



Obliczanie wartości funkcji trygonometrycznych przy wykorzystaniu wzorów redukcyjnych

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Galeria zdjęć interaktywnych](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Obliczanie wartości funkcji trygonometrycznych przy wykorzystaniu wzorów redukcyjnych

Źródło: dostępny w internecie: pixaba.com, domena publiczna.

O ile jesteśmy w stanie zapamiętać wartości funkcji trygonometrycznych dla charakterystycznych kątów ostrych tj. 0° , 30° , 45° , 60° oraz 90° , o tyle nie są to jedyne kąty, dla których jesteśmy w stanie podawać precyzyjne wartości. Jednakże spamiętywanie coraz większej listy charakterystycznych wartości kątów trygonometrycznych jest trudne. Na szczęście istnieją sposoby wykorzystania własności funkcji trygonometrycznych, które pozwalając na uproszczenie tego zadania. Wzory redukcyjne, bo o nich mowa, pozwalają na znaczące ułatwienie posługiwania się funkcjami trygonometrycznymi, co jest ważne zwłaszcza przy bardziej rozbudowanych zadaniach.

Twoje cele

- Zastosujesz wzory redukcyjne w celu przesunięcia argumentu funkcji trygonometrycznej do znanych Ci wartości.
- Wykorzystasz wzory redukcyjne do obliczania wartości złożonych wyrażeń trygonometrycznych.

Przeczytaj

W wielu przypadkach **wzory redukcyjne** stanowią bardzo wygodne narzędzie, przy pomocy którego możemy sprowadzić duże argumenty funkcji trygonometrycznych do znanych nam wartości.

Zestawienie wzorów redukcyjnych związanych z kątem półpełnym przedstawia poniższa tabela (wzory redukcyjne dla przesunięć o kąty π i 2π).

	$\pi - \alpha$	$\pi + \alpha$	$2\pi + \alpha$	$2\pi - \alpha$
sin	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$
cos	$-\cos \alpha$	$-\cos \alpha$	$\cos \alpha$	$\cos \alpha$
tg	$-\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$

Oczywiście w niektórych przypadkach możemy wykorzystać te wzory bezpośrednio.

Przykład 1

Obliczymy wartości funkcji trygonometrycznych dla kąta $\alpha = 240^\circ$. Musimy zauważyć, że $240^\circ = 180^\circ + 60^\circ$. Oznacza to, że możemy skorzystać z drugiej grupy wzorów redukcyjnych z powyższej tabeli. Zatem wykorzystując znajomość wartości funkcji trygonometrycznych kąta 60° mamy:

- $\sin 240^\circ = \sin(180^\circ + 60^\circ) = -\sin 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2};$
- $\cos 240^\circ = \cos(180^\circ + 60^\circ) = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2};$
- $\operatorname{tg} 240^\circ = \operatorname{tg}(180^\circ + 60^\circ) = \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}.$

W innych przypadkach wzory redukcyjne pozwalają znacząco uprościć problem, który wydaje się z pozoru niezwykle trudny. W takich sytuacjach stanowią one pojedynczy krok prowadzący do rozwiązania problemu. Ilustruje to następujący przykład:

Przykład 2

Wiedząc że $\cos 558^\circ = -\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$, wyznaczmy dokładną wartość $\sin(-18^\circ)$.

Pierwszym krokiem będzie zastosowanie wzorów redukcyjnych do informacji, którą posiadamy:

$$\begin{aligned}\cos(558^\circ) &= \cos(360^\circ + 198^\circ) = \\ &= \cos(198^\circ) = \cos(180^\circ + 18^\circ) = \\ &= -\cos(18^\circ).\end{aligned}$$

Podstawiając znaną nam wartość $\cos 558^\circ$ i mnożąc powyższą równość stronami przez (-1) uzyskujemy

$$\cos 18^\circ = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}.$$

Wykorzystując jedynkę trygonometryczną jesteśmy w stanie wyznaczyć wartość $\sin 18^\circ$.

