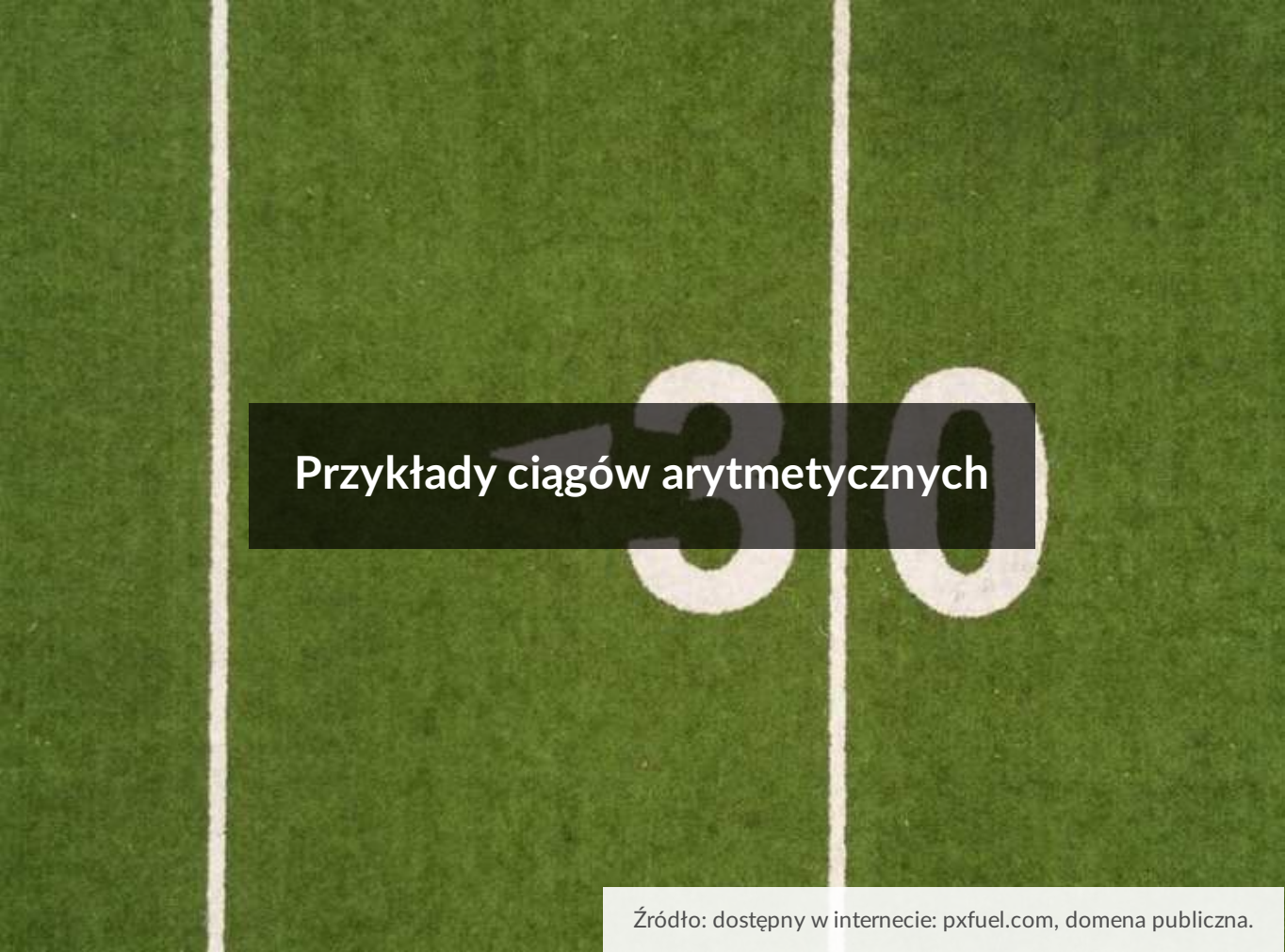




Przykłady ciągów arytmetycznych

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Film samouczek](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Przykłady ciągów arytmetycznych

Źródło: dostępny w internecie: pxfuel.com, domena publiczna.

Okazuje się, że istnieją trójki liczb, których kwadraty tworzą ciąg arytmetyczny.

