

Objętość walca

Objętość walca

Wzór na objętość walca

Przykład 1

Wyobraź sobie, że pojemnik w kształcie walca o wysokości $H > 1$ wypełniamy jednakowymi krążkami o wysokości 1 i promieniu podstawy równym promieniowi podstawy pojemnika.

Ile takich krążków zmieści się w pojemniku?

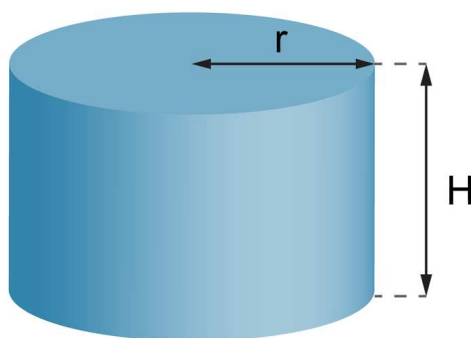
Jeśli przyjmujemy, że objętość takiego krążka jest równa V , to ile wynosi objętość pojemnika?

Jeśli teraz zwiększymy promień podstawy pojemnika i analogicznie promień podstawy krążków, to czy objętość pojemnika zmieni się?

Objętość walca zależy od jego wysokości i pola podstawy. Obliczamy ją podobnie jak objętość graniastosłupa.

Ważne!

Objętość V walca o promieniu podstawy r jest równa iloczynowi pola podstawy P_p walca przez jego wysokość H .

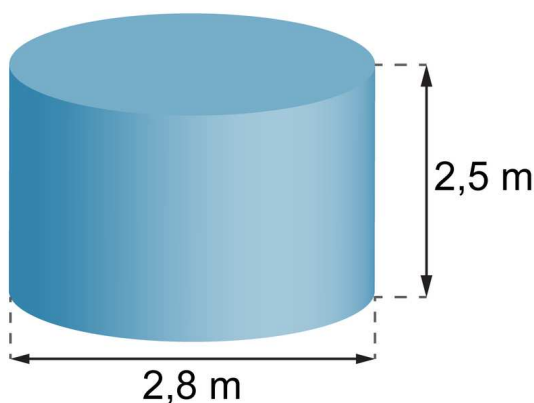


$$V = P_p \cdot H$$

$$V = \pi r^2 \cdot H.$$

Przykład 2

Ile litrów wody mieści się w pojemniku o wysokości 2,5 m i średnicy podstawy 2,8 m? Przyjmij $\pi = \frac{22}{7}$.



Promień podstawy pojemnika wynosi $2,8 \text{ m} : 2 = 1,4 \text{ m}$. Obliczamy objętość walca.

$$V = \pi r^2 \cdot H$$

$$V = \frac{22}{7} \cdot (1,4)^2 \cdot 2,5$$

$$V = \frac{22}{7} \cdot \frac{14}{10} \cdot \frac{14}{10} \cdot \frac{25}{10}$$

$$V = \frac{22 \cdot 10 \cdot 7}{1 \cdot 10 \cdot 10} = \frac{77}{5}$$

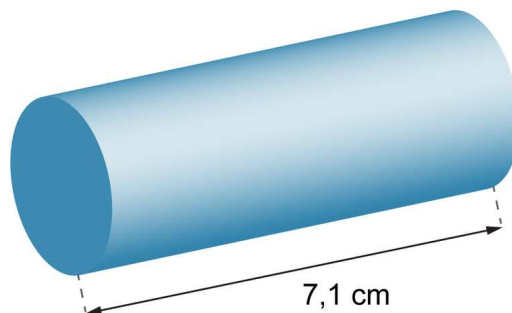
$$V = 15,4 \text{ m}^3.$$

Wiadomo, że $1 \text{ m}^3 = 1000 \text{ l}$, stąd $15,4 \text{ m}^3$ to $15,4 \cdot 1000 \text{ l} = 15400 \text{ l}$.

W pojemniku mieści się 15 400 l wody.

Przykład 3

Objętość walca przedstawionego na rysunku jest równa $89,2 \text{ cm}^3$.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Oblicz promień podstawy tego walca. Przyjmij $\pi = 3\frac{10}{71}$.

