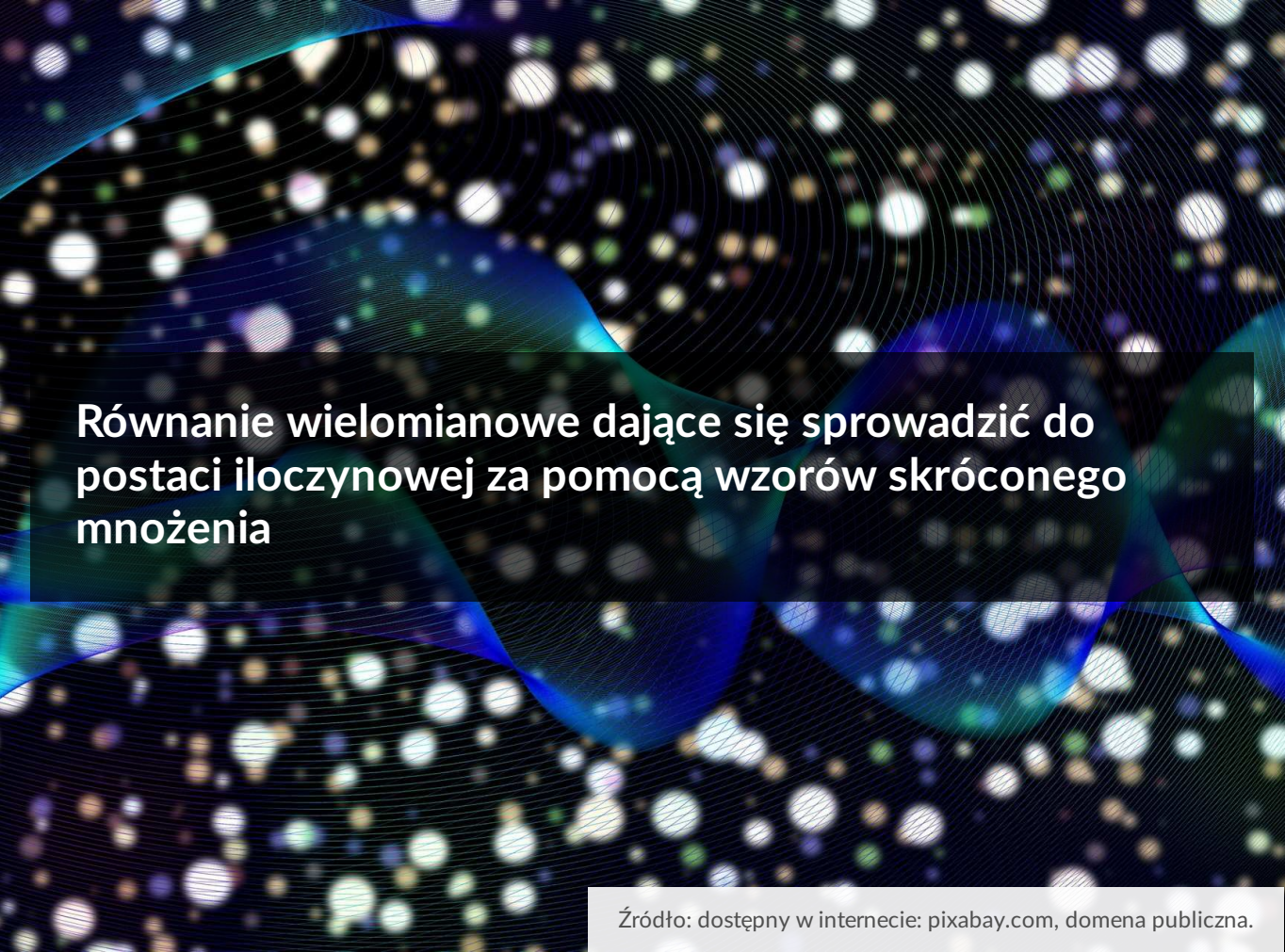




Równanie wielomianowe dające się sprowadzić do postaci iloczynowej za pomocą wzorów skróconego mnożenia

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Film samouczek](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Równanie wielomianowe dające się sprowadzić do postaci iloczynowej za pomocą wzorów skróconego mnożenia

Źródło: dostępny w internecie: pixabay.com, domena publiczna.

Ważnym elementem rozwiązania równania wielomianowego jest zapisanie go w postaci iloczynowej, czyli rozłożenia wielomianu występującego w równaniu na czynniki.