$$1 = \cos^2 18^\circ + \sin^2 18^\circ$$

$$1 = \left(\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} \right)^2 + \sin^2 18^\circ$$

$$1 = \frac{10+2\sqrt{5}}{16} + \sin^2 18^\circ$$

Teraz wystarczy już tylko przenieść podstawioną wartość $\cos^2 18^\circ$ na drugą stronę równości:

$$1 = \frac{10+2\sqrt{5}}{16} + \sin^2 18^\circ$$

$$\frac{6-2\sqrt{5}}{16} = \sin^2 18^\circ$$

$$\sin^2 18^\circ = \frac{3-\sqrt{5}}{8}$$

Pamiętając, że kąt 18° przynależy do pierwszej ćwiartki możemy odrzucić warianty, w których wynik tej części obliczeń jest ujemny. Zatem

$$\sin 18^\circ = \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{8}}.$$

Oczekiwaną od nas wartość możemy obliczyć, wykorzystując [nieparzystość funkcji](#) sinus. Mamy bowiem $-\sin \alpha = \sin(-\alpha)$. Ostateczną odpowiedź uzyskujemy korzystając z tej właśnie tożsamości:

$$\sin(-18^\circ) = -\sin 18^\circ = -\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{8}}.$$

[Wzory redukcyjne](#) można również zastosować w sytuacjach, gdy mamy obliczyć wartość bardziej rozbudowanych wyrażeń. Przyjrzyjmy się poniższemu przykładom:

Przykład 3

Obliczemy

$$A = \frac{\cos 135^\circ + \operatorname{tg} 330^\circ}{\frac{1}{\operatorname{tg} 225^\circ} \cdot \sin 840^\circ}.$$

Niestety, żadna z występujących w tym wyrażeniu funkcji trygonometrycznych nie posiada argumentu należącego do znanego nam zbioru argumentów z przedziału $\langle 0, 90^\circ \rangle$. Musimy zatem odwołać się do wzorów redukcyjnych. Kolejno, mamy:

- $\cos 135^\circ = \cos(180^\circ - 45^\circ) = -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2};$
- $\operatorname{tg} 330^\circ = \operatorname{tg}(360^\circ - 30^\circ) = -\operatorname{tg} 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3};$
- $\operatorname{tg} 225^\circ = \operatorname{tg}(180^\circ + 45^\circ) = \operatorname{tg} 45^\circ = 1;$
- $\sin 840^\circ = \sin(360^\circ + 360^\circ + 120^\circ) = \sin 120^\circ =$
 $= \sin(180^\circ - 60^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}.$

Podstawmy powyżej wyliczone wartości do wyrażenia opisującego stałą A . Uzyskujemy

$$A = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{-\frac{3\sqrt{2}}{6} - \frac{2\sqrt{3}}{6}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}}{6} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = -\frac{6\sqrt{2} + 4\sqrt{3}}{6\sqrt{3}} =$$

$$= -\frac{6\sqrt{6} + 12}{18} = -\frac{2 + \sqrt{3}}{3}.$$

Ostatnim omówionym przez nas zastosowaniem dotychczas poznanych wzorów redukcyjnych jest upraszczanie skomplikowanych wyrażeń trygonometrycznych.

Przykład 4

Przedstawimy podane wyrażenia w możliwie najprostszej postaci:

a) $2 \sin(6\pi - \alpha) - \cos^2(\pi - \alpha) + 2;$

b) $\cos(\alpha + 4\pi) \cdot \operatorname{tg}(\alpha + 7\pi) - \frac{\sin(5\pi + \alpha)}{\operatorname{tg}(4\pi - \alpha)}.$

Ad a)

Na początku skorzystajmy ze wzorów redukcyjnych, które pozwolą nam sprowadzić wartości zapisane w treści zadania do prostszej postaci. Wykorzystując kilkakrotnie wzory redukcyjne otrzymujemy:

- $\sin(6\pi - \alpha) = \sin(2\pi - \alpha) = -\sin \alpha;$
- $\cos^2(\pi - \alpha) = (-\cos \alpha)^2 = \cos^2 \alpha.$

Wykorzystując jedynkę trygonometryczną mamy $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$. Podstawiając te wartości do rozważanego wyrażenia mamy

$$2 \sin(6\pi - \alpha) - \cos^2(\pi - \alpha) + 2 = -2 \sin \alpha - 1 + \sin^2 \alpha + 2 =$$

$$= \sin^2 \alpha - 2 \sin \alpha + 1 = (\sin \alpha - 1)^2,$$

gdzie ostatnie przejście wykorzystuje wzory skróconego mnożenia.