Na przykład są to liczby:

- 1, 5, 7
 $1^2 + 24 = 5^2$
 $5^2 + 24 = 7^2$
- 2, 10, 14
 $2^2 + 96 = 10^2$
 $10^2 + 96 = 14^2$

Takimi i innymi, równie ciekawymi przykładami ciągów arytmetycznych, będziemy zajmować się w tym materiale.

Twoje cele

- Zapiszesz w postaci ciągu arytmetycznego niektóre zależności liczbowe lub geometryczne.
- Podasz interpretację graficzną danych ciągów arytmetycznych.

- Ustalisz pierwszy wyraz i różnicę ciągu arytmetycznego określonego w różny sposób.
- Wykorzystasz wzory związane z ciągiem arytmetycznym do rozwiązywania problemów geometrycznych i arytmetycznych.

Przeczytaj

Podamy teraz przykłady ciągów arytmetycznych skończonych i nieskończonych. Nim przejdziemy do nowych zagadnień, przypomnienie definicji ciągu arytmetycznego.

Definicja: Ciąg arytmetyczny

Ciągiem arytmetycznym nazywamy ciąg liczbowy co najmniej trzywyrazowy, w którym każdy wyraz, począwszy od drugiego, powstaje przez dodanie do wyrazu poprzedniego liczby r , zwanej różnicą ciągu.

Ważne!

Jeżeli (a_n) jest ciągiem arytmetycznym o różnicy r , to dla dowolnej liczby naturalnej $n > 0$ prawdziwa jest równość:

$$a_{n+1} = a_n + r$$

W tym materiale przyjmować będziemy, że ciąg arytmetyczny określony jest dla $n \in \mathbb{N}_+$, a w niektórych przypadkach dla $n \in \mathbb{N}$.

Ciągi arytmetyczne podzbiorów zbioru liczb naturalnych

Rozważymy na początek ciągi arytmetyczne, których wyrazy są liczbami naturalnymi.

Przykładami takich ciągów, które w ostatnich latach wzbudzają ogromne zainteresowanie matematyków, są ciągi, których wyrazy są liczbami pierwszymi, np.:

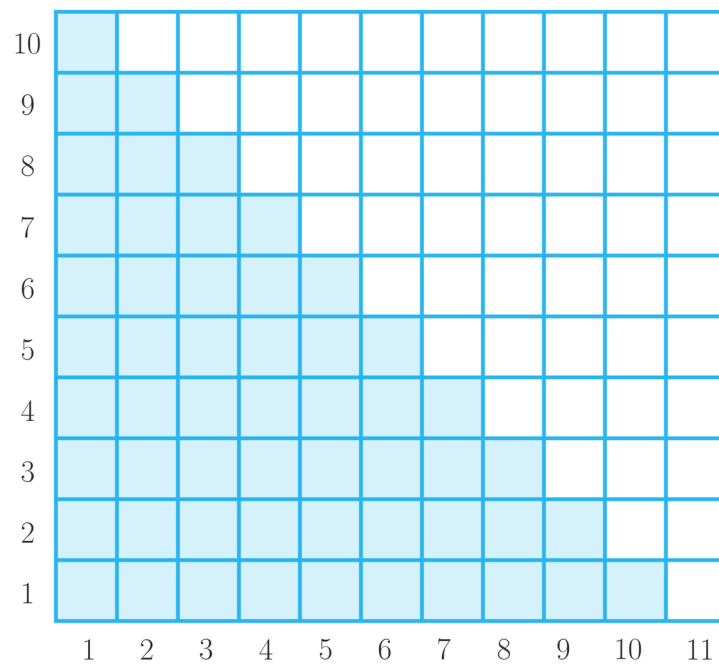
- 5, 11, 17, 23, 29 – ciąg o różnicy 6
- 3, 13, 23 – ciąg o różnicy 10
- 23, 53, 83, 113 – ciąg o różnicy 30
- 13, 103, 193, 283, 373, 463 – ciąg o różnicy 90

Przykład 1

Ciąg (a_n) kolejnych liczb naturalnych dodatnich: 1, 2, 3, 4, ... jest nieskończonym ciągiem arytmetycznym o pierwszym wyrazie 1 i różnicy 1.

