



Kąty między ścianą a odcinkiem w czworościanie

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Animacja 3D](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Potrzeba wyznaczania kątów pomiędzy obiektami przestrzennymi pojawia się w wielu dziedzinach życia. Takimi dziedzinami mogą być architektura czy sztuka. W tym materiale rozwiniesz umiejętność wyznaczania kątów pomiędzy odcinkiem a płaszczyzną.



Bottrop, Niemcy

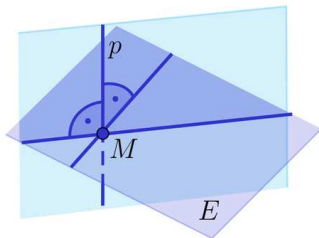
Źródło: dostępny w internecie: www.pixabay.com, domena publiczna.

Twoje cele

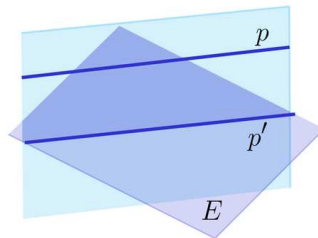
- Wskażesz kąty pomiędzy ścianą a odcinkiem w czworoscianie.
- Obliczysz miary kątów pomiędzy odcinkiem a ścianą w czworoscianie i zastosujesz swoje umiejętności w zadaniach.
- Rozwiniesz umiejętność stosowania twierdzenia Vivianiego oraz własności czworoscianu foremnego.

Przeczytaj

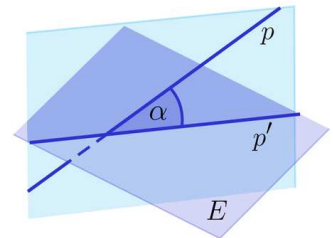
Przypomnijmy, jakie może być wzajemnie położenie prostej i płaszczyzny w przestrzeni. Prosta może być równoległa do płaszczyzny. Powiemy wtedy, że kąt pomiędzy prostą a płaszczyzną jest równy 0° . Prosta może być również prostopadła do płaszczyzny, czyli kąt pomiędzy prostą a płaszczyzną wynosi 90° . W trzecim przypadku prosta przecina płaszczyznę pod innym kątem niż prosty. Aby wyznaczyć miarę takiego kąta, wyznaczamy rzut prostokątny prostej na płaszczyznę oraz wyznaczamy kąt pomiędzy prostą a tym rzutem.



Prosta prostopadła
do płaszczyzny
 $\alpha = 90^\circ$

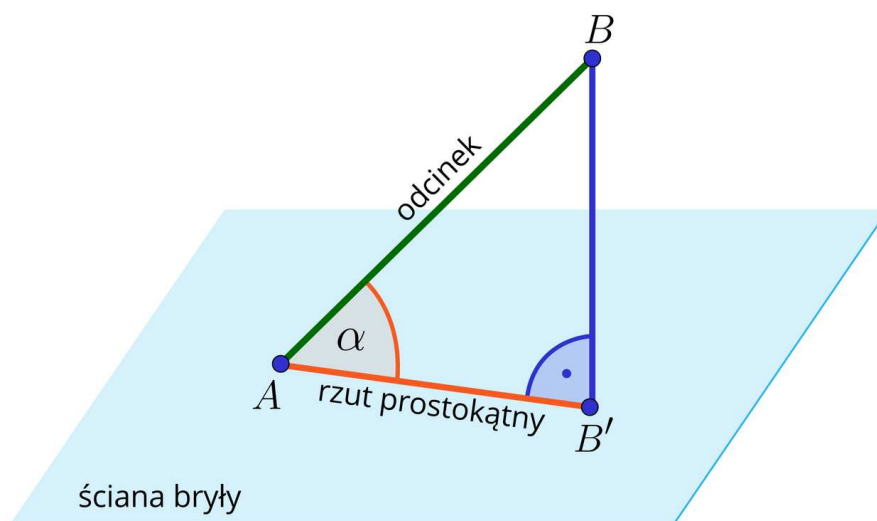


Prosta równoległa
do płaszczyzny
 $\alpha = 0^\circ$



Kąt ostry
 $0^\circ < \alpha < 90^\circ$

Wyznaczanie kąta pomiędzy odcinkiem a płaszczyzną w czworoboku prowadzi się do wyznaczenia **kąta nachylenia prostej zawierającej dany odcinek do tej płaszczyzny**.