Ad b)

Przjrzyjmy się teraz drugiemu wyrażeniu rozpatrywanemu w przykładzie:

$$\cos(\alpha + 4\pi) \cdot \operatorname{tg}(\alpha + 7\pi) - \frac{\sin(5\pi + \alpha)}{\operatorname{tg}(4\pi - \alpha)}$$

Zacznijmy, tak jak poprzednio, od wykorzystania wzorów redukcyjnych do uproszczenia wyrażen:

- $\cos(\alpha + 4\pi) = \cos \alpha$;
- $\operatorname{tg}(\alpha + 7\pi) = \operatorname{tg} \alpha$;
- $\operatorname{tg}(4\pi - \alpha) = \operatorname{tg}(2\pi - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$;
- $\sin(5\pi + \alpha) = \sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$.

Wstawiając przekształcone funkcje trygonometryczne do wyjściowego wyrażenia otrzymujemy

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + 4\pi) \cdot \operatorname{tg}(\alpha + 7\pi) - \frac{\sin(5\pi + \alpha)}{\operatorname{tg}(4\pi - \alpha)} &= \\ &= \cos \alpha \operatorname{tg} \alpha - \left(\frac{-\sin \alpha}{-\operatorname{tg} \alpha} \right) = \cos \alpha \operatorname{tg} \alpha - \frac{\sin \alpha}{\operatorname{tg} \alpha}. \end{aligned}$$

W tym miejscu warto podkreślić, że rozpatrywane w zadaniu wyrażenie ma sens tylko w przypadku, gdy α nie stanowi wielokrotności kąta $\frac{\pi}{2}$ z uwagi na występowanie w wyrażeniu tangensa tak w liczniku, jak i w mianowniku.

Wykorzystując fakt, że $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ możemy uprościć powyższe wyrażenie do postaci

$$\cos \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha - \frac{\sin \alpha}{\operatorname{tg} \alpha} = \cos \alpha \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \cdot \sin \alpha = \sin \alpha - \cos \alpha.$$

Słownik

nieparzystość/funkcja nieparzysta

funkcję $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ nazywamy nieparzystą, jeżeli dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$ zachodzi $f(x) = -f(-x)$ (czyli wykres funkcji jest symetryczny względem początku układu współrzędnych); przykładami takich funkcji są $\sin x$ oraz funkcje liniowe postaci $f(x) = ax, a \in \mathbb{R}$

wzory redukcyjne

zbiorcze określenie tożsamości trygonometrycznych, które wiążą wartości funkcji trygonometrycznych argumentów $\alpha \pm k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}$ z wartościami funkcji trygonometrycznych dla argumentu α

Galeria zdjęć interaktywnych

Znajomość wzorów redukcyjnych pozwala nam na rozwiązywanie skomplikowanych zadań, w których wartość pewnej funkcji trygonometrycznej zmuszeni jesteśmy traktować jako parametr. Zapoznaj się z poniższą galerią zdjęć interaktywnych, w której przedstawione zostały dwa zadania, w których wykorzystasz wzory redukcyjne do obliczenia wartości zadanych wyrażeń trygonometrycznych. Następnie sprawdź, czy jesteś w stanie powtórzyć prezentowane techniki rozwiązywania zadań.

Polecenie 1

Zapoznając się z galerią zdjęć interaktywnych, spróbuj najpierw samodzielnie rozwiązywać zamieszczone tam zadania. Następnie porównaj swoje rozwiązanie z proponowanym w medium.

Polecenie 2

Naśladując metody zaprezentowane w galerii zdjęć interaktywnych wykonaj poniższe ćwiczenia:

Przyjmując $K = \cos 33^\circ$ oszacuj wartość wyrażenia $\frac{\sin^2(-213^\circ)}{\operatorname{tg} 393^\circ}$.