Ciąg ten można opisać worem ogólnym:

$$a_n = n$$



Przedstawiając graficznie n początkowych kolejnych wyrazów tego ciągu, można szybko obliczyć ich sumę.

$$1 + 2 = 3 = \frac{2 \cdot 3}{2}$$

$$1 + 2 + 3 = 6 = \frac{3 \cdot 4}{2}$$

...

...

$$1 + 2 + 3 + \dots + 10 = \frac{10 \cdot 11}{2} = 55$$

...

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Przykład 2

Ciąg (b_n) kolejnych liczb naturalnych nieparzystych: $1, 3, 5, 7, \dots, 2n - 1, \dots$ jest ciągiem arytmetycznym o pierwszym wyrazie 1 i różnicy 2.

Ciąg ten można opisać worem ogólnym:

$$b_n = 2n - 1$$

								17
							15	
						13		
					11			
				9				
			7					
		5						
	3							
1								

Interpretując graficznie sumę n kolejnych liczb nieparzystych możemy zapisać, że:

$$1 = 1^2$$

$$1 + 3 = 4 = 2^2$$

$$1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$$

$$1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$$

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25 = 5^2$$

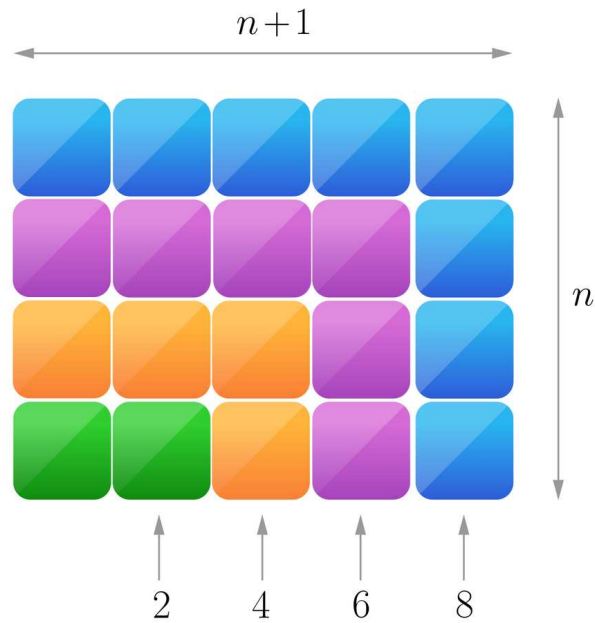
...

...

$$1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 2n - 1 = n^2.$$

Przykład 3

Ciąg (c_n) kolejnych liczb naturalnych parzystych: $2, 4, 6, 8, \dots, 2n, \dots$ jest ciągiem arytmetycznym o pierwszym wyrazie 2 i różnicy 2.



Na podstawie interpretacji graficznej sumy kolejnych liczb parzystych, możemy zapisać:

$$2 = 1 \cdot 2$$

$$2 + 4 = 6 = 2 \cdot 3$$

$$2 + 4 + 6 = 12 = 3 \cdot 4$$

$$2 + 4 + 6 + 8 = 20 = 4 \cdot 5$$

...

...

$$2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n(n + 1).$$

Przykład 4

Ciąg arytmetyczny (a_n) tworzą liczby naturalne dodatnie, większe od 1, które w dzieleniu przez 3 dają resztę 1. Zapišemy wzór ogólny tego ciągu. Obliczymy setny wyraz tego ciągu.

Kolejne wyrazy tego ciągu to:

4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, ...

Ustalamy pierwszy wyraz i różnicę ciągu.

$$a_1 = 4$$

$$r = 7 - 4 = 3$$

Zapisujemy wzór na wyraz ogólny ciągu.

$$a_n = 4 + (n - 1) \cdot 3 = 4 - 3 + 3n = 3n + 1$$

Obliczamy setny wyraz ciągu.

