



Kąty przyległe, wierzchołkowe, naprzemianległe i odpowiadające

Zasób zawiera definicje, twierdzenia i ilustracje interaktywne: kąty przyległe, kąty wierzchołkowe, kąty odpowiadające, kąty naprzemianległe, pary kątów naprzemianległych, pary kątów odpowiadających. Ilustracje interaktywne - konstrukcja kątów naprzemianległych i odpowiadających. Ćwiczenie interaktywne - uzupełnianie miary kąta dla dwóch prostych równoległych przeciętych trzecią.

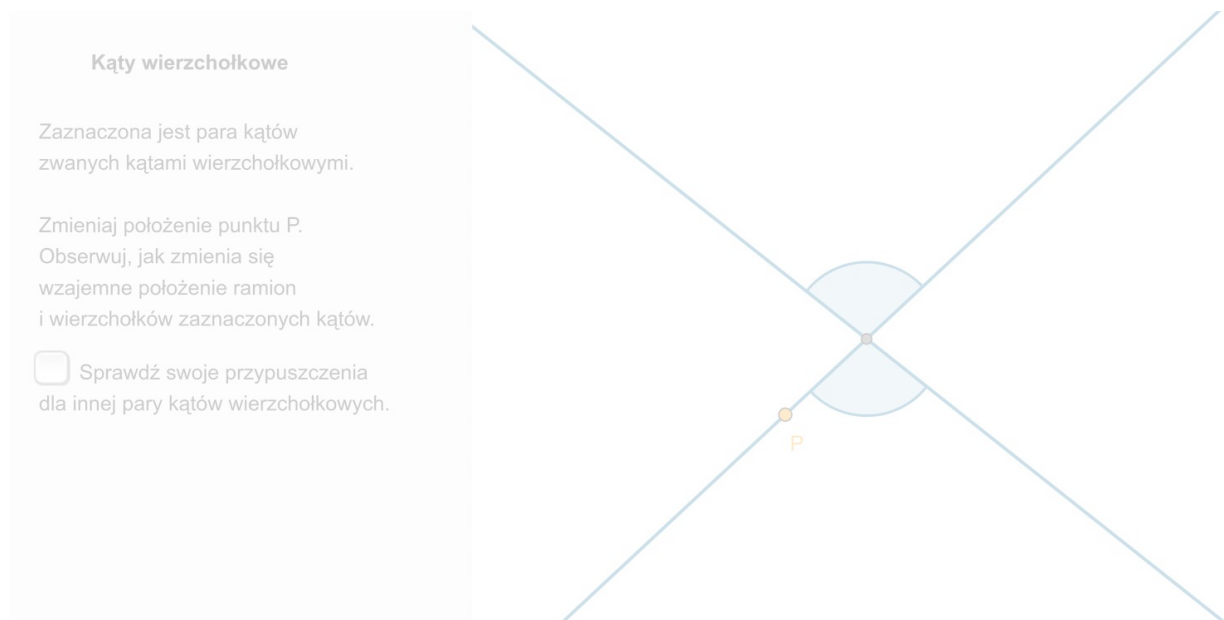
Kąty przyległe, wierzchołkowe, naprzemianległe i odpowiadające

Analizując przykłady zawarte w tym materiale poznasz:

- kąty wierzchołkowe i przyległe oraz ich własności,
- kąty przy dwóch prostych równoległych przeciętych trzecią prostą.

Polecenie 1

Zapoznaj się z apletem przedstawiającym kąty wierzchołkowe. Sprawdź, jak zmienia się wzajemne położenie ramion i wierzchołków zaznaczonych kątów.



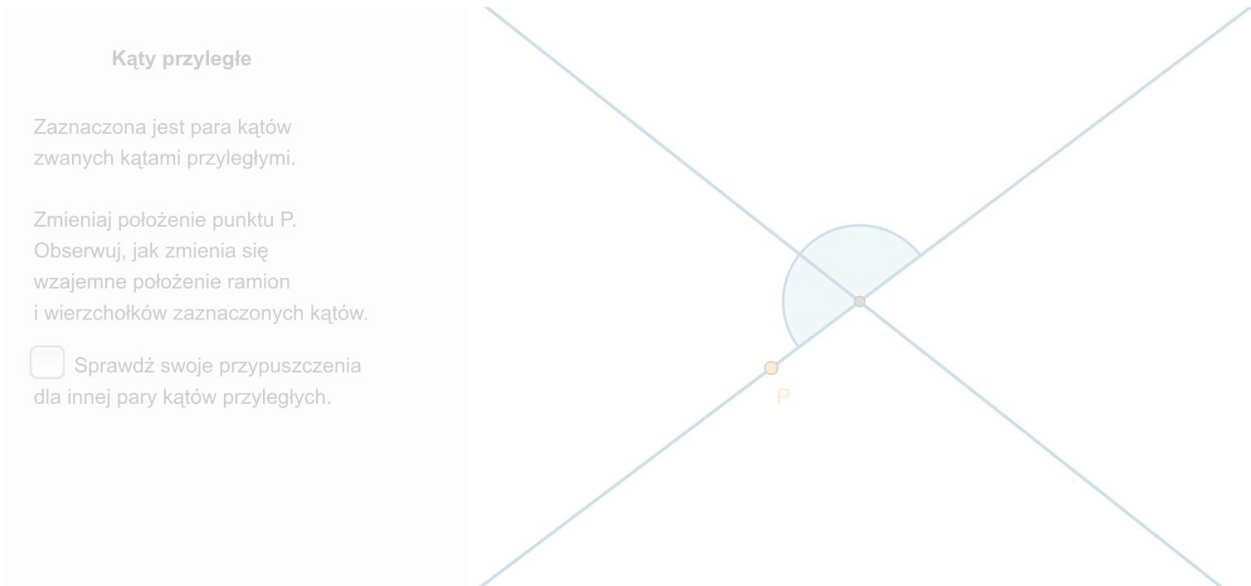
Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/b/P14EhGKKf>

Wielokaty na płaszczyźnie. Związki miarowe_katy wierzchołkowe bez miar

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Polecenie 2

Zapoznaj się z apletem przedstawiającym kąty przyległe. Sprawdź, jak zmienia się wzajemne położenie ramion i wierzchołków zaznaczonych kątów.