Polecenie 3

Przyjmując $\operatorname{tg} 84^\circ = p$ i $\cos 18^\circ = q$, wskaż które wyrażenia są równoważne poniższemu:

$$Z = \operatorname{tg} 444^\circ \cdot \frac{\cos^2 636^\circ}{\sin 1884^\circ - \sin 984^\circ \cos^2 84^\circ} \cdot \sin 84^\circ + \cos 198^\circ \cdot \sin 1098^\circ$$

a) $p + \frac{\sqrt{1-q^2}}{q};$

b) $\frac{\sqrt{1-p^2}}{1-p^2} - q\sqrt{1-q^2};$

c) $\frac{p^2}{\sqrt{1-p^2}} - q\sqrt{1-q^2};$

d) $p^{-1} - q\sqrt{1-q^2}.$

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Uzupełnij tekst, przeciągając odpowiednie wyrażenia w pasujące miejsca:

Wartość wyrażenia jesteśmy w stanie obliczyć znając wartość $\cos(8^\circ)$ z wykorzystaniem wzoru redukcyjnego . Z kolei znając wartość $\sin(32^\circ)$ jesteśmy w stanie obliczyć wartość .

$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\cos 352^\circ$$

$$\sin(2\pi - \alpha) = -\sin \alpha$$

$$\sin 198^\circ$$

$$\cos 108^\circ$$

$$\cos(2\pi - \alpha) = \cos \alpha$$

$$\cos 1912^\circ$$

$$\operatorname{tg} 572^\circ$$

$$\cos(2\pi + \alpha) = \cos \alpha$$

$$\operatorname{tg} 132^\circ$$

Ćwiczenie 2



Połącz w pary wyrażenia z ich wartościami liczbowymi.

$$\operatorname{tg}\left(\frac{19\pi}{4}\right)$$

$$\frac{1}{2}$$

$$\sin\left(\frac{29\pi}{6}\right)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos\left(\frac{55\pi}{4}\right)$$

$$-1$$

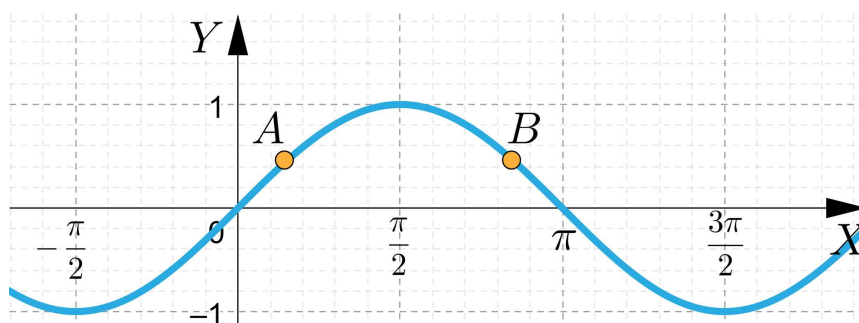
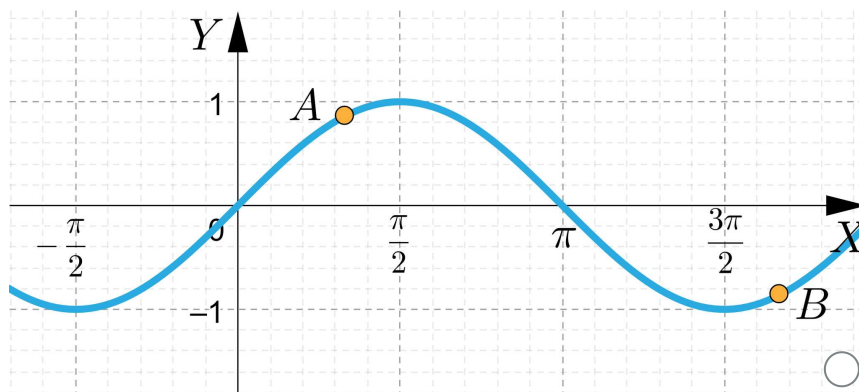
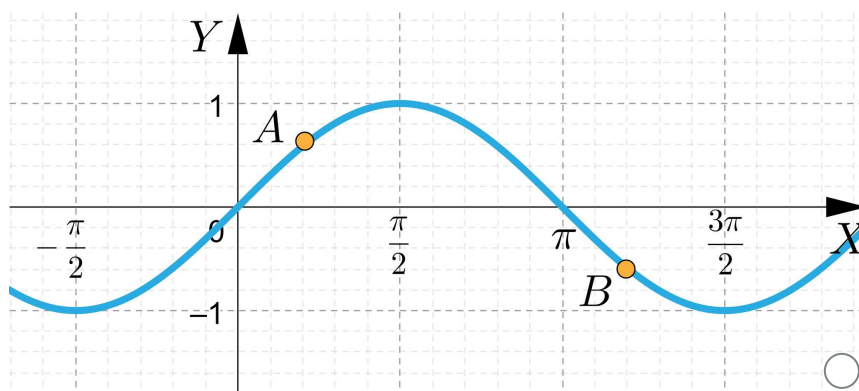
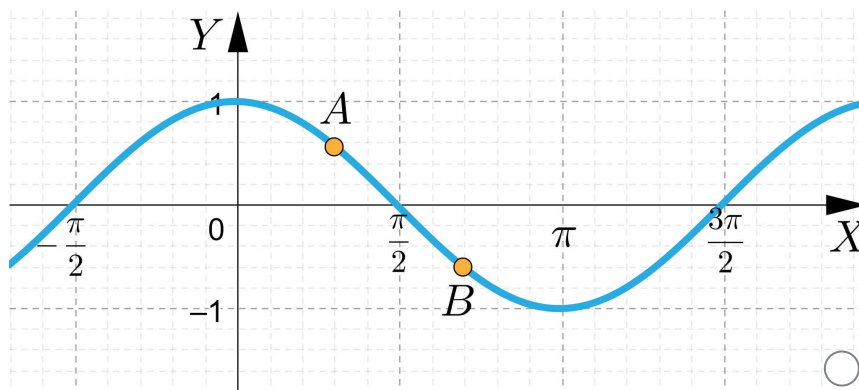
$$\operatorname{tg}\left(\frac{17\pi}{3}\right)$$