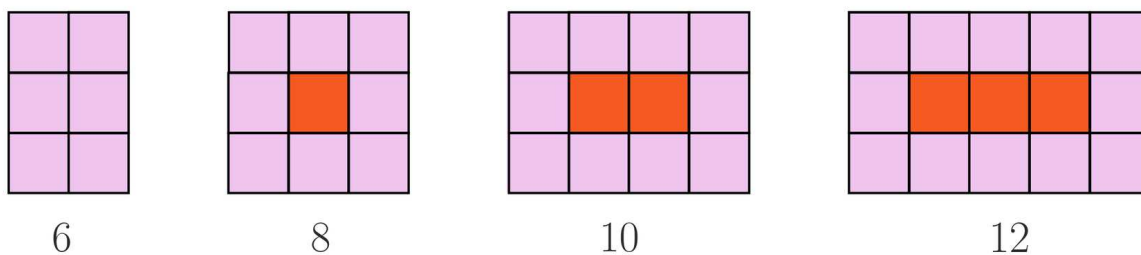
$$a_{100} = 3 \cdot 100 + 1 = 301.$$

Ciągi arytmetyczne przedstawione graficznie

Ciągi arytmetyczne można tworzyć, konstruując odpowiednie figury geometryczne i opisując ich elementy za pomocą liczb.

Przykład 5

Figury na rysunku tworzone są według pewnej reguły. Liczbę figur możemy zwiększać dowolnie.



Zauważmy, że na kolejnych rysunkach ilość kraterów wzrasta o 2.

Liczby kraterów: 6, 8, 10, 12, ... można uznać za kolejne wyrazy ciągu arytmetycznego o pierwszym wyrazie 6 i różnicy 2.

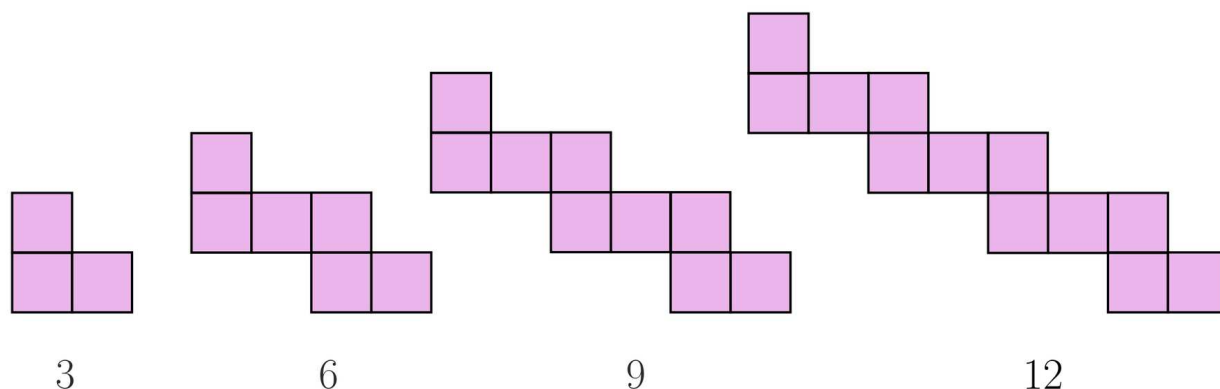
Wzór ogólny ciągu:

$$a_n = 6 + (n - 1) \cdot 2$$

$$a_n = 2n + 4.$$

Przykład 6

Kolejny przykład figur tworzonych według ustalonej reguły, pozwalającej uznać liczy kraterów za kolejne wyrazy ciągu arytmetycznego. Liczbę figur można zwiększać dowolnie.



Liczby elementów kolejnych figur zwiększają się o 3. Wzór ogólny ciągu:

$$a_n = 3 + (n - 1) \cdot 3 = 3n.$$

Ciągi arytmetyczne w kontekście realistycznym

W życiu codziennym często spotykamy się z sytuacjami powtarzającymi się cyklicznie, które można opisać za pomocą ciągów arytmetycznych.

Na przykład:

- co 7 dni jest czwartek,
- co 12 miesięcy jest styczeń.
- temperatura powietrza wzrasta o 1°C w głąb ziemi co około 33 m.

Przykład 7

Komety okresowe, to komety, których okres obiegu wokół Słońca jest mniejszy od 200 lat.

Najbardziej znane to Encke (okres obiegu wokół Słońca to ok. 3,3 roku), Faye (z rodziny komet Jowisza) i oczywiście kometa Halleya.

Kometa Halleya to pierwsza zidentyfikowana kometa krótkookresowa. Jej okres obiegu wokół Słońca wynosi ok. 76 lat.