Podstawowe metody rozkładu wielomianu na czynniki to:

- wyłączanie wspólnego czynnika przed nawias,
- grupowanie wyrazów,
- wykorzystanie wzorów skróconego mnożenia.

W tym materiale utrwalimy i rozszerzymy umiejętności dotyczące rozwiązywania równań wielomianowych dających się sprowadzić do postaci iloczynowej za pomocą wzorów skróconego mnożenia.

Twoje cele

- Sprowadzisz równania wyższych stopni do postaci iloczynowej za pomocą wzorów skróconego mnożenia.
- Rozwiążesz równania wielomianowe dające się sprowadzić do postaci iloczynowej za pomocą wzorów skróconego mnożenia.

Przeczytaj

Definicja: Równanie wielomianowe

Równaniem wielomianowym stopnia n , $n \in \mathbb{N}$, nazywamy równanie, które można zapisać w postaci $W(x) = 0$, gdzie $W(x)$ jest wielomianem stopnia n .

Aby wyznaczyć pierwiastki wielomianu $W(x)$ często rozkłada się go na czynniki stopnia co najwyżej drugiego.

Rozkład wielomianu na czynniki polega na przedstawieniu wielomianu w postaci iloczynowej.

Jedną z metod sprowadzenia wielomianu do postaci iloczynowej jest wykorzystanie wzorów skróconego mnożenia.

Przypomnijmy kilka wzorów

Wzór skróconego mnożenia na różnicę kwadratów dwóch wyrażeń:

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

Wzór skróconego mnożenia na kwadrat sumy dwóch wyrażeń:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Wzór skróconego mnożenia na kwadrat różnicy dwóch wyrażeń:

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Wzór skróconego mnożenia na sześćcian sumy dwóch wyrażeń:

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Wzór skróconego mnożenia na sześćcian różnicy dwóch wyrażeń:

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Wzór skróconego mnożenia na sumę sześciątów dwóch wyrażeń:

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

Wzór skróconego mnożenia na różnicę sześciątów dwóch wyrażeń:

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

Przykład 1

Rozwiążemy równanie $9x^4 - 1 = 0$, rozkładając lewą stronę równania na czynniki, za pomocą wzorów skróconego mnożenia.

Wykorzystamy dwukrotnie wzór na różnicę kwadratów dwóch wyrażeń:

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b).$$

$$9x^4 - 1 = 0$$

$$(3x^2 - 1)(3x^2 + 1) = 0$$

$$(\sqrt{3}x - 1)(\sqrt{3}x + 1)(3x^2 + 1) = 0$$

$$\sqrt{3}x - 1 = 0 \text{ lub } \sqrt{3}x + 1 = 0 \text{ lub } 3x^2 + 1 = 0$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ lub } x = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \text{ trzecie równanie nie posiada rozwiązań}$$

$$x = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ lub } x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{Równanie ma dwa rozwiązania } x = -\frac{\sqrt{3}}{3}, x = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Przykład 2

Rozwiążemy równanie $9x^4 - 6x^2 + 1 = 0$.

Skorzystamy ze [wzoru skróconego mnożenia na kwadrat różnicy dwóch wyrażeń](#).

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Czyli:

$$(3x^2)^2 - 2 \cdot 3x^2 \cdot 1 + 1^2 = 0$$

$$(3x^2 - 1)^2 = 0$$

$$3x^2 - 1 = 0$$

$$(\sqrt{3}x - 1)(\sqrt{3}x + 1) = 0$$

$$x = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ lub } x = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{Równanie ma dwa rozwiązania } x = -\frac{\sqrt{3}}{3}, x = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Przykład 3

Rozwiążemy równanie $x^6 - 64 = 0$, rozkładając lewą stronę równania na czynniki.

Wykorzystamy wzór skróconego mnożenia na różnicę sześciątów dwóch wyrażeń.

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$x^6 - 64 = 0$$

$$(x^2)^3 - 4^3 = 0$$

$$(x^2 - 4) \left[(x^2)^2 + 4x^2 + 4^2 \right] = 0$$

$$(x^2 - 4)(x^4 + 4x^2 + 16) = 0$$

$$x^2 - 4 = 0$$

$$(x - 2)(x + 2) = 0$$

$$x = 2 \text{ lub } x = -2$$

$$x^4 + 4x^2 + 16 = 0$$

$$x^2 = z \geq 0$$

$$z^2 + 4z + 16 = 0$$

$$\Delta = 16 - 4 \cdot 16 = 16 - 64 = -48 < 0 - \text{brak rozwiązań}$$

Równanie ma dwa rozwiązania $x = -2$, $x = 2$.