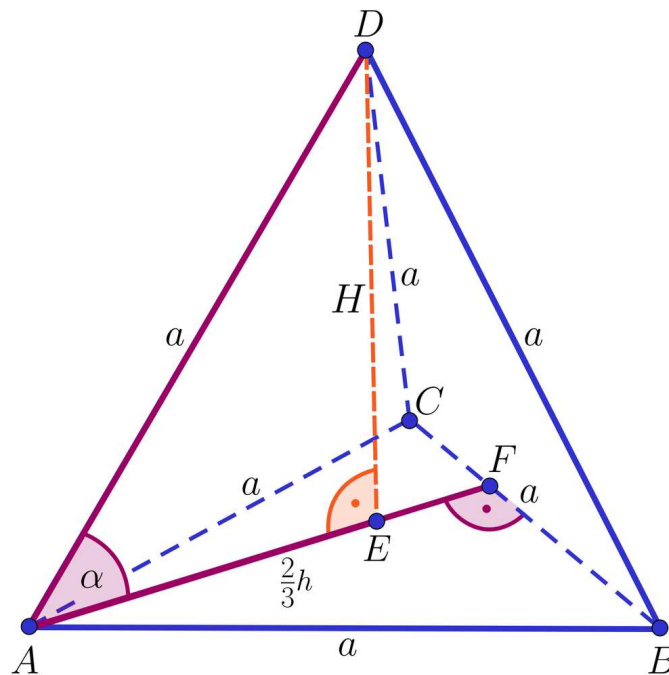
Kąt α pomiędzy odcinkiem AB a ścianą bryły.

Przykład 1

Wyznamy miary kątów pomiędzy krawędzią a każdą ze ścian czworościanu foremnego.

Rozwiązanie:

Przyjrzymy się czworościanowi foremnemu.



Zauważmy, że ze względu na symetrie czworościanu foremego nie ma znaczenia, którą krawędź będziemy rozważać. Przyjrzymy się krawędzi AD . Krawędź ta zawarta jest w ścianach ABD i ACD , czyli prosta AD jest równoległa do płaszczyzny ABC i BCD . Stąd miary kątów pomiędzy krawędzią AD a każdą ze ścian ABC i BCD są równe 0° .

Pozostały do rozpatrzenia kąty pomiędzy krawędzią AD a każdą ze ścian ABC i BCD . Ponownie, ze względu na symetrie czworościanu foremego, kąty te są przystające. Rzutem prostokątnym krawędzi AD na płaszczyznę ABC jest odcinek AE zawarty w wysokości AF trójkąta ABC .

Rozważmy kąt DAE . Wysokość trójkąta równobocznego jest równa $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, czyli $|AE| = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Z trójkąta prostokątnego AED otrzymujemy $\cos \alpha = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{3}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0,5774$.

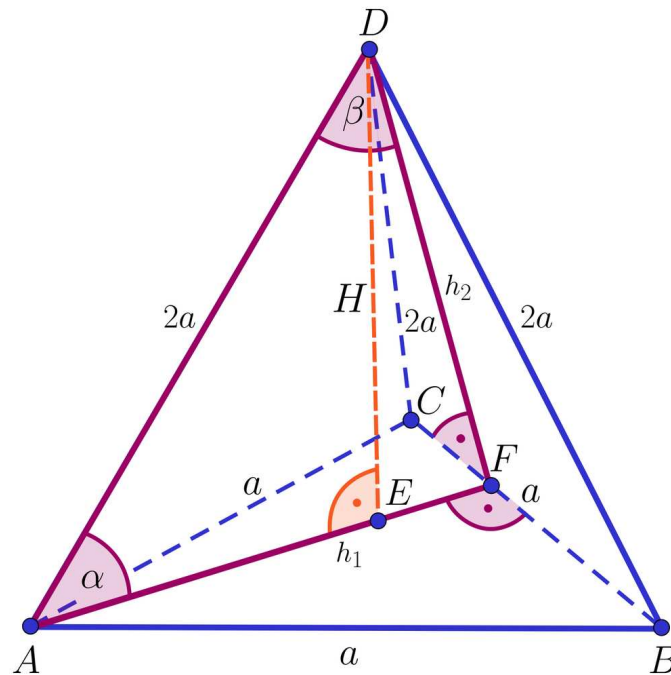
Z tablic funkcji trygonometrycznych odczytujemy $\alpha \approx 55^\circ$, czyli miary kątów pomiędzy krawędzią a każdą ze ścian ABC i CBD wynoszą około 55° .

