



Własności ciągów zbieżnych

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Animacja](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Własności ciągów zbieżnych

Źródło: Michael Dziedzic, dostępny w internecie: unplash.com, domena publiczna.

O ciągach nieskończonych możemy powiedzieć, że są zbieżne (co oznacza, że posiadają granicę skończoną) oraz ograniczone (co oznacza, że wszystkie wyrazy należą do przedziału o skończonych krańcach). Okazuje się, że istnieje związek pomiędzy tymi pojęciami. W temacie tym omówimy ten związek oraz poznamy inne ciekawe własności ciągów zbieżnych. Odpowiemy m. in. na pytanie ile granic może posiadać ciąg.

Twoje cele

- Dowiesz się czy zmiana skończonej ilości wyrazów ciągu nieskończonego może mieć wpływ na jego granicę
- Zrozumiesz związek pomiędzy ciągiem zbieżnym i ograniczonym.
- Dowiesz się ile granic może posiadać ciąg nieskończony.

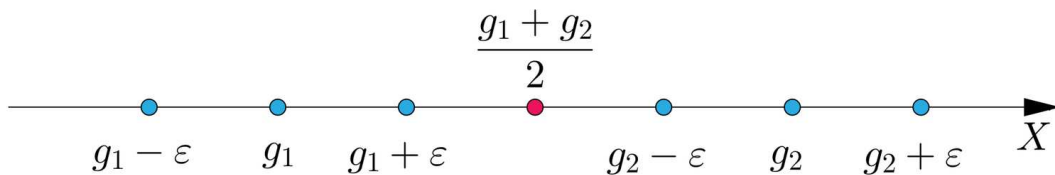
Przeczytaj

Ile granic może posiadać ciąg?

Przypomnijmy, że liczba g jest granicą ciągu, jeśli w dowolnym jej **otoczeniu** znajdują się **prawie wszystkie wyrazy** tego ciągu. Zastanówmy się czy możliwe jest, aby nieskończony ciąg posiadał dwie różne granice. Przypuśćmy, że taki ciąg istnieje, tzn. że istnieje ciąg (a_n) taki, że

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = g_1 \quad , \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = g_2,$$

oraz $g_1 \neq g_2$. Zgodnie z definicją granicy ciągu, do dowolnego **otoczenia** liczb g_1 oraz g_2 powinny należeć **prawie wszystkie wyrazy ciągu** (a_n) . Ponieważ $g_1 \neq g_2$ więc możemy tak dobrać promień ε tych otoczeń, aby były one rozłączne. Wystarczy przyjąć $\varepsilon < \frac{g_1 + g_2}{2}$ (tzn. mniej niż połowa odległości pomiędzy liczbami g_1 oraz g_2). Ilustruje to poniższy rysunek.



W konsekwencji jeśli np. do otoczenia liczby g_1 będą należały **prawie wszystkie wyrazy ciągu** (a_n) , to do otoczenia liczby g_2 , może należeć jedynie reszta wyrazów tego ciągu, czyli skończona ich ilość. Zatem liczba g_2 nie może być granicą tego ciągu. Rozważania te prowadzą nas do następującego wniosku.

Własność: Jednoznaczność granicy ciągu

Jeśli ciąg nieskończony posiada granicę, to granica ta jest dokładnie jedna.

Rozważmy następujący przykład.

Przykład 1

Niech ciąg (a_n) dany będzie wzorem

$$a_n = \frac{24}{n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Wypiszmy kilka początkowych wyrazów tego ciągu.

$$a_1 = 24$$

$$a_2 = 12$$

$$a_3 = 8$$

$$a_4 = 6$$

$$a_5 = \frac{24}{5}$$

$$a_6 = 4$$

$$a_{24} = 1$$

$$a_{48} = \frac{1}{2}$$

$$a_{96} = \frac{1}{4}$$

Jak widzimy dla coraz większych $n \in \mathbb{N}$ wyrazy ciągu (a_n) są coraz bliższe zeru, co pozwala stwierdzić, że $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$. Zdefiniujmy teraz ciąg (b_n) następująco: $b_n = 1$ dla $n \leq 23$ oraz $b_n = a_n$ dla $n > 23$. Ponieważ począwszy od wyrazu b_{24} wyrazy ciągu (b_n) są takie same jak wyrazy ciągu (a_n) więc wyrazy ciągu (b_n) (podobnie jak wyrazu ciągu (a_n)) dla coraz większych $n \in \mathbb{N}$ są coraz bliższe zeru. Oznacza to, że granica ciągu (b_n) jest taka sama jak granica ciągu (a_n) .