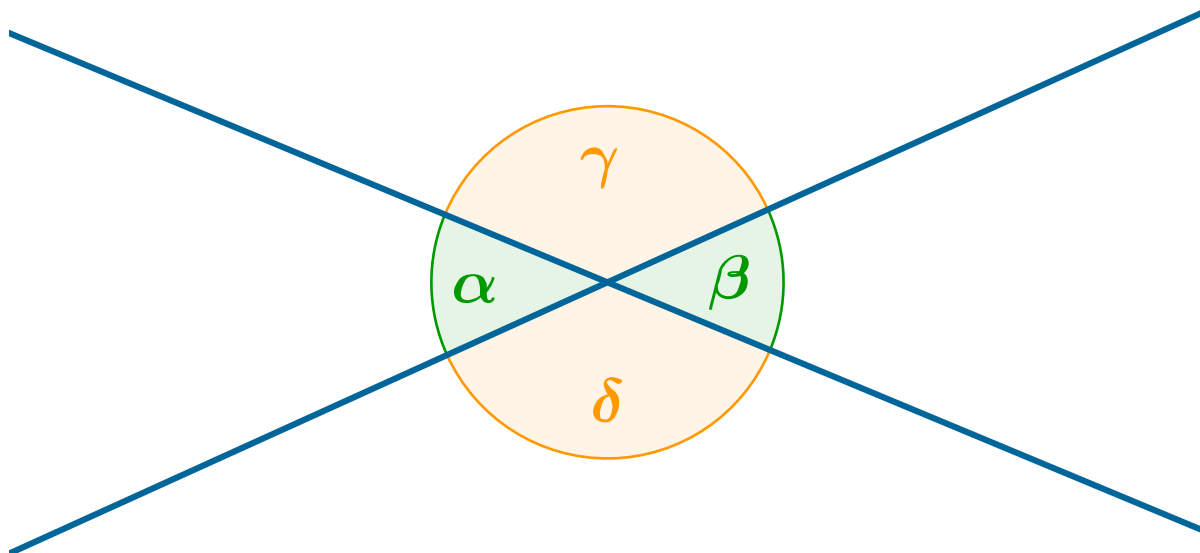
Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/b/P14EhGKKf>

Wielokaty na płaszczyźnie. Związki miarowe_katy przyległe_bez miar

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Definicja: Kąty przyległe i wierzchołkowe

- Kąty przyległe to dwa kąty, które mają jedno ramię wspólne, a pozostałe ramiona dopełniają się do prostej.
- Kąty wierzchołkowe to dwa kąty, które mają wspólny wierzchołek i przedłużeniem ramion jednego kąta są odpowiednie ramiona drugiego kąta.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Na przykład α i γ na rysunku są kątami przyległymi. Pary kątów wierzchołkowych to α i β oraz γ i δ .

Polecenie 3

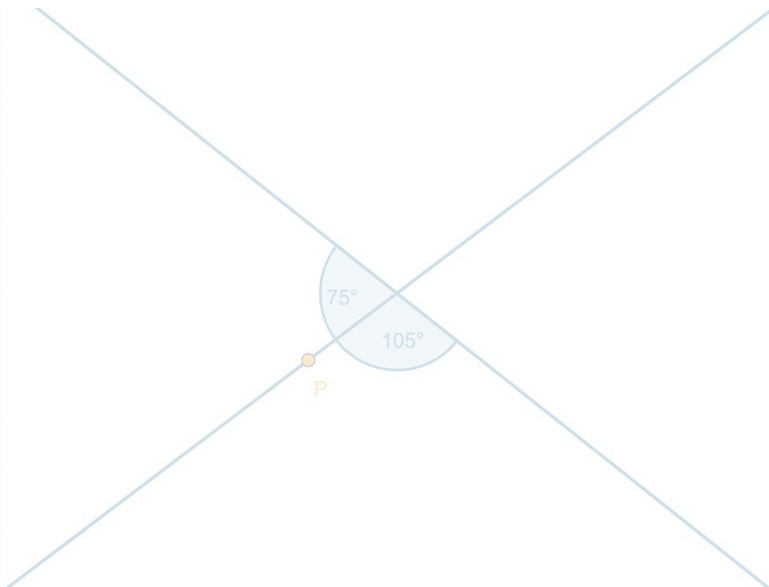
Zapoznaj się z apletem przedstawiającym kąty przyległe. Sprawdź, jak zmienia się suma miar zaznaczonych kątów.

Kąty przyległe

Zaznaczona jest para kątów zwanych kątami przyległymi.

Zmieniaj położenie punktu P.
Obserwuj, jak zmienia się suma miar zaznaczonych kątów.

Sprawdź swoje przypuszczenia dla innej pary kątów przyległych.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/b/P14EhGKKf>

G_katy_przylegle

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Twierdzenie: Suma miar kątów przyległych

Suma miar kątów przyległych jest równa 180° .

Wprost z twierdzenia o sumie miar kątów przyległych wynika, że

$$\alpha + \gamma = 180^\circ$$

oraz

$$\beta + \gamma = 180^\circ.$$

Stąd $\alpha = \beta$. Udowodniliśmy w ten sposób następujące twierdzenie.

Polecenie 4

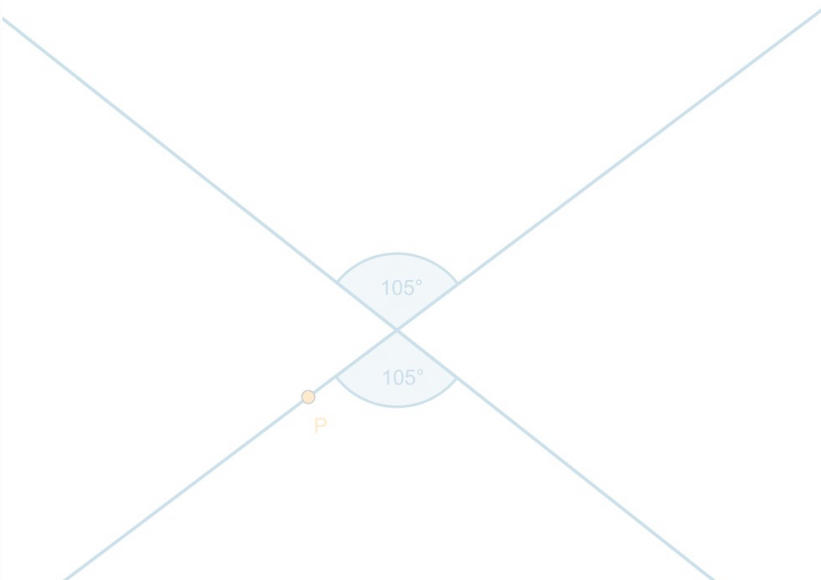
Zapoznaj się z apletem przedstawiającym kąty wierzchołkowe. Sprawdź, jak zmieniają się miary zaznaczonych kątów.

