

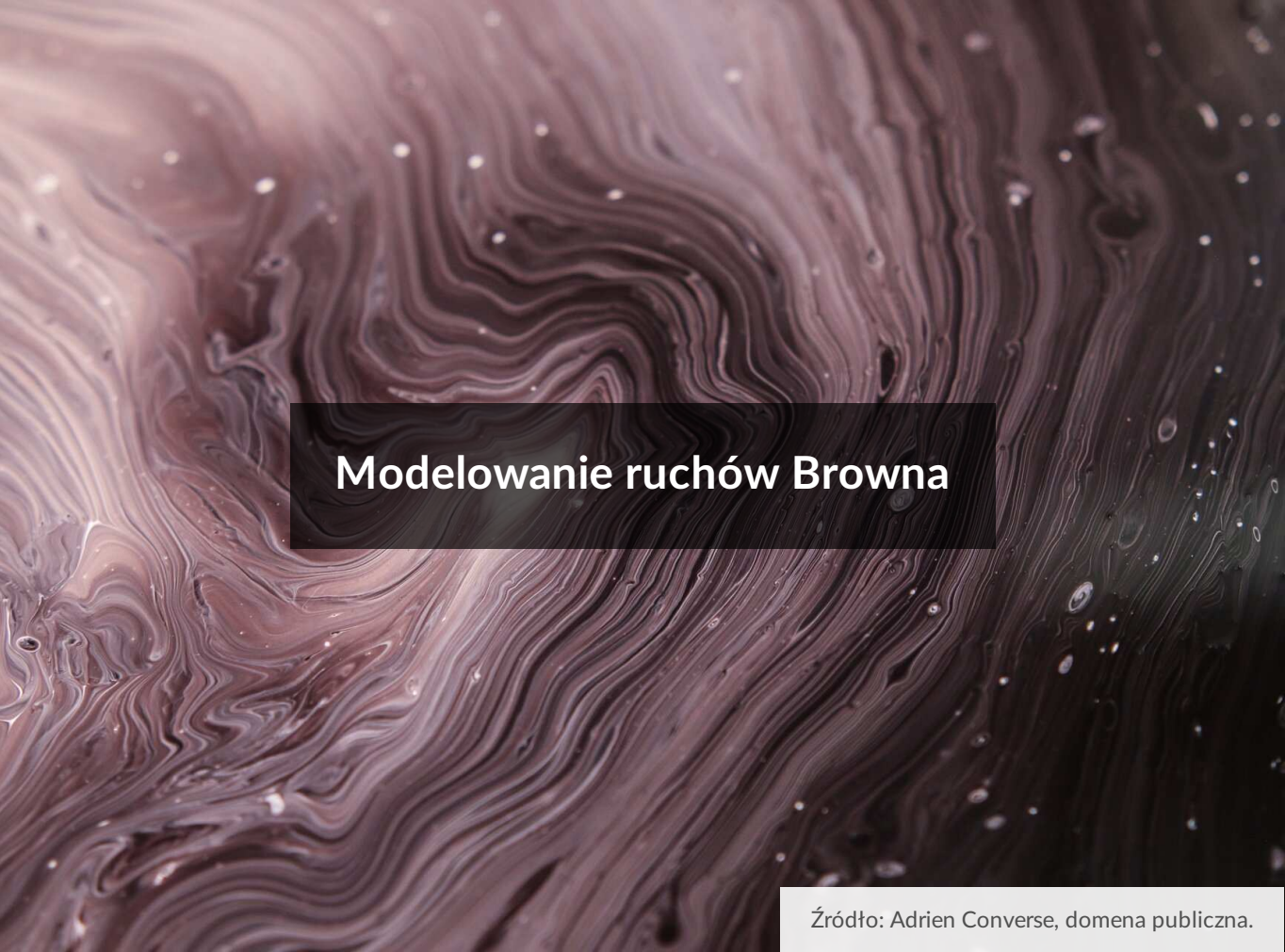


Modelowanie ruchów Browna

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Aplet](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)

Bibliografia:

- Źródło: *Geometryczny ruch Browna*, dostępny w internecie: kupakcje.pl [dostęp 9.06.2021].



Modelowanie ruchów Browna

Źródło: Adrien Converse, domena publiczna.

W 1827 roku biolog Robert Brown obserwował przez mikroskop pyłki kwiatowe w zawiesinie wodnej. Zauważył, że znajdują się one w nieustannym, chaotycznym ruchu. Te chaotyczne ruchy cząstek w płynie, wywołane zderzeniami zawiesiny z cząsteczkami płynu, nazwano ruchami Browna.

