujemy wykres funkcji liniowej, do wykresu której należą punkty: $M = (20, 100)$ oraz $N = (60, 300)$.

Mamy podane współrzędne dwóch punktów, ale trudno je umieścić w układzie współrzędnych, w związku z tym musimy znaleźć wzór funkcji i na jego podstawie narysować wykres szukanej funkcji.

Jeżeli punkt $M = (20, 100)$ należy do wykresu funkcji liniowej $y = ax + b$ to znaczy, że współrzędne tego punktu spełniają równanie:

$$100 = a \cdot 20 + b.$$

Jeżeli punkt $N = (60, 300)$ należy do wykresu funkcji liniowej $y = ax + b$ to znaczy, że współrzędne tego punktu spełniają równanie:

$$300 = a \cdot 60 + b$$

otrzymujemy dwa równania: $100 = 20a + b$ i $300 = 60a + b$.

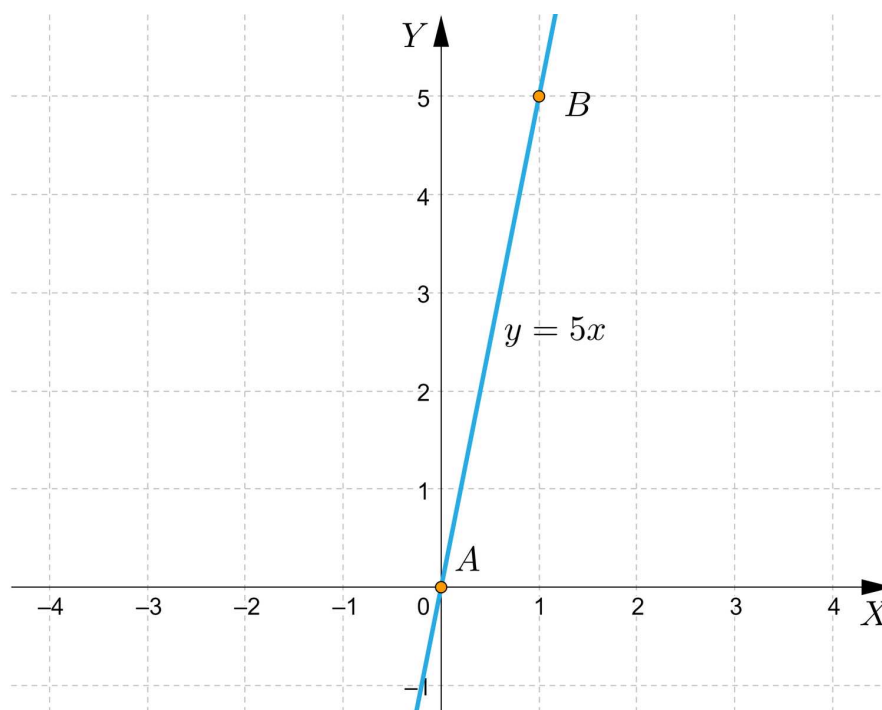
Wyznaczając „ b ” z pierwszego równania: $b = 100 - 20a$ i podstawiając do drugiego otrzymujemy:

$$300 = 60a + 100 - 20a \Rightarrow 200 = 40a \text{ stąd } a = 5$$

$$b = 100 - 20a \text{ więc } b = 100 - 100 = 0$$

$a = 5$ i $b = 0$ więc $y = 5x$ jest to prosta, której wykres przechodzi przez początek układu współrzędnych.