Kąty wierzchołkowe

Zaznaczona jest para kątów zwanych kątami wierzchołkowymi.

Zmieniaj położenie punktu P. Obserwuj, jak zmieniają się miary zaznaczonych kątów.

Sprawdź swoje przypuszczenia dla innej pary kątów wierzchołkowych.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/b/P14EhGKKf>

G_katy_wierzchołkowe

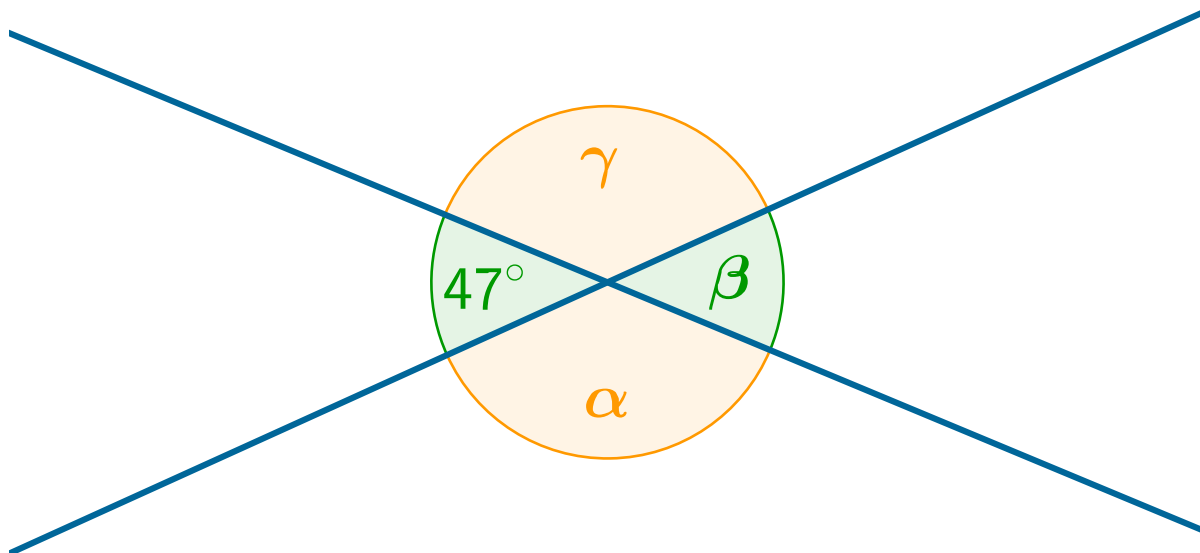
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Twierdzenie: o kątach wierzchołkowych

Kąty wierzchołkowe są równe.

Przykład 1

Obliczmy miary kątów α , β i γ zaznaczonych na rysunku.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Kąty 47° i β są wierzchołkowe, więc $\beta = 47^\circ$. Każdy z kątów α i γ jest przyległy do kąta 47° . Zatem

$$\alpha = \gamma = 180^\circ - 47^\circ = 133^\circ.$$

Przykład 2

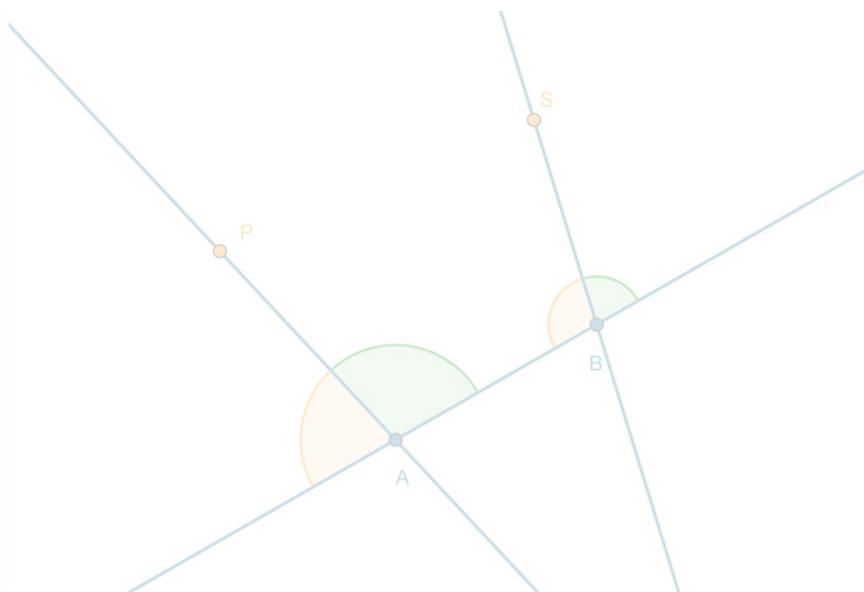
Przykład kątów odpowiadających.

Kąty odpowiadające

Poruszaj punktami P i S.

Obserwuj, jak zmieniają się pary zaznaczonych kątów.