Korzystamy ze wzoru na objętość walca.

$$V = \pi r^2 \cdot H$$

$$89,2 = 3\frac{10}{71} \cdot r^2 \cdot 7,1$$

$$\frac{892}{10} = \frac{223}{71} \cdot \frac{71}{10} \cdot r^2$$

$$892 = 223r^2$$

$$r^2 = 4$$

$$r = 2,$$

bo

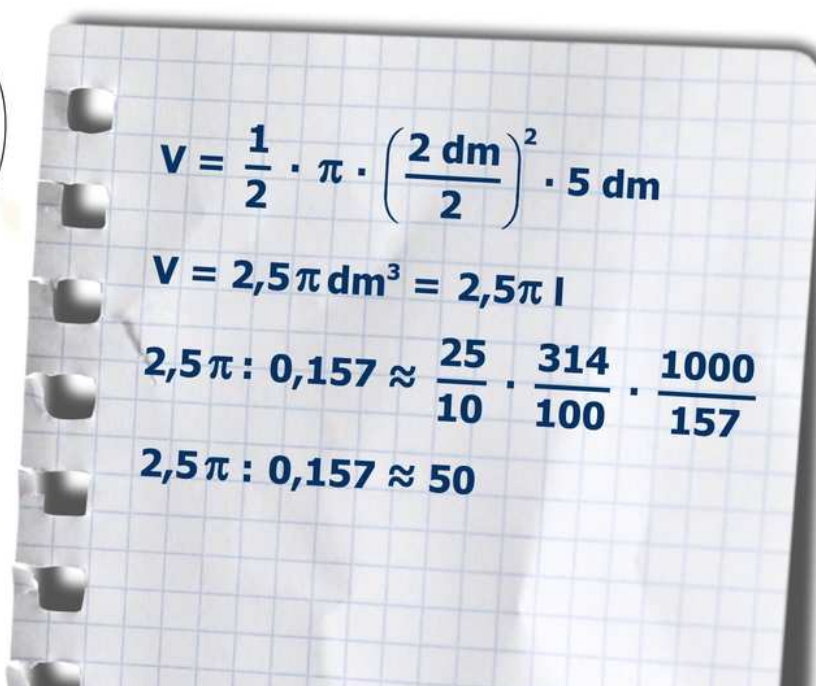
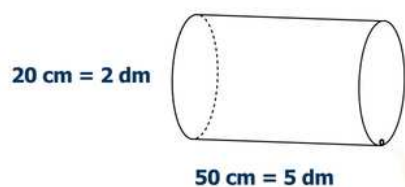
$$r > 0$$

$$r = 2 \text{ cm.}$$

Promień podstawy walca wynosi 2 cm.

Obliczanie objętości walca

Przykład 4

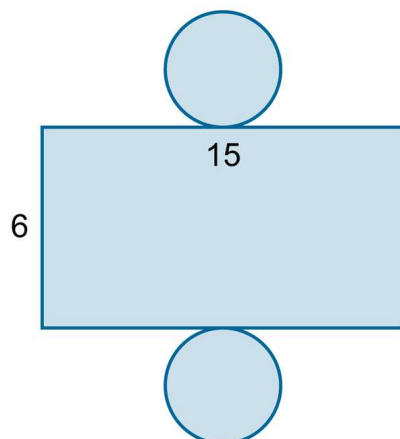


Film dostępny pod adresem </preview/resource/R1ciChtfETRvi>

W animacji przedstawiono sposób rozwiązania pewnego zadania tekstowego z wykorzystaniem wzoru na objętość walca.

Przykład 5

Oblicz objętość walca, którego siatkę przedstawia rysunek. Przyjmij $\pi = 3$.



Powierzchnia boczna walca po rozwinięciu na płaszczyźnie jest prostokątem, którego długość jest równa obwodowi koła, będącego podstawą walca.