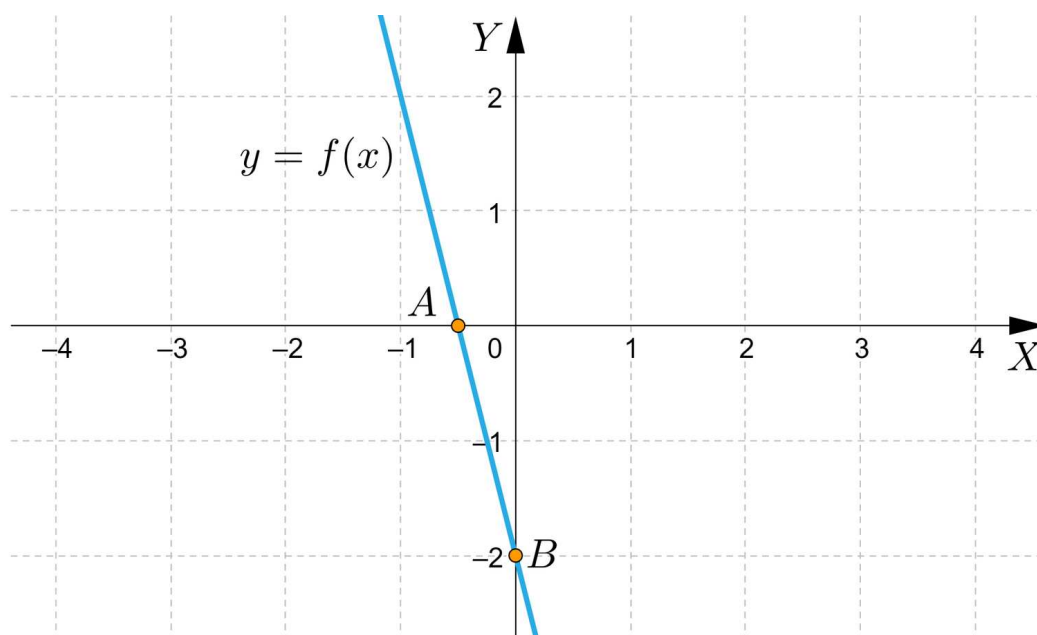
Wybieramy dwa punkty, które umożliwią nam narysowanie wykresu funkcji: $A = (0, 0)$ i $B = (1, 5)$.



Przykład 2

Narysujemy wykres funkcji liniowej mając dane jej miejsce zerowe $x_0 = -\frac{1}{2}$ i punkt $B = (0, -2)$, przez który przechodzi wykres tej funkcji.

Z treści zadania wynika, że mamy podane punkty przecięcia z osiami układu współrzędnych: $A = (-\frac{1}{2}, 0)$ i $B = (0, -2)$.



Przykład 3

Narysujemy **wykres funkcji** liniowej, wiedząc, że jest on równoległy do wykresu funkcji $y = -\frac{1}{3}x - 6$ i że przechodzi on przez punkt $P = (3, 1)$. Podamy miejsce zerowe tej funkcji a następnie obliczymy pole trójkąta ograniczonego wykresem tej funkcji i osiami układu współrzędnych.

Jeśli proste $y = ax + b$ i $y = cx + d$ są równoległe, to $a = c$.

Prosta $y = ax + b$ jest równoległa do prostej $y = -\frac{1}{3}x - 6$ więc $a = -\frac{1}{3}$.

Równanie naszej prostej przyjmuje postać: $y = -\frac{1}{3}x + b$.

Ponieważ wykres przechodzi przez punkt $P = (3, 1)$ to znaczy, że współrzędne tego punktu spełniają równanie:

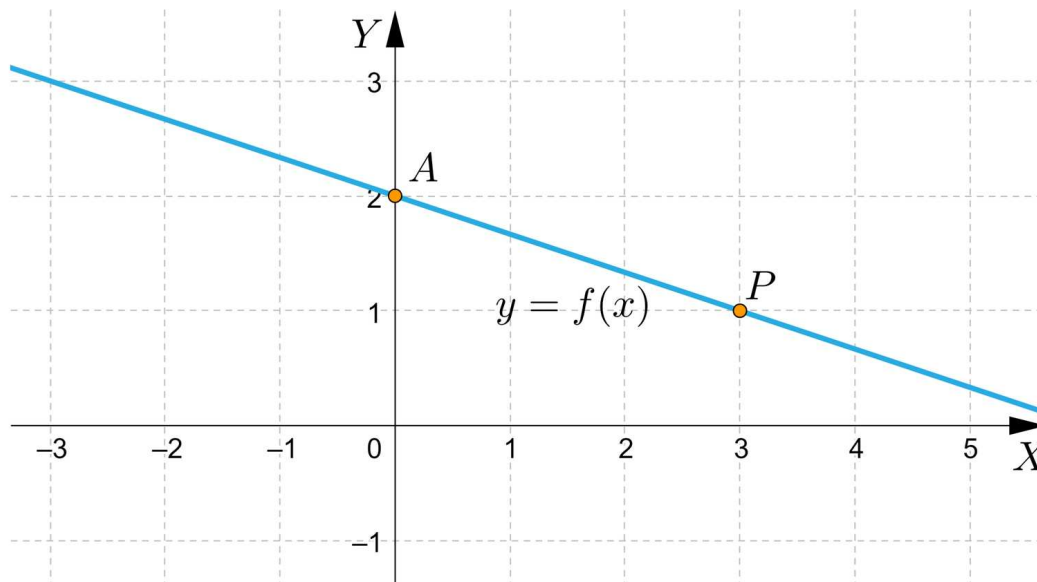
$$y = -\frac{1}{3}x + b$$

$$1 = \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot 3 + b$$

$$1 = -1 + b$$

$$b = 2$$

$b = 2$ więc mamy punkt przecięcia z osią Y : $A = (0, 2)$. Rysujemy prostą przechodzącą przez punkty $P = (3, 1)$ i $A = (0, 2)$:



Aby obliczyć pole trójkąta ograniczonego wykresem tej funkcji i osiami układu współrzędnych potrzebujemy punktu przecięcia z osią X : $(x_0, 0)$.

Miejsce zerowe funkcji możemy obliczyć ze wzoru:

$$x_0 = -\frac{b}{a} = -\frac{2}{(-\frac{1}{3})} = 6.$$

Pole powstałego trójkąta obliczamy ze wzoru:

$P = \frac{1}{2} c \cdot d$, gdzie c i d to długości przyprostokątnych otrzymanego trójkąta.

$$P = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 6 = 6.$$

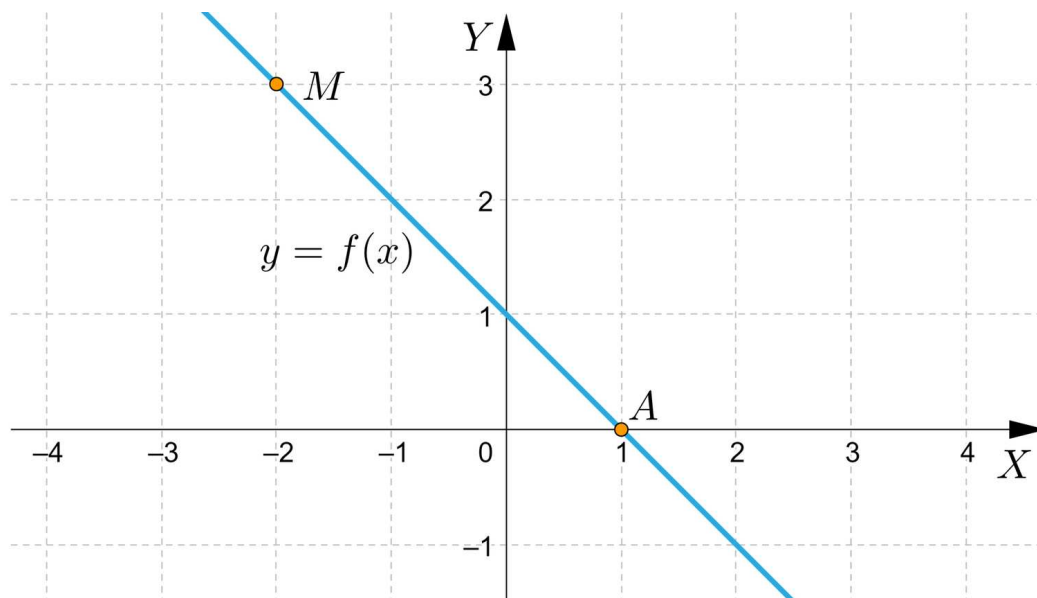
Przykład 4

Narysujemy wykres funkcji liniowej, której wykres przechodzi przez punkt $M = (-2, 3)$ i która przyjmuje wartości dodatnie tylko w przedziale $(-\infty, 1)$, zaś wartości ujemne tylko w przedziale $(1, +\infty)$.