Rozważania zawarte w powyższym przykładzie pozwalają nam zapisać poniższą własność.

Własność: Zmiana skończonej ilości wyrazów ciągu

Jeśli ciąg nieskończony (a_n) jest zbieżny do granicy g , to ciąg (b_n) taki, że $b_n = a_n$ dla prawie wszystkich $n \in \mathbb{N}$, jest również zbieżny do granicy g . Innymi słowy zmiana skończonej ilości wyrazów nieskończonego ciągu zbieżnego na inne nie zmienia jego granicy.

Związek pomiędzy ciągami zbieżnymi i ograniczonymi.

Ciąg zbieżny to taki, który posiada granicę skończoną. Ciąg ograniczony to taki, którego wszystkie wyrazy należą do pewnego przedziału o skończonych krańcach. Okazuje się, że te pojęcia są ze sobą powiązane. Spójrzmy na przykład.

Przykład 2

Niech ciąg (a_n) dany będzie wzorem

$$a_n = 1 + (-1)^n \cdot \frac{6}{n} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Wypiszmy niektóre wyrazy tego ciągu

$$a_1 = -5$$

$$a_2 = 4$$

$$a_3 = -1$$

$$a_6 = 2$$

$$a_{12} = 1\frac{1}{2}$$

$$a_{21} = \frac{5}{7}$$

$$a_{36} = 1\frac{1}{6}$$

$$a_{42} = \frac{6}{7}$$

Jak widać kolejne wyrazy ciągu (a_n) są coraz bliższe liczbie 1. Zatem w dowolnym otoczeniu tej liczby zawsze znajdują się **prawie wszystkie wyrazy** tego ciągu. Oznacza to, że ciąg (a_n) jest zbieżny do 1.

Rozważmy teraz przedział $(0, 2)$. Jest to otoczenie liczby 1 o promieniu $\varepsilon_0 = 1$. Z faktu, że ciąg (a_n) jest zbieżny do 1 wynika, że do tego otoczenia należą prawie wszystkie wyrazy tego ciągu. Istotnie. Do przedziału $(0, 2)$ nie należy jedynie sześć jego początkowych wyrazów. Zatem możemy tak powiększyć promień tego otoczenia aby należało do niego także te sześć początkowych przedziałów. Wystarczy np. przyjąć promień $\varepsilon_1 = 7$. Otrzymamy wówczas otoczenie $(1 - 7, 1 + 7) = (-6, 8)$, do którego należą już wszystkie wyrazy ciągu (a_n) . Ostatni fakt oznacza, że ciąg (a_n) jest ograniczony.

Rozważania zawarte w powyższym przykładzie można oczywiście powtórzyć dla dowolnego ciągu zbieżnego. Prawdziwa jest zatem własność.

Własność: Związek zbieżności z ograniczonością ciągu

Jeśli ciąg nieskończony (a_n) jest zbieżny, to jest ograniczony.

Przy badaniu zbieżności ciągu nieskończonego często wykorzystuje się wniosek z powyższej własności.

Ważne!

Jeżeli ciąg nieskończony (a_n) nie jest ograniczony, to nie jest zbieżny.

Można zadać pytanie, czy zachodzi własność odwrotna, tzn. czy każdy ciąg ograniczony jest zbieżny. Rozważmy następujący przykład.

Przykład 3

Niech ciąg (a_n) dany będzie wzorem

$$a_n = (-1)^n.$$

Ciąg ten jest ograniczony, gdyż przyjmuje tylko dwie wartości 1 oraz -1 .

Z drugiej strony do otoczenia liczby -1 o promieniu 1, czyli do przedziału $(-2, 0)$, nie należą prawie wszystkie wyrazy ciągu (a_n) (należą do niego tylko wyrazy o numerach parzystych). Podobnie możemy wskazać otoczenie liczby 1, do którego również nie należą prawie wszystkie wyrazy ciągu (a_n) . Oznacza to, że ciąg ten nie posiada granicy.

Widzimy zatem, że odpowiedź na postawione wyżej pytanie jest negatywna. Mianowicie

Ważne!