Przykład 2

Wyznamy miary kątów pomiędzy krawędzią a każdą ze ścian w ostrosłupie prawidłowym trójkątnym, w którym krawędź boczna jest dwa razy dłuższa od krawędzi podstawy.

Rozwiązanie:

Przyjrzyjmy się ostrosłupowi prawidłowemu trójkątnemu, w którym krawędź boczna jest dwa razy dłuższa od krawędzi podstawy.



Zauważmy, że ze względu na symetrię ostrosłupa prawidłowego nie ma znaczenia, którą krawędź boczną będziemy rozważać. Przyjrzyjmy się krawędzi AD .

Krawędź ta zawarta jest w ścianach ABD i ACD , czyli miary kątów pomiędzy krawędzią AD a każdą ze ścian ABD i ACD wynoszą 0° .

Pozostały do rozpatrzenia kąty pomiędzy krawędzią AD a każdą ze ścian ABC i BCD . Rzutem prostokątnym krawędzi AD na płaszczyznę ABC jest odcinek AE zawarty w wysokości AF trójkąta ABC . Rzut prostokątny wierzchołka A na płaszczyznę BCD zawiera się w wysokości DF trójkąta BCD . Stąd rzut krawędzi AD na płaszczyznę BCD zawarty jest w prostej DF .

Wysokość trójkąta równobocznego jest równa $h_1 = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, czyli $|AE| = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Z trójkąta prostokątnego CFD otrzymujemy $|DF| = \sqrt{4a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{\sqrt{15}a}{2}$.

Z trójkąta prostokątnego AED otrzymujemy $\cos \alpha = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{6} \approx 0,2887$.

Stosując twierdzenie cosinusów do trójkąta AFD , otrzymujemy:

$$\frac{3a^2}{4} = 4a^2 + \frac{15a^2}{4} - 2\sqrt{15}a^2 \cos \beta$$

$$2\sqrt{15}a^2 \cos \beta = 7a^2$$

$$\cos \beta = \frac{7\sqrt{15}}{30} \approx 0,9037.$$

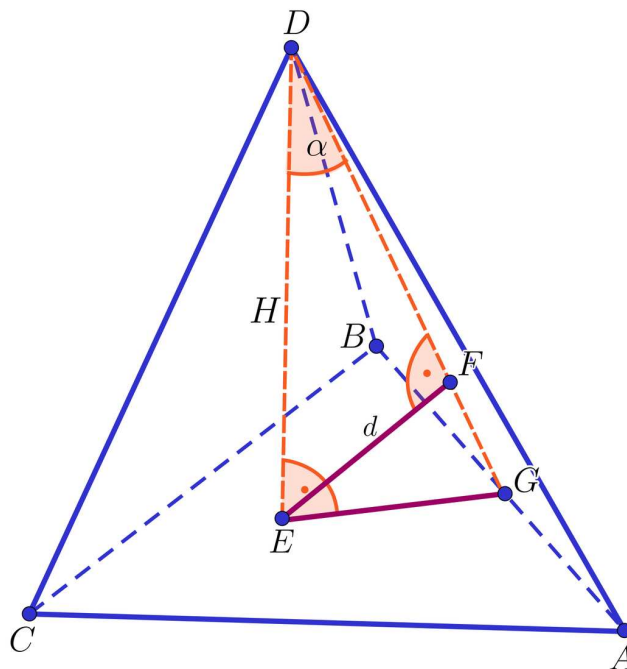
Zatem $\alpha \approx 73^\circ$ i $\beta \approx 25^\circ$, czyli miara kąta pomiędzy krawędzią AD a płaszczyzną podstawy ABC wynosi około 73° . Natomiast miara kąta pomiędzy krawędzią AD a ścianą BCD jest równa około 25° .

Przykład 3

Dany jest czworościan $ABCD$, w którym wysokość DE ma długość H . Kąty pomiędzy tą wysokością a ścianami ABD , ACD i BCD wynoszą odpowiednio α , β i γ . Wyznamy odległości spodka wysokości E od ścian ABD , ACD i BCD .

Rozwiązanie:

Aby wyznaczyć odległość punktu E od płaszczyzny ABD należy wyznaczyć **rzut prostokątny tego punktu na tę płaszczyznę**. Oznaczmy go przez F . Odcinek DF jest więc rzutem prostokątnym odcinka DE na płaszczyznę ABD . Stąd kąt EDF jest kątem pomiędzy wysokością DE a płaszczyzną ABD .