Funkcja $y = ax + b$ przyjmuje wartości dodatnie w przedziale $(-\infty, 1)$, zaś ujemne w przedziale $(1, +\infty)$, oznacza to, że $x_0 = 1$ jest miejscem zerowym tej funkcji.

$x_0 = 1$, więc mamy punkt przecięcia z osią X : $A = (1, 0)$

Rysujemy wykres funkcji liniowej przechodzącej przez punkty $M = (-2, 3)$ i $A = (1, 0)$:



Słownik

funkcja liniowa

funkcja postaci $y = ax + b$, gdzie a i b są danymi liczbami rzeczywistymi, „ a ” nazywamy współczynnikiem kierunkowym, „ b ” – wyrazem wolnym

wykres funkcji

wykresem funkcji $y = ax + b$, $x \in \mathbb{R}$ jest prosta przecinająca oś Y w punkcie $(0, b)$ i nachylona do osi X pod takim kątem α , że $\operatorname{tg} \alpha = a$

miejsce zerowe funkcji

taki argument, dla którego wartość funkcji jest równa zero

Animacja

Polecenie 1

Zapoznaj się z animacją prezentującą rysowanie wykresów funkcji liniowej na podstawie danych własności tych funkcji. Następnie rozwiąż zadania i porównaj z odpowiedziami.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D4vsqUW5R>

Film nawiązujący do treści materiału, prezentujący sposób rysowania wykresów funkcji liniowych.

Polecenie 2

Narysuj wykres funkcji liniowej $y = ax + b$, mając dany współczynnik $a = 2$ oraz punkt $P = (-2, -2)$ należący do wykresu tej funkcji.

Polecenie 3

Narysuj wykres funkcji liniowej, której wykres przechodzi przez dany punkt $M = (-4, 2)$ i jest równoległy do wykresu funkcji $y = \frac{1}{2}x - 3$.

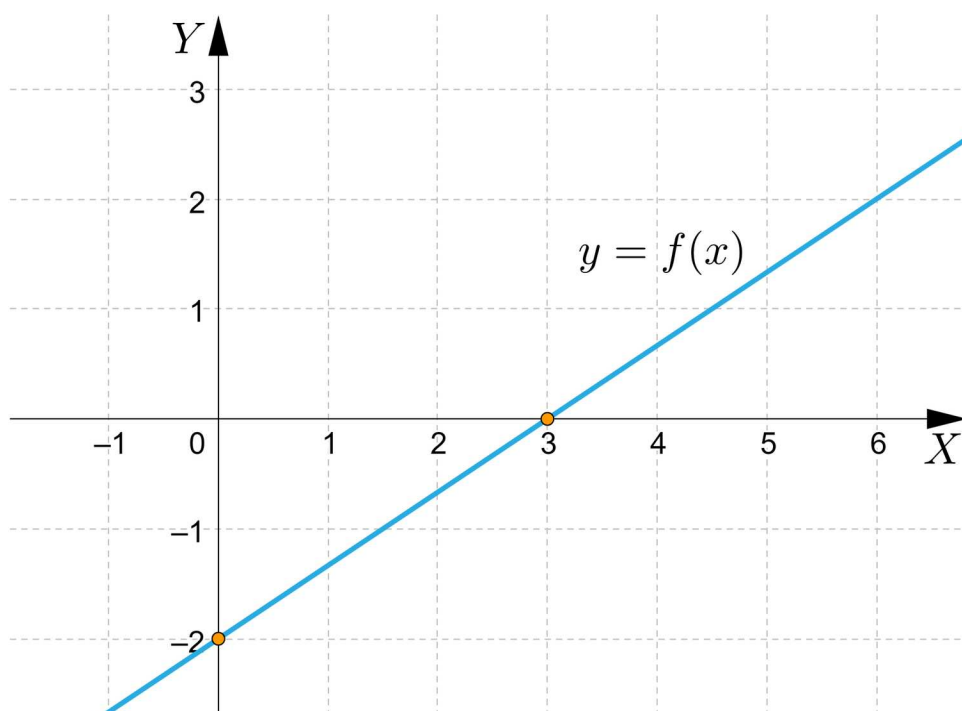
Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Zaznacz współczynnik kierunkowy funkcji, której wykres przedstawiono na rysunku.