Kąty te nazywamy odpowiadającymi.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/b/P14EhGKKf>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Przykład 3

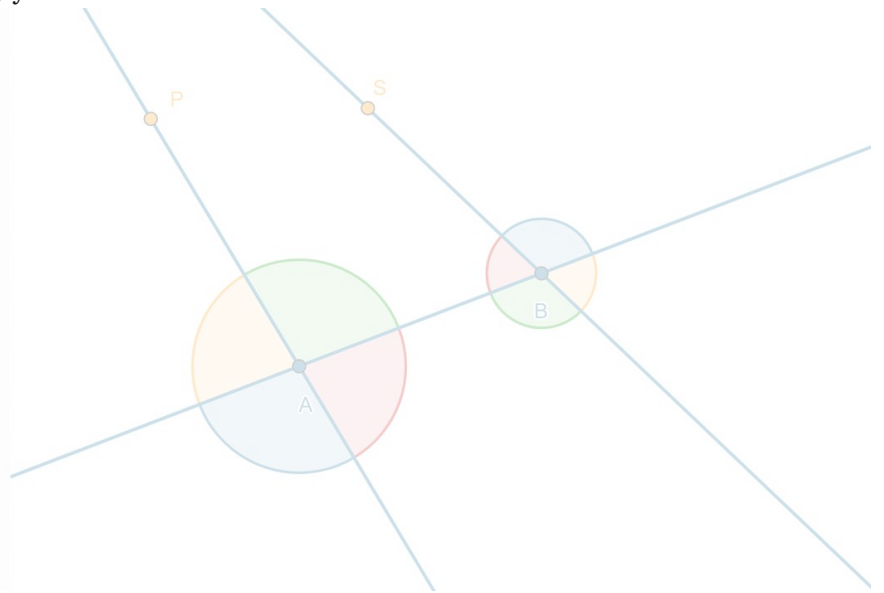
Przykład kątów naprzemianległych.

Kąty naprzemianległe

Poruszaj punktami P i S.

Obserwuj, jak zmieniają się pary zaznaczonych kątów.

Kąty te nazywamy naprzemianległymi.

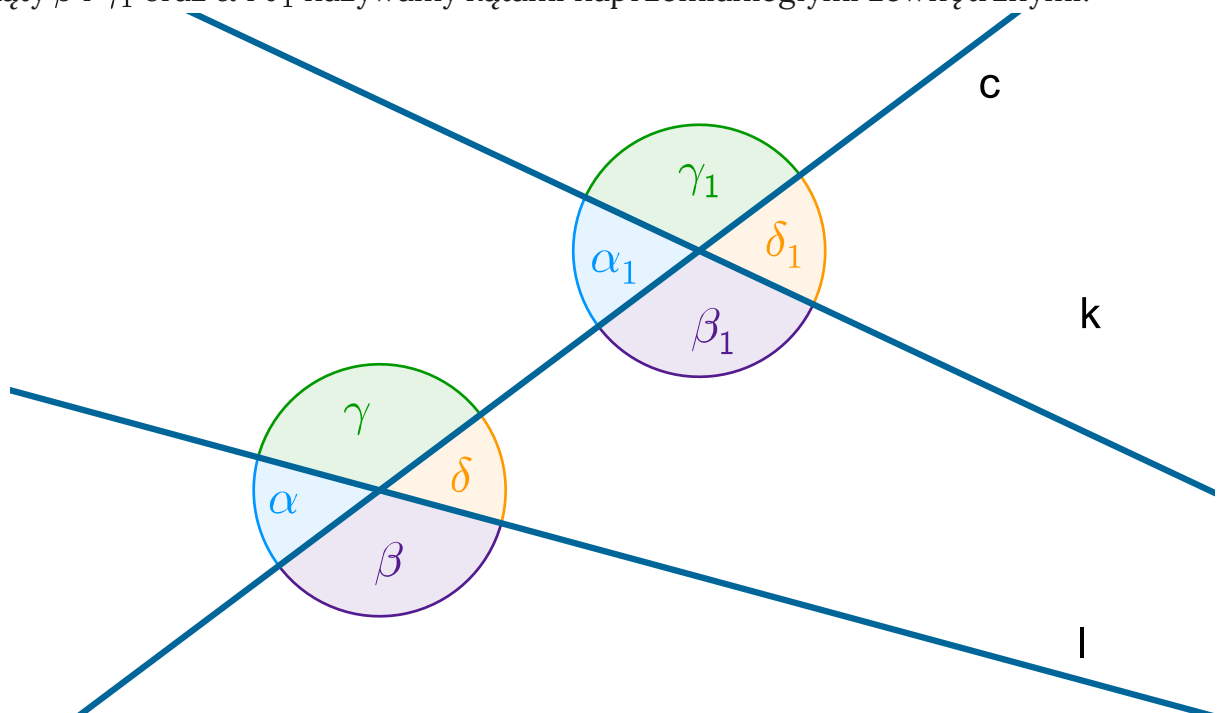


Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/b/P14EhGKKf>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Definicja: Kąty naprzemianległe i odpowiadające

- Kąty: α i α_1 , β i β_1 , γ i γ_1 oraz δ i δ_1 nazywamy kątami odpowiadającymi.
- Kąty α_1 i δ oraz β_1 i γ nazywamy kątami naprzemianległymi wewnętrznymi.
- Kąty β i γ_1 oraz α i δ_1 nazywamy kątami naprzemianległymi zewnętrznymi.