Z trójkąta prostokątnego DFE wyznaczamy: $\frac{|EF|}{H} = \sin \alpha$, czyli $|EF| = H \sin \alpha$.

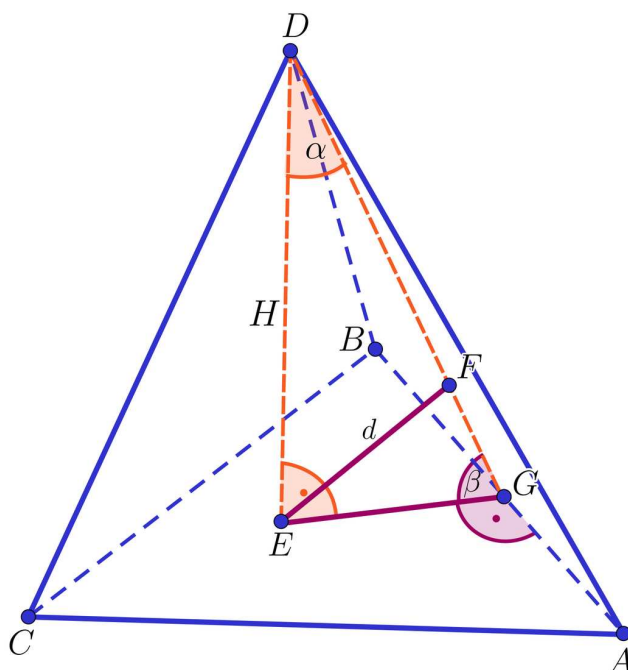
W analogiczny sposób wyznaczamy odległości punktu E od każdej ze ścian ACD i BCD , które wynoszą odpowiednio $H \sin \beta$ i $H \sin \gamma$.

Przykład 4

Dany jest czworościan $ABCD$, w którym wysokość DE ma długość H . Odległość spodka wysokości E od ściany ABD wynosi d . Wyznamy odległość punktu E od prostej AB .

Rozwiązanie:

Niech DF będzie rzutem prostokątnym odcinka DE na płaszczyznę ABD , a G rzutem prostokątnym punktu E na prostą AB . Wtedy punkty D, F i G leżą na jednej prostej, gdyż płaszczyzna DEF jest prostopadła do płaszczyzny ABD .



Ponieważ $\alpha + \beta = 90^\circ$, więc kąt FEG ma miarę α a kąt DEF ma miarę β . Z trójkąta prostokątnego DFE otrzymujemy $|DF| = \sqrt{H^2 - d^2}$. Z podobieństwa trójkątów EFG i DFE (cecha kkk) otrzymujemy: $\frac{d}{|EG|} = \frac{\sqrt{H^2 - d^2}}{H}$, czyli $|EG| = \frac{dH}{\sqrt{H^2 - d^2}}$.

Ciekawostka

W czworościanie foremny suma odległości dowolnego punktu wewnątrz tego czworościanu od jego czterech ścian jest równa wysokości czworościanu.

Weźmy dowolny punkt E wewnątrz czworościanu foremnego $ABCD$. Suma objętości czterech czworościanów $ABCE$, $ABDE$, $ACDE$ i $BCDE$ jest równa objętości czworościanu $ABCD$. Odległość punktu E od ścian ABC , ABD , ACD i BCD oznaczmy d_1 , d_2 , d_3 i d_4 , odpowiednio. Odległości te są wysokościami czworościanów $ABCE$, $ABDE$, $ACDE$ i $BCDE$, odpowiednio.

Jeżeli P oznacza pole ściany czworościanu $ABCD$ a H jego wysokość, to:

$$\frac{1}{3}Pd_1 + \frac{1}{3}Pd_2 + \frac{1}{3}Pd_3 + \frac{1}{3}Pd_4 = \frac{1}{3}PH$$

czyli

$$d_1 + d_2 + d_3 + d_4 = H$$

Słownik

rzut prostokątny punktu P na płaszczyznę

punkt, w którym prosta przechodząca przez punkt P i prostopadła do tej płaszczyzny przecina tę płaszczyznę

kąt nachylenia prostej p do płaszczyzny

kąt ostry zawarty między prostą i jej rzutem prostokątnym na płaszczyznę

Animacja 3D

Polecenie 1

Zapoznaj się z poniższą animacją 3D, która przedstawia kąty pomiędzy wysokością czworościanu a jego ścianami bocznymi.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D1AlIn71t>

Film nawiązujący do treści materiału kątów między ścianą a odcinkiem w czworościanie.