$$-\sqrt{3}$$

Ćwiczenie 3



Wskaż grafikę stanowiącą graficzną interpretację zależności opisanej wzorem redukcyjnym $\sin(\pi + \alpha) = -\sin(\alpha)$.





Ćwiczenie 4



Oblicz wartość wyrażenia $Z = \left(-\sin\left(\frac{83\pi}{7}\right) \cdot \sin\left(\frac{62\pi}{7}\right) + \cos^2\left(\frac{55\pi}{7}\right)\right) \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{82\pi}{8}\right)$.

Ćwiczenie 5



Wskaż prawidłową odpowiedź. Jeżeli $x = \sin 73^\circ$, to wyrażenie $\frac{\sin 613^\circ}{\cos 287^\circ} \cdot \operatorname{tg} 253^\circ$ można uprościć do postaci:

☐ $\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$

☐ $\frac{x}{1-x^2}$

☐ $\frac{x^2}{1-x^2}$

☐ $\frac{x^2}{x^2-1}$

Ćwiczenie 6



Wskaż prawidłową odpowiedź. Dla jakiej wartości kąta α spełniona jest poniższa równość?

$$\cos\left(\alpha + \frac{107\pi}{6}\right) = \frac{\sin\left(300\alpha + \frac{\pi}{6}\right)}{\operatorname{tg}\left(2\alpha + \frac{213\pi}{6}\right)}$$

☐ $\frac{\pi}{6}$

☐ $-\frac{\pi}{6}$

☐ $\frac{\pi}{3}$

☐ $\frac{\pi}{4}$

Ćwiczenie 7



Wskaż wszystkie prawidłowe odpowiedzi. Jeżeli $\cos 34^\circ = x$ oraz $\operatorname{tg} 506^\circ = y$, to prawdziwe są równości:

☐ $\frac{\sin 34^\circ}{\cos 326^\circ} + \left(\frac{\sin 394^\circ}{\operatorname{tg} 34^\circ} \right)^2 = \frac{y^2 + x^3}{17}$

☐ $\frac{\sin 34^\circ}{\cos 326^\circ} + \left(\frac{\sin 394^\circ}{\operatorname{tg} 34^\circ} \right)^2 = \frac{\sqrt{1+x^2}}{y} + \frac{1+x^2}{y^2}$

☐ $\frac{\sin 34^\circ}{\cos 326^\circ} + \left(\frac{\sin 394^\circ}{\operatorname{tg} 34^\circ} \right)^2 = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + \frac{1-x^2}{y^2}$

☐ $\frac{\sin 34^\circ}{\cos 326^\circ} + \left(\frac{\sin 394^\circ}{\operatorname{tg} 34^\circ} \right)^2 = -y + x^2$