W tym e-materiale właśnie nimi się zajmiemy.

Omawiany w tym e-materiale problem będzie stanowił doskonałą okazję, aby przeprowadzić symulację zjawiska, którego model jest opisany matematycznie. W trakcie symulacji wykorzystamy [liczby pseudolosowe](#).

Implementację modelowania ruchów Browna w wybranych językach programowania znajdziesz w e-materiałach:

- [Modelowanie ruchów Browna w języku C++](#),
- [Modelowanie ruchów Browna w języku Java](#),
- [Modelowanie ruchów Browna w języku Python](#).

Więcej zadań? Przejdź do [Modelowanie ruchów Browna – zadania](#).

Twoje cele

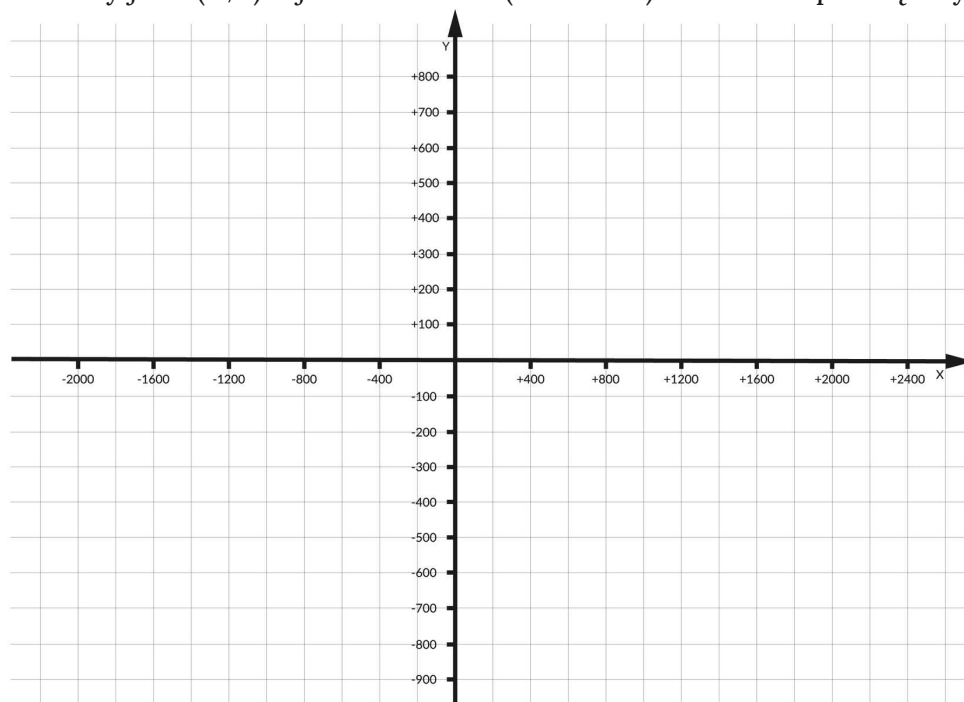
- Zwizualizujesz zaawansowane procesy.
- Zbudujesz programistyczny model zjawiska fizycznego.
- Przeanalizujesz sposób wyznaczania kolejnych pozycji cząsteczki, która porusza się zgodnie z teorią ruchów Browna.

Modelowanie ruchów Browna

Pierwsze matematyczne modele ruchów Browna podali niezależnie od siebie Albert Einstein i polski fizyk, Marian Smoluchowski. Obydwaj naukowcy stwierdzili, że pyłek kwiatowy przemieszcza się z miejsca na miejsce, ponieważ jest nieustannie bombardowany przez cząsteczki wody; cały proces ma charakter przypadkowy.

W tym e-materiale przedstawimy ruchy Browna w postaci graficznej, jako linię złożoną z odcinków łączących punkty w kartezjańskim układzie współrzędnych. Każdy punkt będzie odpowiadał położeniu cząsteczki na kolejnym etapie symulacji.

Kartezjański układ współrzędnych to dwie prostopadłe do siebie osie X oraz Y. Punkt ich przecięcia oznaczamy jako (0,0) – jest to środek (tzw. zero) układu współrzędnych.



Źródło: Contentplus.pl Sp. z o.o., licencja: CC BY-SA 3.0.