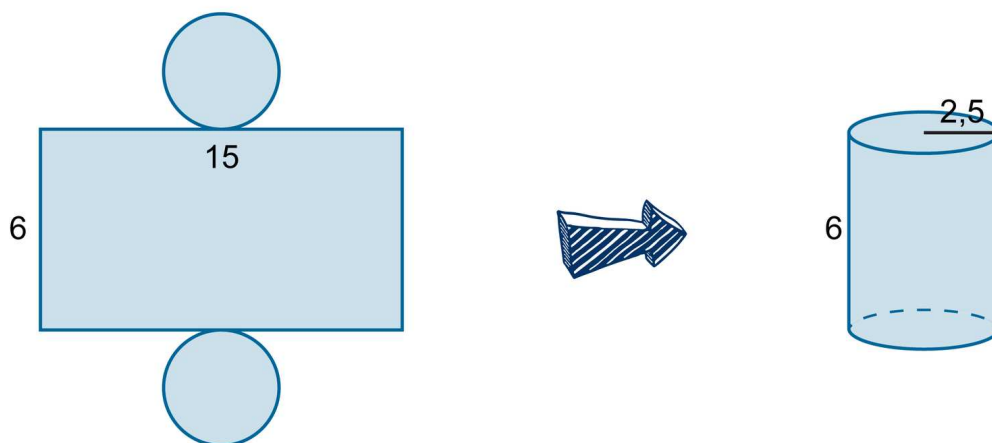
Obliczamy promień r tego koła.

$$2\pi r = 15$$

$$2 \cdot 3 \cdot r = 15$$

$$r = 2,5.$$

Wysokość H walca jest równa szerokości prostokąta, czyli $H = 6$.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Obliczamy objętość walca.

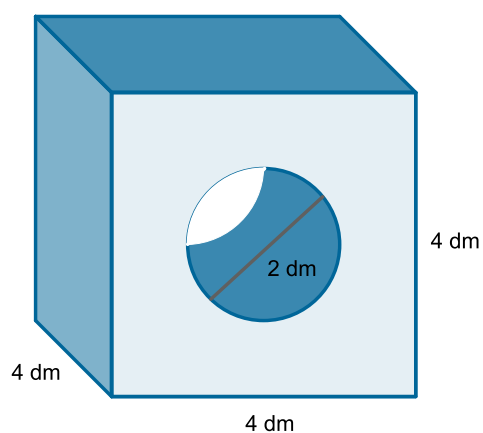
$$V = \pi r^2 \cdot H$$

$$V = 3 \cdot (2,5)^2 \cdot 6 = 112,5.$$

Objętość walca jest równa 112,5.

Przykład 6

Element przedstawiony na rysunku wykonany jest ze stali o gęstości $7,5 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Oblicz masę elementu.

Element jest w kształcie sześcienniej kostki z wydrążonym otworem w kształcie walca.

Obliczamy najpierw objętość V elementu. Jest ona równa różnicy objętości sześcianu i objętości walca o wysokości 4 dm i promieniu podstawy 2 dm : $2 = 1$ dm.

$$V = 4^3 - \pi \cdot 1^2 \cdot 4$$

$$V = (64 - 4\pi) \text{ dm}^3.$$

Masa m ciała jest równa iloczynowi objętości tego ciała przez jego gęstość.

$$m = V \cdot 7,5$$

$$m \approx (64 - 4 \cdot 3,14) \cdot 7,5 = 385,8$$

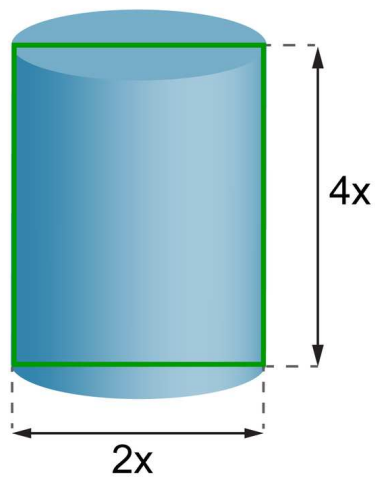
$$m \approx 385,8 \text{ kg.}$$

Masa elementu wynosi około 385,8 kg.