☐ $\frac{\sin 34^\circ}{\cos 326^\circ} + \left(\frac{\sin 394^\circ}{\operatorname{tg} 34^\circ} \right)^2 = -2y + x$

Ćwiczenie 8



Zaznacz poprawną odpowiedź. Wiedząc, że

$$\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$$

$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

wskaż wartość wyrażenia:

$$Q = \cos\left(\frac{39\pi}{5}\right) \cdot \cos\left(\frac{18\pi}{5}\right) + \cos^2\left(\frac{63\pi}{5}\right) \cdot \frac{3}{\sin^2\left(\frac{87\pi}{15}\right)}.$$

☐ $\frac{1}{4} - \frac{4\sqrt{5}}{5}$

☐ $\frac{9}{4} - \frac{2\sqrt{5}}{5}$

☐ $\frac{7}{4} - \frac{3\sqrt{5}}{10}$

☐ $2 - \frac{2\sqrt{5}}{5}$

Dla nauczyciela

Autor: Filip Turoboś

Przedmiot: Matematyka

Temat: Obliczanie wartości funkcji trygonometrycznych przy wykorzystaniu wzorów redukcyjnych

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

VII. Trygonometria.

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

4) stosuje wzory redukcyjne dla funkcji trygonometrycznych;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- stosuje wzory redukcyjne w celu przesunięcia argumentu funkcji trygonometrycznej do znanych Ci wartości,
- wykorzystuje wzory redukcyjne do obliczania wartości złożonych wyrażeń trygonometrycznych.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona klasa;
- WebQuest;
- dyskusja.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

1. Nauczyciel prosi uczniów o zapoznanie się z treściami zapisanymi w sekcji „Przeczytaj”.

Faza wstępna:

1. Nauczyciel przedstawia uczniom temat – „Obliczanie wartości funkcji trygonometrycznych przy wykorzystaniu wzorów redukcyjnych”, wskazuje cele zajęć oraz ustala z nimi kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel wyświetla zawartość sekcji „Galeria zdjęć interaktywnych”, czyta treść polecenia nr 1 – „Oglądając galerię zdjęć interaktywnych, próbuj najpierw samodzielnie rozwiązywać zamieszczone tam zadania. Następnie porównaj swoje rozwiązanie z proponowanym w medium”. Po zapoznaniu się uczniów z materiałem omawia ewentualne problemy związane z jego niezrozumieniem.
2. Nauczyciel przechodzi do sekcji „Sprawdź się”. Zapowiada uczniom, że w kolejnym kroku będą rozwiązywać ćwiczenia numer 1 i 2, i będą to robić wspólnie. Wybrana osoba czyta po kolei polecenia. Po każdym przeczytanym poleceniu ochotnik udziela odpowiedzi. Reszta uczniów ustosunkowuje się do niej, proponując swoje pomysły. Nauczyciel w razie potrzeby koryguje odpowiedzi, dopowiada istotne informacje, udziela uczniom informacji zwrotnej.
3. W następnym kroku uczniowie wykonują w grupach ćwiczenia numer 3, 4 i 5. Następnie wybrana grupa prezentuje swoje rozwiązania. Nauczyciel w razie potrzeby

uzupełnia informacje.

4. Uczniowie wykonują indywidualnie ćwiczenia 6, 7 i 8, ale następnie porównują swoje odpowiedzi z kolegą lub koleżanką.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Wybrany uczeń podsumowuje zajęcia, zwracając uwagę na nabyte umiejętności.

Praca domowa:

1. Zadanie dla kolegi/koleżanki. Uczniowie dobierają się w pary i opracowują zadania analogiczne do ćwiczeń 7 i 8 z sekcji „Sprawdź się”. Następnie przesyłają je do siebie mailem, rozwiązują i na następnej lekcji porównują wyniki.

Materiały pomocnicze:

- [Sinus, cosinus i tangens kąta ostrego](#)

Wskazówki metodyczne:

- Medium w sekcji „Galeria zdjęć interaktywnych” można potraktować jako zadania domowe dotyczące analizy problemu w temacie „Obliczanie wartości funkcji trygonometrycznych przy wykorzystaniu wzorów redukcyjnych”.