Wstępnie przyjmiemy kilka założeń:

- umieścimy cząsteczkę na początku układu współrzędnych $(0, 0)$,
- kierunek ruchu będzie wyznaczony przez losowy kąt φ ,
- cząsteczka będzie przemieszczała się skokami na odległość r , zależną od kąta φ ,
- kolejne współrzędne cząsteczki (x, y) wyliczymy ze wzorów:

$$\varphi \in (0, 2\pi)$$

$$X_n = X_{n-1} + (r \cdot \cos(\varphi))$$

$$Y_n = Y_{n-1} + (r \cdot \sin(\varphi))$$

W rezultacie otrzymamy tablice (listy) współrzędnych X_n oraz Y_n . Pary te wskazują położenie cząsteczki po każdym skoku w przypadkowym kierunku.

Eksperyment

W celu zaobserwowania ruchów Browna, możemy przeprowadzić prosty eksperyment. Do szklanki z wodą wlewamy kilka kropli syropu. Zauważyć możemy wówczas samoistne mieszanie się płynów. Zjawisko to nazywane jest dyfuzją i spowodowane jest w dużej mierze ruchami Browna.

Kolejny eksperyment, który można wykonać w domu, polega na umieszczeniu kropli oleju w misce z wodą. Zaobserwować możemy, że kropla oleju nie pozostaje bez ruchu. Po kilku minutach cząsteczka przemieści się w inne miejsce. Po następnych kilku minutach w jeszcze inne itd. Przemieszczanie to można wytłumaczyć występowaniem ruchów Browna.

Modelowanie ruchów Browna

Model programistyczny, który przyjmujemy, będzie polegał na utworzeniu cząsteczki oraz umieszczeniu jej w płynie. W procesie losowego bombardowania cząsteczki przez cząsteczki płynu będzie przemieszczała się ona o określoną odległość. Wynikiem działania programu będzie wskazanie końcowego położenia cząsteczki.

Cząsteczkę, którą będziemy modelować, możemy opisać dwoma zmiennymi oznaczającymi jej współrzędne w układzie kartezjańskim. Jako jej początkowe położenie przyjmujemy punkt $(0, 0)$.

```
1 // utworzenie cząsteczki
2 x = 0.0
3 y = 0.0
```

Kolejnym etapem będzie symulowanie bombardowania cząsteczki przez losową cząsteczkę płynu. W tym celu musimy wygenerować losowy kąt φ , w którym przemieści się cząsteczka.

Ponieważ ruchy Browna są losowe, możemy założyć, że będziemy modelować uśrednioną wersję. Przyjmijmy zatem, że każda cząsteczka płynu uderza naszą cząstkę z taką samą siłą, w wyniku czego nasza cząsteczka przesuwa się zawsze o taką samą odległość.

W większości języków programowania wbudowane są funkcje matematyczne takie jak sinus oraz cosinus. Przyjmują one argumenty wyrażone w [radianach](#). Aby wyznaczyć losowy kąt φ , generujemy liczbę pseudolosową z przedziału $\langle 0, 2\pi \rangle$. Języki programowania udostępniają generator liczb pseudolosowych w różny sposób, jednak my założymy, że dysponujemy funkcją `random()`, która generuje liczbę losową z przedziału $\langle 0, 1 \rangle$. W celu przeskalowania tego przedziału na interesujący nas przedział wystarczy pomnożyć wylosowaną liczbę przez 2π . Ponieważ w językach programowania dostępne są również stałe matematyczne, założymy, że dysponujemy stałą `PI`, która równa jest przybliżeniu liczby π .

```
1 // losowy kąt fi
2 fi = random() * 2 * PI;
```

Jak wspomnieliśmy wcześniej, nie musimy zastanawiać się nad implementacją funkcji trygonometrycznych. Zakładamy, że dostępne są funkcje `sinus()` oraz `cosinus()`. Reprezentacją wektora będą dwie zmienne. Aby przesunąć cząsteczkę o wyznaczony wektor, dodajmy jego współrzędne odpowiednio do współrzędnych cząsteczki. Nazwijmy zatem te zmienne `dx` oraz `dy`.

Kolejne współrzędne (x, y) cząstki będą określone następującymi wzorami:

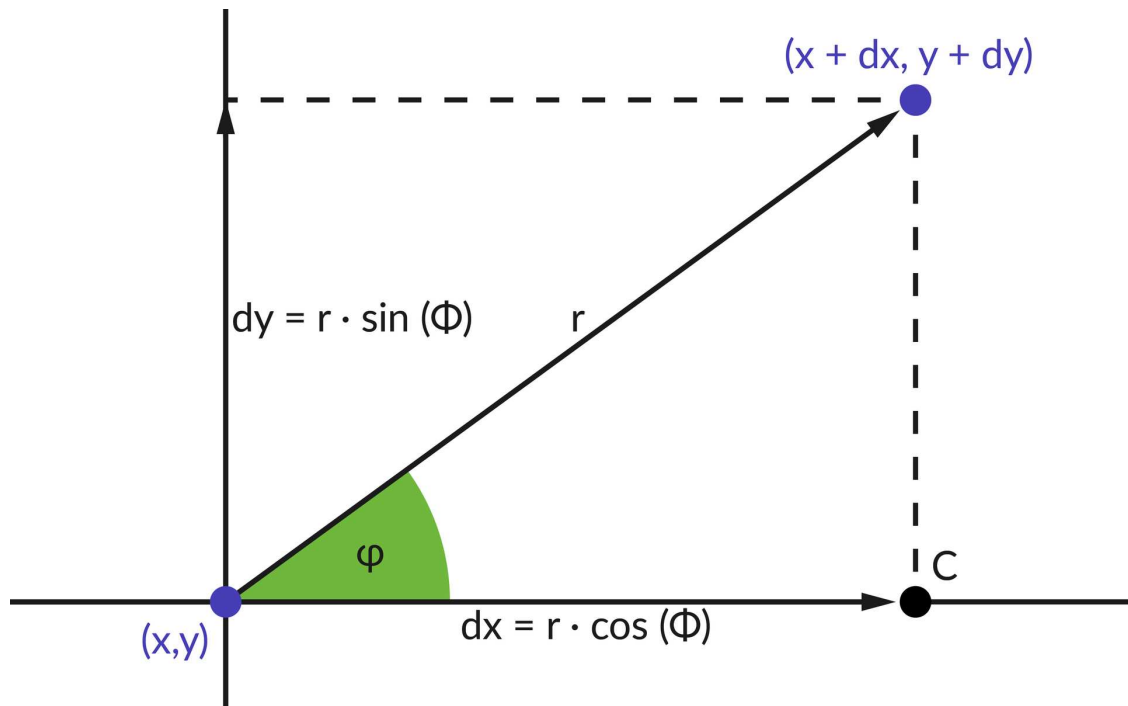
$$\varphi \in (0, 2\pi)$$

$$X_n = X_{n-1} + dx$$

$$Y_n = Y_{n-1} + dy$$

```
1 // wektor kierunku ruchu o wartości r ustawiony pod kątem fi
2 dx = r * cosinus(fi)
3 dy = r * sinus(fi)
```

Na poniższej grafice widzimy wykorzystane powyżej własności:



Źródło: Contentplus.pl Sp. z o.o., licencja: CC BY-SA 3.0.

Przeprowadzając modelowanie ruchów Browna, zależy nam na procesie, w którym zachodzi więcej niż tylko jedna kolizja. Aby zwiększyć ich liczbę, możemy utworzyć pętlę, która będzie symulowała n kolizji następujących po sobie. W pętli możemy również wypełniać dwie tablice, które będą przechowywały współrzędne punktów, w których znajdowała się cząsteczka. Jedna tablica jest potrzebna do przechowywania współrzędnych osi x , druga – y .

Przykładowy program modelujący ruchy Browna może być napisany zgodnie z poniższym pseudokodem.

```

1 // liczba kolizji
2 n = 100
3
4 // długość wektora
5 r = 0.1
6
7 // początkowe położenie cząsteczki
8 x = 0.0
9 y = 0.0
10
11 // tablice przechowujące kolejne pozycje cząsteczki
12 deklaracja tablicy ruchyX o wielkości n + 1
13 deklaracja tablicy ruchyY o wielkości n + 1
14
15 // zapisz w tablicach początkowe położenie cząsteczki

```

```
16 ruchyX[0] = x
17 ruchyY[0] = y
18
19 dla i = 1, 2, ..., n wykonuj
20     // losowy kąt fi
21     fi = random() * 2 * PI;
22
23     dx = r * cosinus(fi)
24     dy = r * sinus(fi)
25
26     x = x + dx
27     y = y + dy
28
29     // zapisz w tablicach obecne położenie cząsteczki
30     ruchyX[i] = x
31     ruchyY[i] = y
32
33 // wypisz końcową pozycję
34 wypisz x
35 wypisz y
```

Słownik

płyn

substancja, która charakteryzuje się łatwością w zmianie kształtu; płynami są głównie ciecze oraz gazy, ale także plazma