Przykład 4

Rozwiążemy równanie $x^4 + 4 = 0$, rozkładając lewą stronę na czynniki możliwie najmniejszego stopnia.

Aby wykorzystać wzór skróconego mnożenia na kwadrat sumy dwóch wyrażeń

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ zapiszemy równanie w postaci równoważnej.

$$x^4 + 4x^2 - 4x^2 + 4 = 0$$

$$x^4 + 4x^2 + 4 - 4x^2 = 0$$

$$(x^2 + 2)^2 - (2x)^2 = 0$$

Teraz skorzystamy ze wzoru na różnicę kwadratów dwóch wyrażeń.

$$(x^2 + 2 - 2x)(x^2 + 2 + 2x) = 0$$

$$(x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2) = 0$$

$$x^2 - 2x + 2 = 0 \text{ lub } x^2 + 2x + 2 = 0$$

Wyróżnik trójmianu kwadratowego dla obu równań jest ujemny.

$$\Delta = 4 - 8 = -4 < 0 - \text{brak rozwiązań}$$

Równanie nie posiada rzeczywistych rozwiązań.

Przykład 5

Rozwiążemy równanie $x^6 - 6x^4 + 12x^2 - 8 = 0$.

Wykorzystamy wzór skróconego mnożenia na sześćcian różnicy dwóch wyrażeń.

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$x^6 - 6x^4 + 12x^2 - 8 = 0$$

Zapiszemy równanie w postaci:

$$(x^2)^3 - 3 \cdot x^4 \cdot 2 + 3 \cdot x^2 \cdot 4 - 8 = 0$$

$$(x^2 - 2)^3 = 0$$

$$x^2 - 2 = 0$$

$$(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}) = 0$$

$$x = \sqrt{2} \text{ lub } x = -\sqrt{2}$$

Równanie ma dwa rozwiązania $x = -\sqrt{2}$, $x = \sqrt{2}$.

Słownik

wzór skróconego mnożenia na różnicę kwadratów dwóch wyrażeń

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

wzór skróconego mnożenia na kwadrat różnicy dwóch wyrażeń

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

wzór skróconego mnożenia na różnicę sześciątów dwóch wyrażeń

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

wzór skróconego mnożenia na sześćcian różnicy dwóch wyrażeń

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Film samouczek

Polecenie 1

Przeanalizuj film samouczek i zapoznaj się z metodą rozwiązywania równań wielomianowych z wykorzystaniem wzorów skróconego mnożenia.

Trwa wczytywanie danych...

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D1BAuNiXN>

Film nawiązujący do treści lekcji dotyczącej równań wielomianowych dających sprowadzić się do postaci iloczynowej za pomocą wzorów skróconego mnożenia.

Polecenie 2

Rozwiąż równanie $x^{10} - 3x^7 + 3x^4 - x = 0$.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Zaznacz poprawną odpowiedź. Równanie $16x^4 - 25 = 0$ zapisane w postaci iloczynu to:

☐ $(2x - \sqrt{5})(2x + \sqrt{5})(4x^2 + 5) = 0$

☐ $(2x - \sqrt{5})(2x + \sqrt{5})(4x + 5) = 0$

☐ $(4x - 5)(4x^2 + 5) = 0$

☐ $(2x - 5)(2x + 5)(4x^2 + 5) = 0$

Ćwiczenie 2



Rozwiąż równanie $8x^3 - 60x^2 + 150x - 125 = 0$ i zaznacz poprawną odpowiedź.

☐ $x = \frac{5}{3}$

☐ $x = \frac{5}{2}$

☐ $x = 5$

☐ $x = 2, 5, x = -2, 52x - 5 = 0?$

Ćwiczenie 3



Zaznacz wszystkie poprawne odpowiedzi. Równanie $(4x^2 + m)(x^2 + 4) = 0$ ma dwa rozwiązania, które są liczbami przeciwnymi. Wynika z tego że m może być równe:

☐ 1

☐ -3

☐ -2

☐ -1

☐ 2

☐ 0

Ćwiczenie 4



Rozwiąż równanie $x^6 - 729 = 0$ i wpisz rozwiązania w kolejności rosnącej.