Nie każdy ciąg ograniczony jest zbieżny.

Okazuje się jednak, że jeśli dodatkowo jest on monotoniczny (tzn. rosnący, malejący lub stały), to musi już posiadać skończoną granicę. Zachodzi bowiem następująca własność.

Własność: Związek monotoniczności i zbieżności ciągu

Jeżeli ciąg nieskończony jest ograniczony oraz monotoniczny, to jest zbieżny.

Spójrzmy na kolejny przykład.

Przykład 4

Rozważmy ciąg dany wzorem

$$a_n = 3n + 1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Zauważmy, że

$$a_n = 3n + 1 < 3n + 4 = 3(n + 1) + 1 = a_{n+1}.$$

Oznacza to, że ciąg (a_n) jest rosnący, czyli monotoniczny.

Z drugiej strony wyrazy powyższego ciągu mogą być dowolnie duże więc nie jest on ograniczony. Oznacza to w szczególności, że ciąg ten nie jest zbieżny.

Powyższy przykład daje nam prawo do stwierdzenia, że

Ważne!

Nie każdy ciąg monotoniczny jest zbieżny.

Na koniec jeszcze jeden przykład.

Przykład 5

Rozważmy ciąg dany wzorem

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n^2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Wypiszmy kilka kolejnych wyrazów tego ciągu

$$a_1 = -1, a_2 = \frac{1}{4}, a_3 = \frac{-1}{9}, a_4 = \frac{1}{16}, \dots$$

Jak widać wyrazy tego ciągu są na zmianę dodatnie i ujemne. Zatem ciąg ten nie jest ani rosnący ani malejący. Nie jest też oczywiście stały. Oznacza to, że nie jest on monotoniczny. Z drugiej strony ciąg ten jest zbieżny, gdyż jego granicą jest liczba 0.

Wnioskiem z powyższego przykładu jest poniższe stwierdzenie.

Ważne!

Nie każdy ciąg zbieżny jest monotoniczny.

Słownik

prawie wszystkie wyrazy ciągu

wszystkie wyrazy ciągu za wyjątkiem co najwyżej skończonej ich ilości

otoczenie punktu

otoczeniem punktu x_0 o promieniu $\varepsilon > 0$ nazywamy zbiór

$$U(x_0, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < \varepsilon\}$$

Animacja

Polecenie 1

W poniższej animacji przedstawiono sposób w jaki, przy użyciu twierdzenia o ciągach ograniczonych i monotonicznych, można wykazać zbieżność danego ciągu. Zapoznaj się z animacją, a następnie wykonaj polecenia.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D12ZZb9RJ>

Film nawiązujący do treści lekcji dotyczącej własności ciągów zbieżnych.

Dany jest ciąg o wyrazie ogólnym

$$a_n = \frac{n}{2n+4}.$$

Polecenie 2



Korzystając z metody przedstawionej w animacji uzasadnij, że ciąg (a_n) jest zbieżny.

Polecenie 3



Oblicz granicę ciągu (a_n) .

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Który z podanych ciągów jest monotoniczny i ograniczony, a zatem zbieżny?

☐ $a_n = 3n - 1$

☐ $a_n = (-1)^n$

☐ $a_n = \frac{2n}{n+1}$

☐ $a_n = 2^n$

Ćwiczenie 2



Wskaż ciągi, które są ograniczone ale nie są zbieżne.

☐ $a_n = \sin(\pi n)$

☐ $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$

☐ $a_n = 2 \cdot (-1)^n$

☐ $a_n = 1 + \frac{2}{n}$

Ćwiczenie 3



Uzupełnij tekst, przeciągając w puste miejsca odpowiednie elementy.

Dany jest ciąg określony wzorem $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$. Jest to ciąg . Ciąg ten zatem zbieżny.

ograniczony

nie jest

monotoniczny

jest

ograniczony oraz monotoniczny

Ćwiczenie 4



Uzupełnij tekst, przeciągając w puste miejsca odpowiednie elementy.

Dany jest ciąg określony wzorem $a_n = \frac{(-1)^n}{2n+1}$. Ciąg ten jest ciągiem zbieżnym. Jego granica jest równa . Ciąg ten jest lecz nie jest on .