W XX wieku kometę obserwowano w 1910 roku. Obliczymy, ile razy będzie można zaobserwować kometę w XXI wieku.

Daty kolejnych zbliżeń do Słońca można uznać za kolejne wyrazy ciągu arytmetycznego (a_n) , którego pierwszym wyrazem jest 1910, a różnicą 76.

Wzór ogólny tego ciągu jest więc następujący:

$$a_n = 1910 + (n - 1) \cdot 76$$

Wiek XXI rozpoczął się w 2001 r., a skończy w 2100 r.

Rozwiązujemy więc nierówność:

$$2001 \leq 1910 + (n - 1) \cdot 76 \leq 2100$$

$$91 \leq 76n - 76 \leq 190$$

$$167 \leq 76n \leq 266$$

$$2, 19 \dots \leq n \leq 3, 5$$

Ponieważ n jest liczbą naturalną, zatem $n = 3$.

W XXI wieku tylko raz będzie można zaobserwować kometę. Z naszych obliczeń wynika, że w 2062 r., ponieważ

$$1910 + (3 - 1) \cdot 76 = 2062$$

Nasze obliczenia są przybliżone – naukowcy obliczyli, że prawdopodobnie kometa przyleci wcześniej – bo już w 2061 r.

Obliczymy jeszcze, kiedy kometa była obserwowana ostatni raz.

$$1910 + 76 = 1986$$

Ostatni raz kometę można było obserwować w 1986 roku.

Słownik

ciąg arytmetyczny

ciągami arytmetycznymi nazywamy ciągi liczbowe co najmniej trzywyrazowe, w którym każdy wyraz, począwszy od drugiego, powstaje przez dodanie do wyrazu poprzedniego liczby r , zwanej różnicą ciągu

Film samouczek

Polecenie 1

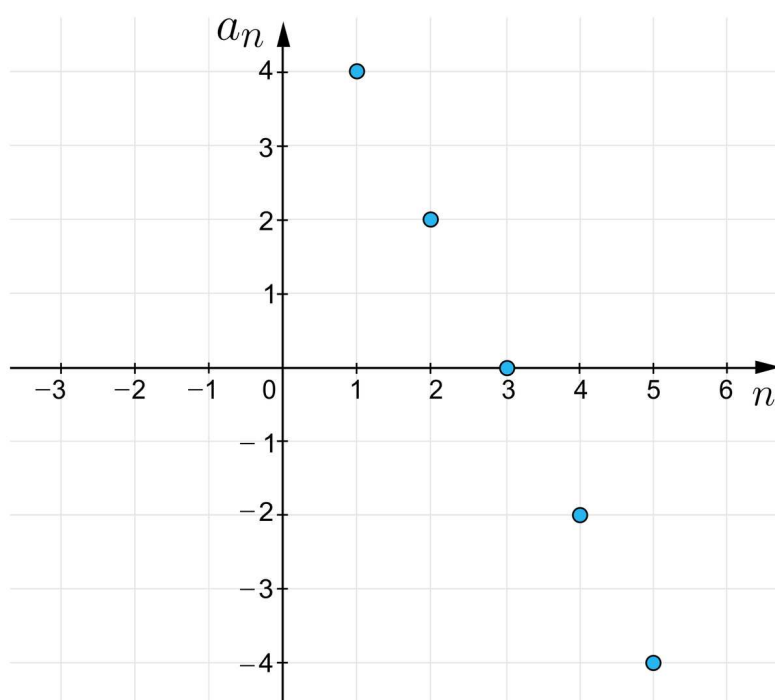
Zapoznaj się z przykładami ciągów przedstawionymi w filmie samouczku. Spróbuj najpierw rozwiązać samodzielnie pokazane tam przykłady, a następnie porównaj z rozwiązaniami.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/Dl7i6ju9V>

Film nawiązujący do treści lekcji dotyczącej ciągów arytmetycznych.

Polecenie 2

Na rysunku przedstawiono fragment wykresu ciągu (a_n) . Podaj wzór ogólny ciągu.



Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Zaznacz poprawną odpowiedź. Ciąg arytmetyczny (a_n) tworzą liczby naturalne dodatnie, większe od 2, które w dzieleniu przez 5 dają resztę 2. Setny wyraz tego ciągu to:

☐ 707

☐ 705

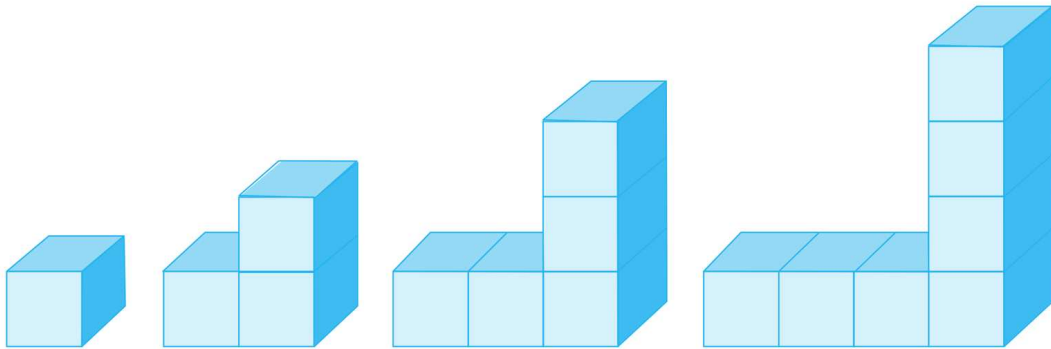
☐ 502

☐ 507

Ćwiczenie 2



Łukasz tworzy bryły z klocków według pewnej reguły. Cztery początkowe bryły przedstawiono na rysunku. Liczby klocków użytych do budowy kolejnych brył są wyrazami pewnego ciągu arytmetycznego (a_n) .



Zaznacz poprawną odpowiedź. Wzór ogólny tego ciągu to:

☐ $a_n = 2(n - 1).$

☐ $a_n = 2(n + 1).$

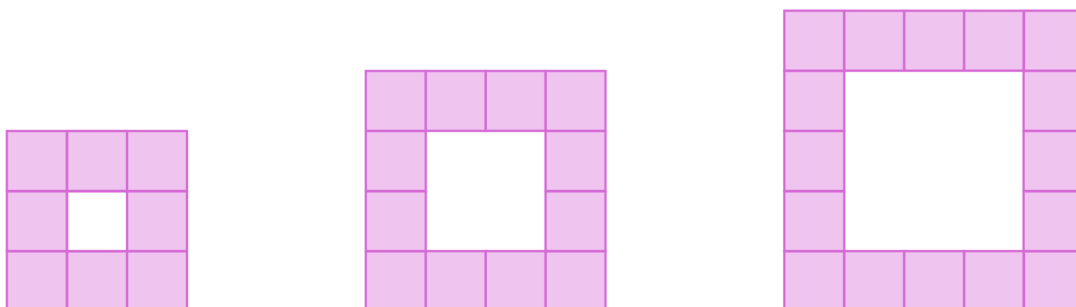
☐ $a_n = 2n - 1.$

☐ $a_n = 2n + 1.$

Ćwiczenie 3



Kolorowe „ramki” tworzone są według pewnej reguły. Na rysunku przedstawiono trzy pierwsze z tych „ramek”. Liczby pomalowanych kwadratów są wyrazami ciągu arytmetycznego (b_n) .



Zaznacz, które zdanie jest prawdziwe, a które fałszywe.

	Prawda	Fałsz
Piętnasta ramka składa się z 64 kwadratów.	☐	☐
Różnica tego ciągu jest równa 8.	☐	☐
Trzeci wyraz ciągu (b_n) jest dwa razy mniejszy od wyrazu siódmego.	☐	☐
Tylko 24 wyrazy tego ciągu są mniejsze od 100.	☐	☐

Ćwiczenie 4



Uzupełnij zdania, wpisując odpowiednie liczby.

Jedynym pięciowyrazowym ciągiem liczb pierwszych o różnicy

jest ciąg (5, 11, 17, 23, 29).

Jedynym pięciowyrazowym ciągiem liczb pierwszych o różnicy 12 jest ciąg

(5, , 29, , 53).

Jedynym pięciowyrazowym ciągiem liczb pierwszych o różnicy

jest ciąg (5, 47, , , 173).

Ćwiczenie 5



Uzupełnij zdania, przeciągając odpowiednie liczby.