$x =$, $x =$

Ćwiczenie 5



Wybierz wszystkie równania równoważne równaniu $x^4 - (5x - 6)^2 = 0$.

☐ $(x - 1)(x^3 + x^2 - 24x + 36) = 0$

☐ $x^4 - 25x^2 + 60x - 36 = 0$

☐ $(x + 6)(x - 1)(x - 2)(x - 3) = 0$

☐ $(x^2 - 5x + 6)(x - 2)(x - 3) = 0$

☐ $(x + 1)(x^3 + x^2 - 24x + 36) = 0$

☐ $(x^2 - 5x + 6)(x^2 + 5x - 6) = 0$

Ćwiczenie 6



Wskaż liczbę rozwiązań równania $(x + 1)^3 + (x - 1)^3 = 0$.

☐ 3

☐ 2

☐ 0

☐ 1

Ćwiczenie 7



Uzupełnij brakujące wyrażenia. Zapisz lewą stronę równania $4x^4 + 64 = 0$ w postaci iloczynowej.

$$(x^2 - \boxed{} + 4)(x^2 + \boxed{}x + \boxed{}) = 0$$

-4

$2\sqrt{2}x$

x

$2\sqrt{2}$

4

$\sqrt{2}x$

Ćwiczenie 8



Połącz w pary równania równoważne.

$$(x^2 - 1)(x + 1)^2 = 0$$

$$x^3 + x^2 - x - 1 = 0$$

$$(x - 1)^2(x - 1) = 0$$

$$x^4 + 2x^3 - 2x - 1 = 0$$

$$(x + 1)^2(x - 1) = 0$$

$$x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0$$

$$(x - 1)^2(x + 1) = 0$$

$$x^3 - x^2 - x + 1 = 0$$

Dla nauczyciela

Autor: Jolanta Schilling

Przedmiot: Matematyka

Temat: Równanie wielomianowe dające się sprowadzić do postaci iloczynowej za pomocą wzorów skróconego mnożenia

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

III. Równania i nierówności. Zakres podstawowy.

Uczeń:

6) rozwiązuje równania wielomianowe postaci $W(x) = 0$ dla wielomianów doprowadzonych do postaci iloczynowej lub takich, które się dają doprowadzić do postaci iloczynowej metodą wyłączania wspólnego czynnika przed nawias lub metodą grupowania.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- sprowadza równania wyższych stopni do postaci iloczynowej za pomocą wzorów skróconego mnożenia
- rozwiązuje równania wielomianowe dające się sprowadzić do postaci iloczynowej za pomocą wzorów skróconego mnożenia
- tworzy algorytmy rozwiązywania równań różnych typów

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- wędrujące plakaty
- dyskusja

Formy pracy:

- praca w grupach
- praca w parach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami i dostępem do Internetu, słuchawki
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć oraz wspólnie z uczniami ustala kryteria sukcesu.
2. Wybrani przez nauczyciela uczniowie przypominają metody rozkładu wielomianu na czynniki.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie w grupach 4 osobowych pracują metodą wędrujących plakatów. Celem jest przypomnienie poznanych wzorów skróconego mnożenia. Rozpoczyna grupa wybrana losowo – zapisuje na plakacie pierwszy wzór skróconego mnożenia i wyrażenie algebraiczne ilustrujące wykorzystanie tego wzoru. Kolejna grupa dodaje swój przykład itd. W ten sposób uczniowie przypominają wzory skróconego mnożenia na kwadraty i sześciiany wyrażeń.
2. Uczniowie w parach oglądają film samouczek i zapoznają się z treściami zapisanymi w Przeczytaj. Następnie omawiają pozyskane informacje wraz z nauczycielem.
3. Uczniowie w parach rozwiązują zadania interaktywne 1 – 6. Wspólnie omawiają odpowiedzi.

Faza podsumowująca:

1. Jako podsumowanie nauczyciel zadaje uczniom pytania dotyczące rozwiązywania równań wielomianowych z wykorzystaniem wzorów skróconego mnożenia.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, udzielając im tym samym informacji zwrotnej.

Praca domowa:

Uczniowie rozwiązują ćwiczenia 7 i 8 z sekcji „Sprawdź się”.

Materiały pomocnicze:

[Wzory skróconego mnożenia](#)

Wskazówki metodyczne:

Film samouczek można wykorzystać przy okazji omawiania sposobów wykorzystania wzorów skróconego mnożenia.