☐ $a = \frac{2}{3}$

☐ $a = -\frac{3}{2}$

☐ $a = -\frac{2}{3}$

☐ $a = 1,5$

Ćwiczenie 2



Ćwiczenie 3



Narysuj wykres funkcji liniowej $f(x) = ax + b$, wiedząc że jest on równoległy do prostej o równaniu $y = -5x + 7$ i przechodzi przez punkt $P = (\frac{3}{5}, 2)$.

Wybierz zdania prawdziwe:

☐

Pole trójkąta ograniczonego wykresem funkcji $f(x)$ i osiami układu współrzędnych wynosi 5

☐

Wykres funkcji $f(x)$ przecina oś Y w punkcie $(0; 5)$

☐

Miejsmem zerowym tej funkcji jest $x = 1$

☐

Współczynnik kierunkowy $a = 1$

Ćwiczenie 4



Do wykresu funkcji liniowej $f(x) = ax + b$ należą punkty $A = (-3120; 6247)$ i $B = (-3115; 6237)$. Uzupełnij zdania, wpisując odpowiednie liczby.

a) Współczynnik kierunkowy $a =$

b) Współczynnik $b =$

c) $f(-1) =$

Ćwiczenie 5



Narysuj wykres funkcji liniowej $f(x) = -\frac{1}{3}x + b$, do której wykresu należy punkt $A = (-6, 3)$, a następnie wybierz zdanie prawdziwe.

☐ Wykres funkcji $f(x)$ przecina oś Y w punkcie $(0; -3)$

☐ Wykres funkcji $f(x)$ przecina oś Y w punkcie $(0; 1)$

☐ Wykres funkcji $f(x)$ przecina oś Y w punkcie $(0; -1)$

☐ Wykres funkcji $f(x)$ przecina oś Y w punkcie $(0; 3)$

Ćwiczenie 6



Narysuj wykres funkcji liniowej $f(x) = ax + 7$ jeśli $f(-210) = -623$. Oceń prawdziwość poniższych zdań.

Zdanie	Prawda	Fałsz
Współczynnik kierunkowy $a = 3$.	☐	☐
Wykres tej funkcji przecina oś X w punkcie $(3; 0)$.	☐	☐
Pole trójkąta ograniczonego wykresem funkcji $f(x)$ i osiami układu współrzędnych wynosi 6.	☐	☐

Ćwiczenie 7



Jeżeli wykres funkcji liniowej przechodzi przez punkt $A = (-3; 1)$ oraz funkcja przyjmuje dodatnie wartości tylko dla $x \in (-\infty; 5)$ wówczas jest prawdą:

☐ współczynnik kierunkowy tej funkcji to $a = -8$

☐ współczynnik kierunkowy tej funkcji to $a = -\frac{1}{8}$

☐ współczynnik kierunkowy tej funkcji to $a = \frac{1}{8}$

☐ współczynnik kierunkowy tej funkcji to $a = 8$

Ćwiczenie 8



Dana jest funkcja liniowa $f(x) = ax + b$, do której wykresu należą punkty $A = (-200\pi; 40\pi - 3)$ i $B = (300\pi; -60\pi - 3)$. Wskaż wszystkie zdania prawdziwe.

☐ Pole trójkąta ograniczonego wykresem funkcji $f(x)$ i osiami układu współrzędnych wynosi 22, 5.