Przykład 7

Przekrój osiowy walca jest prostokątem, w którym jeden z boków, równy wysokości walca, jest dwukrotnie dłuższy od drugiego.

Pole powierzchni walca jest równe $250\pi \text{ cm}^2$. Oblicz objętość walca.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Oznaczmy:

- x – promień podstawy walca w cm,
- $4x$ - wysokość walca w cm, gdzie $x > 0$.

Wtedy pole P powierzchni walca jest równe;

$$P = 2\pi x^2 + 2\pi x \cdot 4x$$

$$P = 2\pi x^2 + 8\pi x^2 = 10\pi x^2$$

Jednocześnie wiemy, że pole to jest równe $250\pi \text{ cm}^2$.

$$10\pi x^2 = 250\pi$$

$$x^2 = 25$$

$$x = 5 \text{ cm}$$

$$4x = 20 \text{ cm.}$$

Promień podstawy walca jest więc równy 5 cm, a jego wysokość 20 cm.
Obliczamy objętość walca.

$$V = \pi \cdot 5^2 \cdot 20 = 500\pi$$

$$V = 500\pi \text{ cm}^3.$$

Objętość walca jest równa $500\pi \text{ cm}^3$.

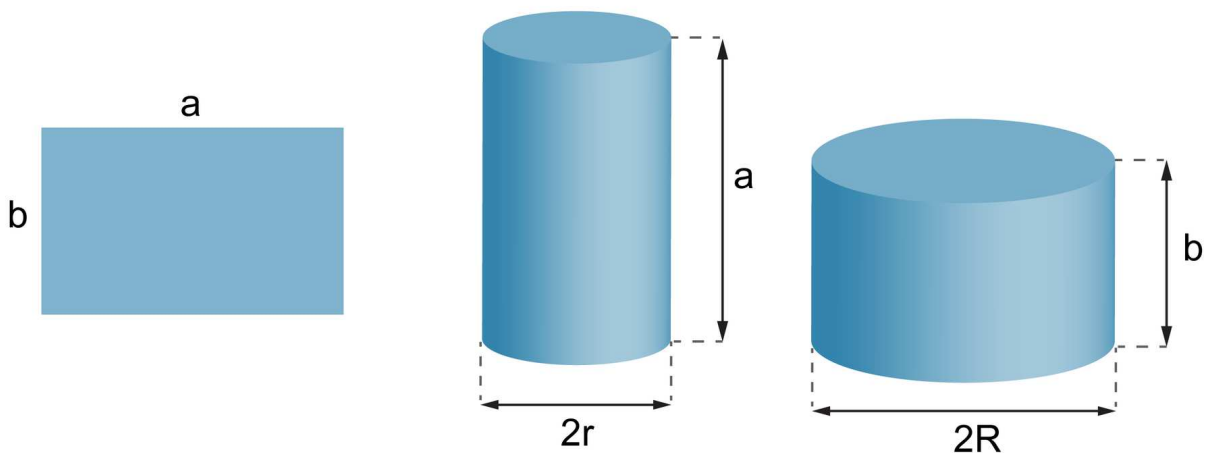
Ćwiczenie 1



Kartkę papieru w kształcie prostokąta o wymiarach a cm na b cm można zwinąć na dwa sposoby, uzyskując za każdym razem powierzchnię boczną walca. Jeden z nich będzie niższy i grubszy, drugi wyższy i chudszy. Który z tych walców ma większą objętość?

Poniższy rysunek ilustruje w przybliżeniu kartkę papieru i dwa uzyskane walce.

Przyjmując za a dłuższy bok kartki i b krótszy bok kartki, wyznaczmy najpierw promień podstawy każdego z walców.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 2

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 3



Zapoznaj się z poniższą tabelą przedstawiającą parametry techniczne butli gazowej.

Wysokość zewnętrzna bez zaworu	Masa butli	Średnica zewnętrzna	Średnica wewnętrzna
590 mm	10,2 kg	300 mm	260 mm

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 4



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 5



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 6



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 7



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 8



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 9



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 10



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 11



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 12



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 13



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 14



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 15



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.