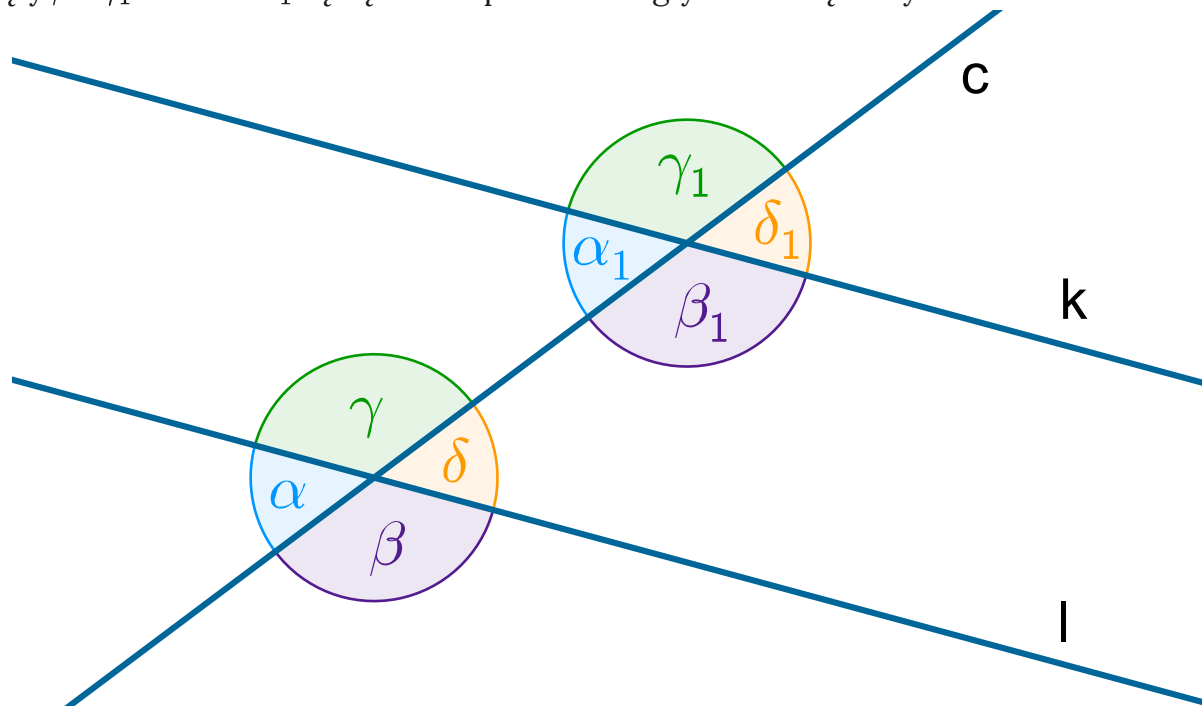


Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Przykład 4

W przypadku, gdy proste k i l są równoległe:

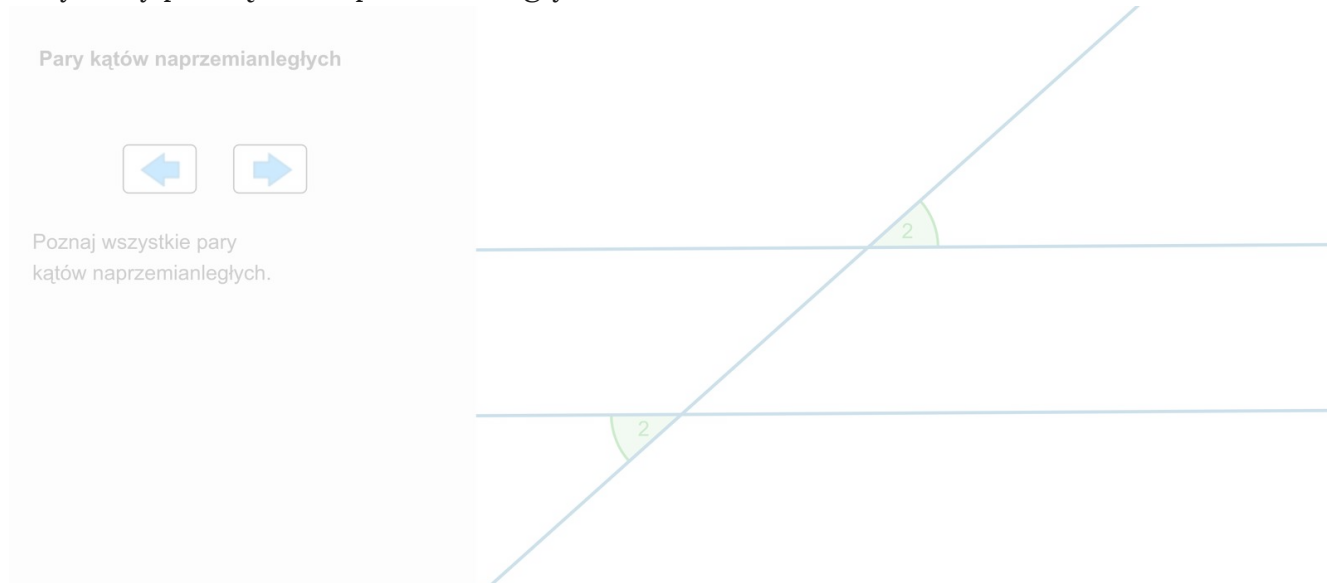
- Kąty α i α_1 , β i β_1 , γ i γ_1 oraz δ i δ_1 są kątami odpowiadającymi.
- Kąty α_1 i δ oraz β_1 i γ są kątami naprzemianległymi wewnętrznymi.
- Kąty β i γ_1 oraz α i δ_1 są kątami naprzemianległymi zewnętrznymi.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Przykład 5

Przykłady par kątów naprzemianległych.