2

0

ograniczony

monotoniczny

$\frac{1}{2}$

Ćwiczenie 5



Zaznacz w tabeli poprawne pola, wskazując, czy podane ciągi są ograniczone czy zbieżne.

Ciąg	ograniczony	zbieżny
$a_n = 5$	☐	☐
$a_n = (-2)^n$	☐	☐
$a_n = \cos(\pi n)$	☐	☐

Ćwiczenie 6



Zaznacz w tabeli poprawne pola, wskazując, czy podane ciągi są monotoniczne, ograniczone czy zbieżne.

Ciąg	monotoniczny	ograniczony	zbieżny
$a_n = 3^n$	☐	☐	☐
$a_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$	☐	☐	☐
$a_n = \frac{2n+1}{n}$	☐	☐	☐

Ćwiczenie 7



Połącz w pary ciągi z własnościami, jakie posiadają.

$$a_n = 2 \cdot (-1)^n$$

monotoniczny

$$a_n = \frac{1}{2n}$$

ograniczony

$$a_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n$$

ograniczony i zbieżny

Ćwiczenie 8



Przeciągnij ciągi do odpowiednich obszarów.

Ciągi monotoniczne i rozbieżne

$$a_n = \sin(\pi n)$$

$$a_n = \pi \cdot (-1)^n$$

$$a_n = n^2 - 1$$

$$a_n = 3 - \frac{2}{n}$$

$$a_n = \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)$$

Ciągi ograniczone i rozbieżne

$$a_n = \pi^n$$

Ciągi ograniczone i zbieżne

Dla nauczyciela

Autor: Mariusz Doliński

Przedmiot: Matematyka

Temat: Własności ciągów zbieżnych

Grupa docelowa: III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

VI. Ciągi

Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

1. oblicza granice ciągów, korzystając z granic ciągów typu $\frac{1}{n}$, $\sqrt[n]{a}$ oraz twierdzeń o granicach sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu ciągów zbieżnych, a także twierdzenia o trzech ciągach;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- wie ile granic może posiadać ciąg.
- zna zależność pomiędzy ciągami zbieżnymi i ograniczonymi
- zna zależność między ciągami zbieżnymi oraz monotonicznymi i ograniczonymi

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona klasa;
- eksperyment myślowy;

- dyskusja.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

1. Nauczyciel prosi uczniów o zapoznanie się z zagadnieniami, które będą poruszane podczas lekcji.

Faza wstępna:

1. Wskazanie przez nauczyciela tematu: „Własności ciągów zbieżnych” i celów zajęć, przejście do wspólnego ustalenia kryteriów sukcesu.
2. Nauczyciel prosi uczniów, aby zgłaszali swoje propozycje pytań do wspomnianego tematu. Jedna osoba może zapisywać je na tablicy. Gdy uczniowie wyczerpią pomysły, a pozostały jakieś ważne kwestie do poruszenia, nauczyciel je dopowiada.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel prosi, aby wybrany uczeń przeczytał polecenie numer 1 z sekcji „Animacja” – „W poniższej animacji przedstawiono sposób w jaki, przy użyciu twierdzenia o ciągach ograniczonych i monotonicznych, wykazać zbieżność danego ciągu. Zapoznaj się z nią, a następnie wykonaj zamieszczone pod nią polecenia.” Następnie prosi uczniów, aby zapoznali się z materiałem. Po ustalonym wcześniej czasie pyta czy były wątpliwości z jego zrozumieniem i tłumaczy je.
2. Uczniowie wykonują pierwsze dwa ćwiczenia interaktywne z sekcji „Sprawdź się”. Wyniki pracy omawiane są na forum i komentowane przez nauczyciela.
3. W kolejnym kroku uczniowie realizują w parach ćwiczenia 3-5, po ich wykonaniu porównują otrzymane wyniki z inną parą.
4. Uczniowie indywidualnie wykonują ćwiczenia nr 6-8. Następnie konsultują swoje rozwiązania z innym uczniem i ustalają jedną wersję odpowiedzi.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.

Materiały pomocnicze:

[Przykłady ciągów zbieżnych](#)

Praca domowa:

1. Uczniowie wykonują ćwiczenia interaktywne, które nie zostały dokończone na zajęciach.

Wskazówki metodyczne:

- Medium w sekcji „Animacja” można potraktować jako zadania domowe dotyczące analizy problemu w temacie „Własności ciągów zbieżnych”.