Polecenie 2

Korzystając z powyższej animacji, uzasadnij twierdzenie Vivianiego, które stwierdza, że dla dowolnego punktu wewnątrz trójkąta równobocznego suma odległości tego punktu od boków trójkąta jest stała i równa wysokości tego trójkąta.

Polecenie 3

Uzasadnij, że w każdym czworościanie $ABCD$, w którym podstawa ABC jest trójkątem równobocznym o boku długości a oraz wysokość czworościanu DE ma długość H suma tangensów kątów pomiędzy wysokością DE a ścianami ABD , ACD i BCD jest stała.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Uzupełnij luki w tekście jednym z zamieszczonych określeń.

Rzutem prostokątnym punktu P na płaszczyznę jest punkt przecięcia do tej płaszczyzny przechodzącej przez ten punkt z tą płaszczyzną.

Prosta leżąca na danej płaszczyźnie tworzy z tą płaszczyzną kąt o mierze .

Prosta prostopadła do płaszczyzny tworzy z tą płaszczyzną kąt o mierze .

Kątem pomiędzy prostą a płaszczyzną nazwiemy kąt ostry pomiędzy tą prostą a na tę .

płaszczyznę

90°

rzutem prostokątnym tej prostej

płaszczyzny prostopadłej

prostą

prostej prostopadłej

180°

prostej równoległej

0°

Ćwiczenie 2



Sinus kąta pomiędzy wysokością a ścianą boczną w ostrosłupie prawidłowym trójkątnym o długości krawędzi podstawy 12 i długości krawędzi bocznej 10 wynosi:

☐ $\frac{\sqrt{3}}{4}$

☐ $\frac{\sqrt{6}}{3}$

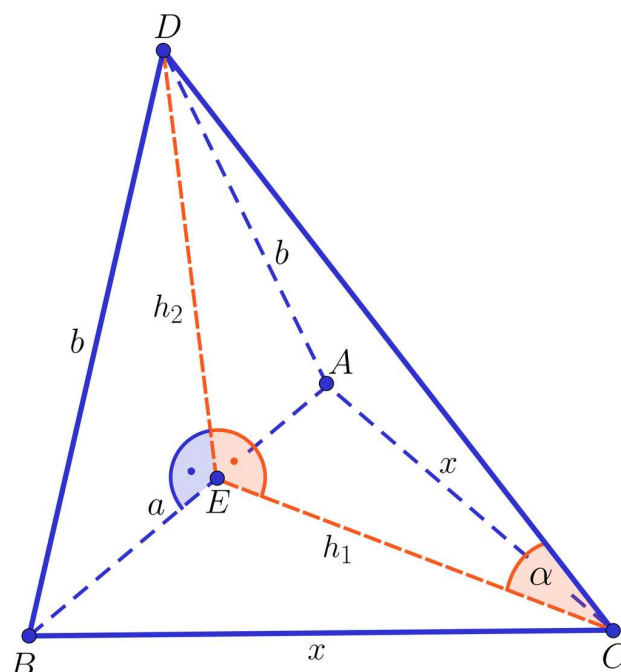
☐ $\frac{1}{3}$

☐ $\frac{\sqrt{3}}{3}$

Ćwiczenie 3



Dany jest czworościan $ABCD$, w którym kąt pomiędzy ścianami ABC i ABD jest kątem prostym. Trójkąty ABC i ABD są trójkątami równoramiennymi o wspólnej podstawie AB o długości a .



Wiedząc, że długość krawędzi AD wynosi b oraz objętość czworościanu jest równa V , uporządkuj w odpowiedniej kolejności etapy wyznaczania tangensa kąta pomiędzy krawędzią CD a płaszczyzną podstawy ABC .

Z trójkąta prostokątnego CED : $\operatorname{tg} \alpha = \frac{h_2}{h_1} = \frac{h_2}{\frac{6V}{ah_2}} = \frac{ah_2^2}{6V} = \frac{a(4b^2 - a^2)}{24V}$. ◆

Objętość czworościanu: $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} ah_1 h_2$, czyli $h_1 = \frac{6V}{ah_2} = \frac{12V}{a\sqrt{4b^2 - a^2}}$. ◆

Z trójkąta prostokątnego BED wyznaczamy $h_2 = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{\sqrt{4b^2 - a^2}}{2}$. ◆

Ćwiczenie 4



Dany jest czworościan foremny $ABCD$. Na wysokości czworościanu DE wyznaczono punkt F taki, że stosunek długości odcinka DF do odcinka FE wynosi $1 : n$. Wyznacz sinus kąta pomiędzy odcinkiem AF a płaszczyzną podstawy ABC .