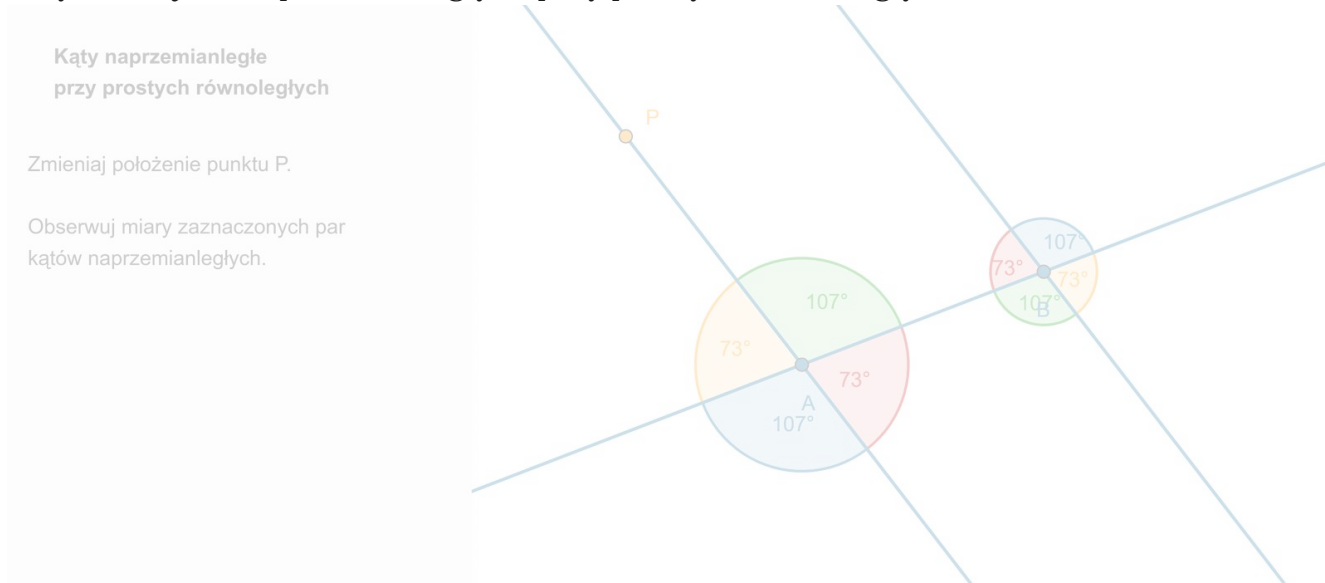


Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/b/P14EhGKKf>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Przykład 6

Przykład kątów naprzemianległych przy prostych równoległych.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/b/P14EhGKKf>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Przykład 7

Przykłady par kątów odpowiadających przy prostych równoległych.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/b/P14EhGKKf>

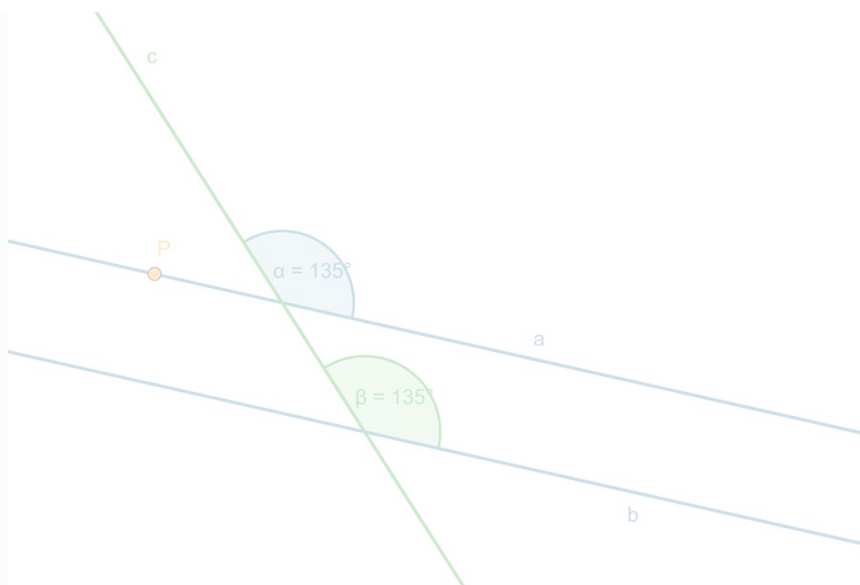
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Przykład 8

Przykład kątów odpowiadających przy prostych równoległych.

Kąty odpowiadające

Proste a i b są równoległe.
Kąty α i β to para kątów odpowiadających.
Zmieniaj położenie punktu P .
Obserwuj zmiany miar kątów α oraz β .



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/b/P14EhGKKf>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Twierdzenie: Proste równoległe

Jeżeli dwie proste równoległe przetniemy trzecią prostą, to tak utworzone kąty naprzemianległe są równe i kąty odpowiadające są równe.

Twierdzenie: Kąty naprzemianległe

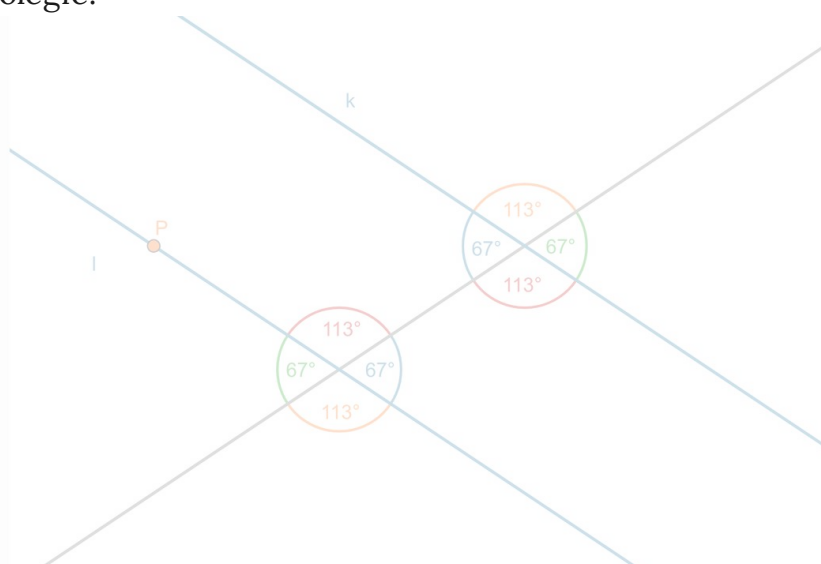
- Jeżeli proste k i l przetniemy trzecią prostą i tak utworzone kąty naprzemianległe są równe, to proste k i l są równoległe.

Ilustracja twierdzenia

etap 2 z 3



Przesuwając punkt P ,
ustaw prostą l tak,
by kąty naprzemianległe były
sobie równe.
Dobrze!
Kąty naprzemianległe są sobie równe.