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 39 = \boxed{}$$

$$1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 45 = \boxed{}$$

1600

780

529

1035

2025

Ćwiczenie 6



Ewa w układzie współrzędnych przedstawiła wykres ciągu arytmetycznego (a_n) określonego wzorem $a_n = -3n + 10$ dla $n \geq 1$. Uzupełnij zdania, wpisując odpowiednie liczby.

1. Tylko punkty wykresu znajdują się powyżej osi X .
2. Do wykresu ciągu należy punkt (, -11).
3. Jeśli druga współrzędna punktu należącego do wykresu jest równa 4, to pierwsza jest równa .

Ćwiczenie 7



Funkcja f określona jest wzorem $f(x) = 4x^2 - 2x + 1$. Wykaż, że ciąg (a_n) określony wzorem $a_n = f(n+1) - f(n)$ jest ciągiem arytmetycznym dla $n \geq 1$.

Ćwiczenie 8



Punkty $A = (1, -9)$ i $B = (4, 3)$ należą do wykresu ciągu arytmetycznego (a_n) . Znajdź wzór ogólny tego ciągu.

Dla nauczyciela

Autor: Justyna Cybulska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Przykłady ciągów arytmetycznych

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

VI. Ciągi. Zakres podstawowy.

Uczeń:

- 1) oblicza wyrazy ciągu określonego wzorem ogólnym;
- 3) w prostych przypadkach bada, czy ciąg jest rosnący, czy malejący;
- 4) sprawdza, czy dany ciąg jest arytmetyczny lub geometryczny;
- 5) stosuje wzór na n -ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego;
- 7) wykorzystuje własności ciągów, w tym arytmetycznych i geometrycznych, do rozwiązywania zadań, również osadzonych w kontekście praktycznym.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- zapisuje w postaci ciągu arytmetycznego niektóre zależności liczbowe lub geometryczne
- podaje interpretację graficzną danych ciągów arytmetycznych
- ustala pierwszy wyraz i różnicę ciągu arytmetycznego określonego w różny sposób

- wykorzystuje wzory związane z ciągiem arytmetycznym do rozwiązywania problemów arytmetycznych

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- pytajnik
- dywanik analogii

Formy pracy:

- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każdy uczeń miał do dyspozycji komputer

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Uczniowie metodą pytajnika powtarzają wiadomości dotyczące ciągów arytmetycznych i sposobów opisywania ciągów (jeden wytypowany przez nauczyciela uczeń zadaje pytania, a drugi z uczniów wskazuje, kto ma na dane pytanie odpowiedzieć).
2. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć, uczniowie ustalają kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie w małych grupach pracują metodą dywanika analogii.
2. Opierając się na wiadomościach dotyczących ciągów, wymyślają przykłady ciągów arytmetycznych opisanych różnymi sposobami, wzorując się na wiadomościach uzyskanych w czasie zajęć pokazujących sposoby opisywania ciągów.
3. Zadaniem każdej grupy jest podanie przykładów ciągów arytmetycznych – pierwszej grupy o wyrazach będących liczbami naturalnymi, drugiej grupy – przedstawionych graficznie, trzeciej grupy – opisanych kontekstem realistycznym. Grupy mogą przy tym wykorzystywać wiadomości zapisane w sekcji „Przeczytaj”.
4. Grupy prezentują swoje pomysły i wspólnie opracowują mapę przykładów ciągów arytmetycznych.
5. Uczniowie w parach zapoznają się z filmem samouczkiem i rozwiązują ćwiczenia 1-4.

Faza podsumowująca:

1. Wskazany przez nauczyciela uczeń przedstawia krótko najważniejsze elementy zajęć, poznane wiadomości, ukształtowane umiejętności. Liderzy grup dzielą się refleksjami na temat pracy grup, napotykanymi trudnościami, ciekawymi pomysłami, sposobu pracy, itp.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, ocenia pracę grup i par.

Praca domowa:

Zadaniem uczniów jest wykonanie ćwiczeń interaktywnych 5 – 8 z sekcji „Sprawdź się”.

Materiały pomocnicze:

[Ciąg arytmetyczny](#)

Wskazówki metodyczne:

Film samouczek może być wykorzystany na zajęciach poświęconych ustalaniu, czy dany ciąg jest arytmetyczny.