☐ Miejscem zerowym funkcji $f(x)$ jest $x = -15$.

☐ Wykres tej funkcji przecina oś Y w punkcie $(0; 3)$.

☐ Funkcja ta wyraża się wzorem $y = \frac{1}{5}x - 3$.

Dla nauczyciela

Autor: Katarzyna Podfigurna

Przedmiot: Matematyka

Temat: Rysowanie wykresów funkcji liniowych na podstawie danych własności tych funkcji

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

V. Funkcje. Zakres podstawowy.

Uczeń:

2) oblicza wartość funkcji zadanej wzorem algebraicznym;

4) odczytuje z wykresu funkcji: dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe, przedziały monotoniczności, przedziały w których funkcja przyjmuje większe (nie mniejsze) lub mniejsze (nie większe) od danej liczby, najmniejsze i największe wartości funkcji (o ile istnieją) w danym przedziale domkniętym oraz argumenty, dla których wartości największe i najmniejsze są przez funkcję przyjmowane;

5) interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji liniowej;

6) wyznacza wzór funkcji liniowej na podstawie informacji o jej wykresie lub o jej własnościach;

11) wykorzystuje własności funkcji liniowej i kwadratowej do interpretacji zagadnień geometrycznych, fizycznych i itp., także osadzonych w kontekście praktycznym.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- sporządza wykres funkcji liniowej, której wykres przechodzi przez dane dwa punkty
- sporządza wykres funkcji liniowej, której wykres jest równoległy do wykresu innej funkcji o znanym wzorze
- oblicza miejsca zerowe funkcji liniowej
- sporządza wykres funkcji liniowej
- interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji liniowej
- wyznacza argument dla danej wartości funkcji i odwrotnie
- analizuje zadania oraz dokonuje wyboru najefektywniejszej metody prowadzącej do ich rozwiązania

Strategie nauczania:

- konstruktywizm
- konektywizm

Metody i techniki nauczania:

- wykład informacyjny
- burza mózgów
- pokaz multimedialny

Formy pracy:

- praca indywidualna
- praca całego zespołu

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu
- tablica interaktywna/rzutnik multimedialny

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Uczniowie przypominają definicję funkcji liniowej.
2. Uczniowie określają własności funkcji liniowej.
3. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie otrzymują zadanie polegające na analizie materiału zawartego w sekcji „Przeczytaj”.
2. Uczniowie analizują przykłady zawarte w sekcji „Przeczytaj”.

3. Nauczyciel kontroluje pracę uczniów udzielając im wskazówek.
4. Nauczyciel prezentuje animację i omawia ją wraz z uczniami.
5. Uczniowie samodzielnie rozwiązują zadania pod animacją.
6. Uczniowie rozwiązują ćwiczenia 1-5 z sekcji Sprawdź się.
7. Nauczyciel kontroluje pracę uczniów udzielając im wskazówek.

Faza podsumowująca:

1. Wybrani uczniowie prezentują rozwiązania ćwiczeń interaktywnych wskazanych przez nauczyciela.
2. Uczniowie określają co było dla nich trudne lub niezrozumiałe a nauczyciel udziela wyjaśnień.
3. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, ocenia aktywność uczniów.

Praca domowa:

Zadaniem uczniów jest rozwiązanie ćwiczeń 6-8 z sekcji Sprawdź się.

Materiały pomocnicze:

- [Definicja funkcji liniowej](#)
- [Współczynnik kierunkowy funkcji liniowej](#)
- [Funkcja liniowa rosnąca, funkcja liniowa malejąca](#)
- [Funkcja - zadania](#)
- [Funkcja - zadania generatorowe](#)

Wskazówki metodyczne:

Uczniowie mogą przeanalizować materiały zawarte w sekcji „Przeczytaj” i animacji jako pracę własną przed lekcją. Umożliwi im to wystąpienie na zajęciach w roli ekspertów.

Animację można wykorzystać na lekcji poświęconej wyznaczaniu własności funkcji liniowej.