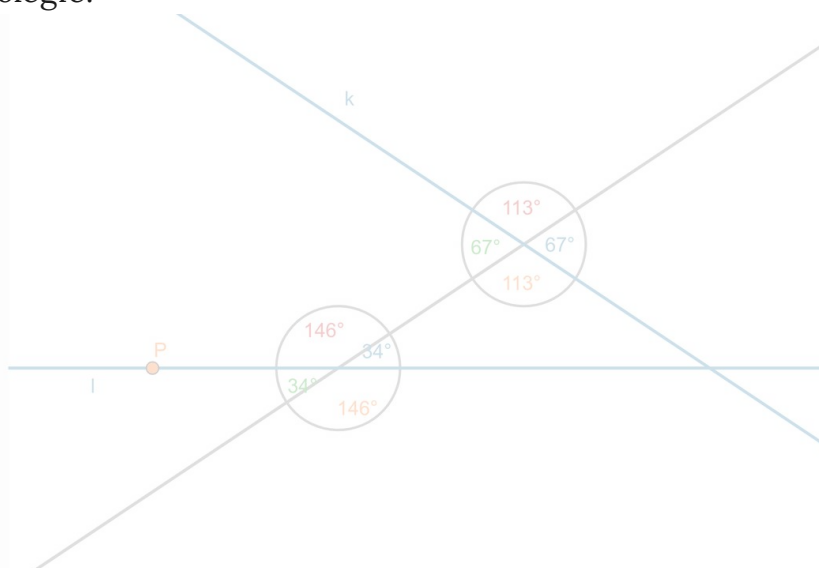


Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/b/P14EhGKKf>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Twierdzenie: Kąty odpowiadające

- Jeżeli proste k i l przetniemy trzecią prostą i tak utworzone kąty odpowiadające są równe, to proste k i l są równoległe.

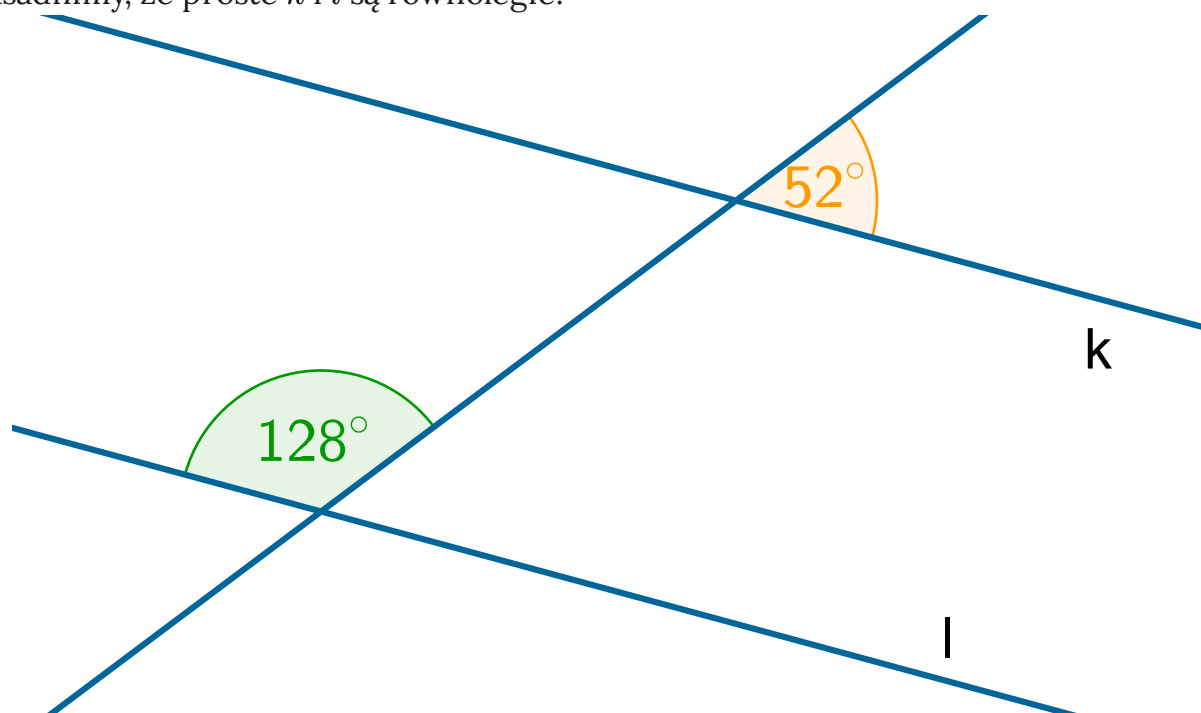


Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/b/P14EhGKKf>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Przykład 9

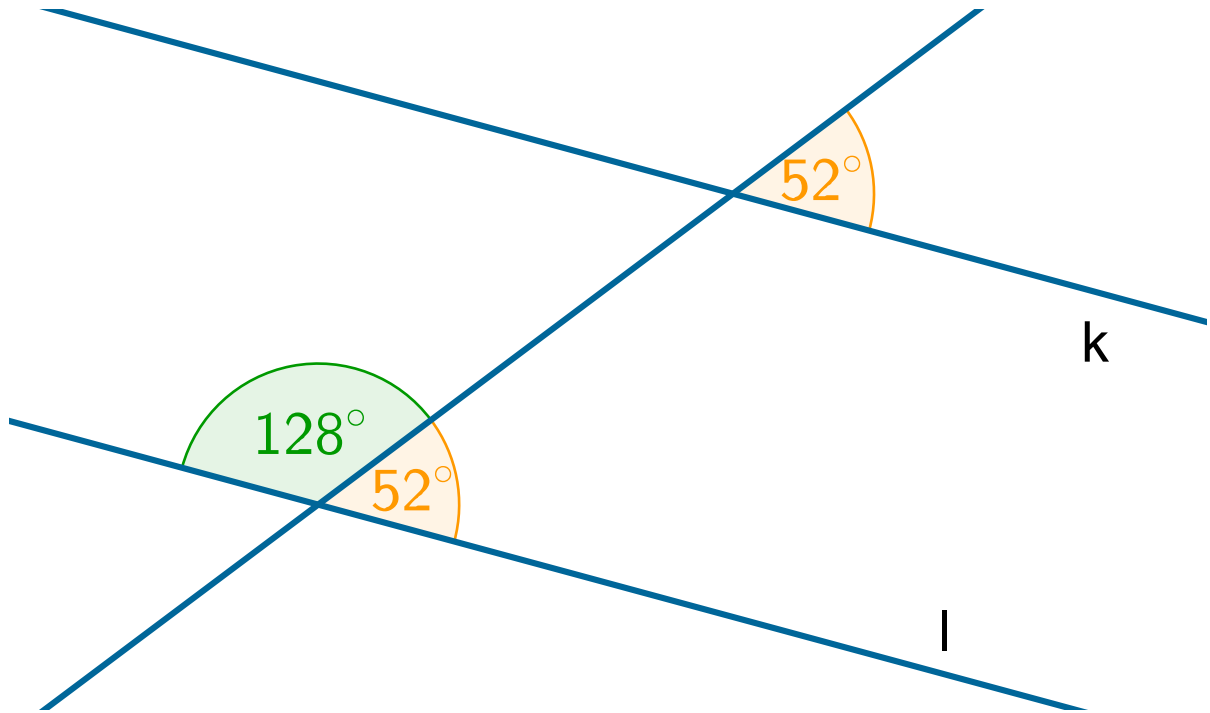
Proste k i l zostały przecięte trzecią prostą. Miary kątów zaznaczono na rysunku. Uzasadnimy, że proste k i l są równoległe.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Zaznaczmy kąt przyległy do kąta 128° . Jego miara jest równa