Ćwiczenie 5



Dany jest czworościan $ABCD$, w którym trójkąt ABC jest trójkątem równobocznym o boku długości 4. Miary kątów pomiędzy wysokością opuszczoną z wierzchołka D a ścianami ABD , ACD i BCD wynoszą 60° , 45° i 45° , odpowiednio. Oblicz objętość tego czworościanu.

Ćwiczenie 6



W czworościanie $ABCD$ podstawa ABC jest trójkątem równobocznym o boku długości a . Objętość tego czworościanu wynosi $\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$, a jeden z kątów pomiędzy wysokością czworościanu opuszczoną z wierzchołka D a ścianą boczną czworościanu ma miarę 60° . Wyznacz długości pozostałych krawędzi tego czworościanu.

Ćwiczenie 7



Dany jest czworościan $ABCD$, w którym $|AB| = 4$, $|AC| = 8$, $|BC| = 6$, a wysokość czworościanu $|DE| = \sqrt{5}$. Oba kąty pomiędzy wysokością DE a ścianami ABD i BCD mają miarę 30° . Wyznacz kąt pomiędzy wysokością DE a ścianą ACD .

Ćwiczenie 8



Dany jest czworościan $ABCD$, w którym ABC jest trójkątem prostokątnym o kącie prostym ACB . Krawędź CD o długości c jest prostopadła do ściany ABC . Krawędź CD jest nachylona do ściany ABD pod kątem α . Wykaż, że suma odwrotności kwadratów długości krawędzi AC i BC jest stała dla danych c i α .

Dla nauczyciela

Autor: Adrian Karpowicz

Przedmiot: Matematyka

Temat: Kąty pomiędzy ścianą a odcinkiem w czworościanie

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum lub technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

X. Stereometria.

Zakres podstawowy. Uczeń:

3) Rozpoznaje w graniastosłupach i ostrosłupach kąty między odcinkami (np. krawędziami, krawędziami i przekątnymi) oraz kąty między ścianami, oblicza miary tych kątów.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- wskazuje kąt pomiędzy ścianą a odcinkiem w czworościanie;
- oblicza miary kątów pomiędzy ścianą a odcinkami w czworościanie z zastosowaniem twierdzenia Pitagorasa, własności trójkąta równobocznego, funkcji trygonometrycznych kąta ostrego w trójkącie prostokątnym, własności trójkątów podobnych;
- stosuje własności czworościanu foremego;
- stosuje twierdzenie Vivianiego dla trójkąta równobocznego.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm
- konektywizm

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja;
- burza mózgów;
- pokaz multimedialny.

Formy pracy:

- praca w parach;
- praca indywidualna;
- praca całego zespołu.

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu;
- projektor multimedialny;
- e-podręcznik.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Uczniowie zapoznają się z treściami zamieszczonymi w zakładce „Przeczytaj”.
2. Nauczyciel prowadzi dyskusję z uczniami na temat materiału zamieszczonego w sekcji Przeczytaj. Zostają wyjaśnione wszelkie wątpliwości, jakie pojawiły się podczas lektury tego tekstu. Nauczyciel stara się, aby sami uczniowie nawzajem wyjaśniali swoje wątpliwości.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel prezentuje animację 3D, w której przedstawiony jest kąt pomiędzy wysokością a ścianą boczną czworościanu. Uczniowie samodzielnie rozwiązują Polecenie 2 i Polecenie 3.
2. Uczniowie w grupach 4-osobowych rozwiązują zadania od 5 do 7.
3. Uczniowie przedstawiają rozwiązania tych zadań na forum klasy.

Faza podsumowująca:

- Nauczyciel podsumowuje temat lekcji, wyjaśnia ewentualne pytania dotyczące omawianego materiału.

Praca domowa:

Rozwiązać zadania 1–4 i 8 z sekcji „Sprawdź się”.

Materiały pomocnicze:

Czworościan

Wskazówki metodyczne:

Animacja 3D może zostać wykorzystana na lekcji o kątach między odcinkami i płaszczyznami w ostrosłupach.