$$180^\circ - 128^\circ = 52^\circ.$$



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

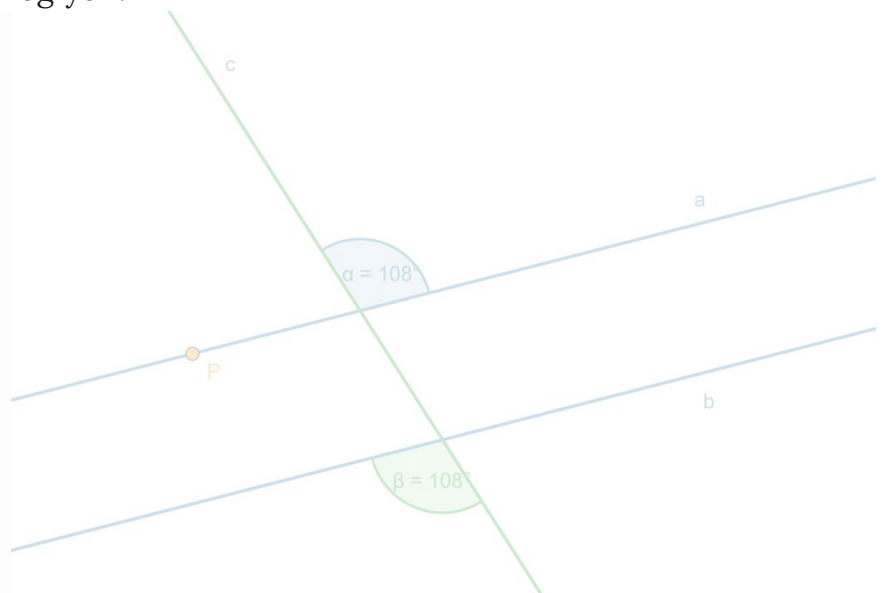
Dwa kąty odpowiadające mają taką samą miarę 52° , skąd wynika, że proste k i l są równoległe.

Przykład 10

Konstrukcja kątów naprzemianległych.

Kąty naprzemianległe

Proste a i b są równoległe.
Kąty α i β to para kątów naprzemianległych.
Zmieniaj położenie punktu P .
Obserwuj zmiany miar kątów α oraz β .



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/b/P14EhGKKf>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Przykład 11

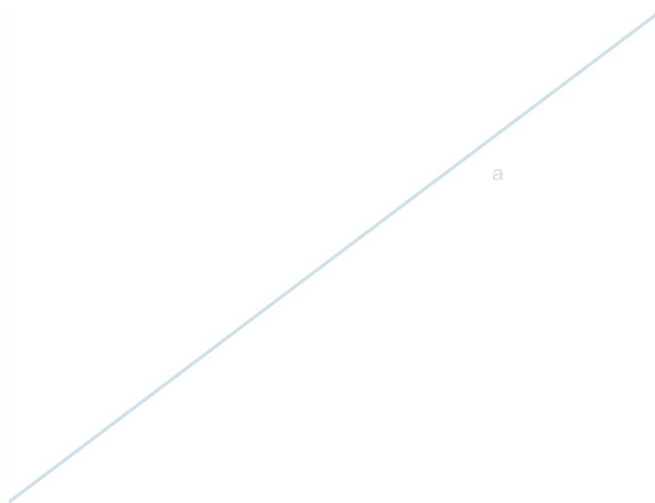
Konstrukcja kątów odpowiadających.

Konstrukcja kątów odpowiadających

etap 1 z 10



Kreślimy prostą a.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/b/P14EhGKKf>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Polecenie 5

Podaj miary kątów przy prostych równoległych.

$\beta = 68^\circ$



Zapisz miary pozostałych kątów.

miara kąta 1 = °

miara kąta 2 = °

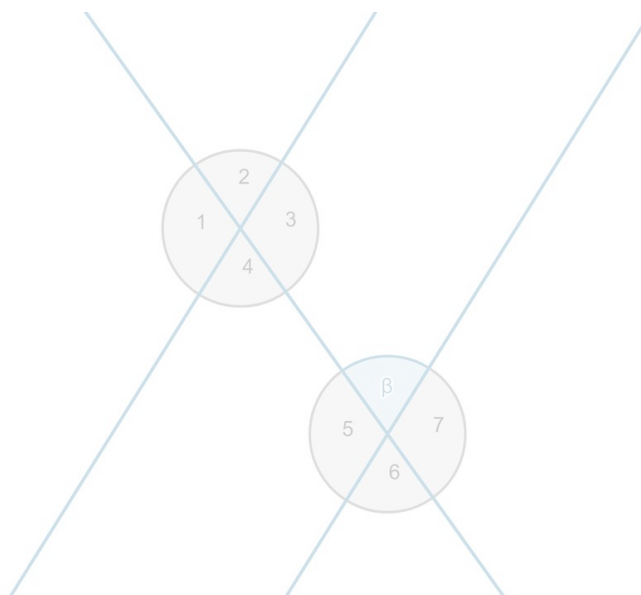
miara kąta 3 = °

miara kąta 4 = °

miara kąta 5 = °

miara kąta 6 = °

miara kąta 7 = °



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/b/P14EhGKKf>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Dwie proste przecięte trzecią prostą – zmienia się położenie trzeciej prostej. Dany jest jeden kąt – należy podać miary pozostałych kątów.