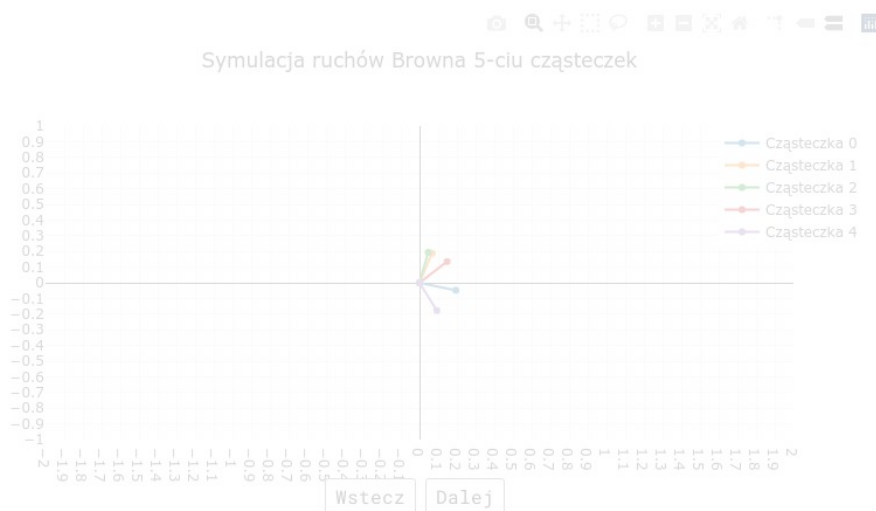
radian

jednostka miary łukowej kąta płaskiego, 2π radianów to tyle samo, co 360°

Aplet

Polecenie 1

Uruchom aplet prezentujący symulację ruchów Browna dla pięciu cząsteczek przy ustalonym r równym 0.2. Wygeneruj kilka możliwych przykładów torów cząsteczek.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DxsSVuyzA>

Źródło: Contentplus.pl Sp. z o.o., licencja: CC BY-SA 3.0.

Polecenie 2

Przygotuj notatkę ze swoimi spostrzeżeniami dotyczącymi apletu.

Polecenie 3

Zapisz pięć przykładów wykorzystania ruchów Browna w innych dziedzinach nauki. Opisz jeden z przykładów.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Połącz naukowców z ich teoriami.

Robert Brown

(1827) Obserwacja ruchów pyłku kwiatowego w zawiesinie wodnej pod mikroskopem.

Marian Smoluchowski

(1906) Matematyczny opis ruchów Browna.

Joseph Delsaulx

(1877) Wyjaśnienie ruchów Browna przez termiczne ruchy cząsteczek wody.

Albert Einstein

(1905) Matematyczny opis ruchów Browna.

Ćwiczenie 2



Uporządkuj kroki procesu modelowania ruchów Browna.

Wyznaczenie współrzędnych wektora przemieszczenia.



Wyznaczenie losowego kąta, pod którym przemieścimy cząsteczkę.



Przesunięcie cząsteczki.



Umieszczenie cząsteczki w położeniu początkowym.



Ćwiczenie 3



Wskaż, w jaki sposób można wyznaczyć współrzędną x wektora o długości r nachylonego pod kątem φ .

☐ $r \cdot \varphi \cdot \sin(\varphi)$

☐ $r \cdot \varphi \cdot \cos(\varphi)$

☐ $r \cdot \sin(\varphi)$

☐ $r \cdot \cos(\varphi)$

Ćwiczenie 4



Wskaż, w jaki sposób możesz przekształcić liczbę a , która jest losową liczbą z przedziału $\langle 0, 1 \rangle$, na liczbę z przedziału $\langle 0, 2\pi \rangle$.

☐ $2\pi - a$

☐ $\pi \cdot \sin(a)$

☐ $a \cdot 2\pi$

☐ $a \cdot \pi - a$

Ćwiczenie 5



Wskaż, ile wynosi radian.

☐ 180°

☐ $180^\circ/\pi$

☐ π

☐ 2π

Ćwiczenie 6



Wskaż, Które z poniższych substancji poruszają się zgodnie z ruchami Browna.

☐

piasek w glebie

☐

drobiny barwnika w wodzie

☐

drobiny tłuszczu w mleku

☐

pyłek kwiatowy w wodzie

Ćwiczenie 7



Wskaż poprawną odpowiedź.

Dyfuzja spowodowana jest występowaniem ruchów Browna.

☐

fałsz

☐

prawda

Ćwiczenie 8



“ Geometryczny ruch Browna

(...) w miarę zwiększania horyzontu inwestycyjnego ryzyko rośnie, ale w mniejszym stopniu niż wartość oczekiwana. Wielu inwestorów uważa, że ryzyko inwestycji jest większe im dłuższy jest horyzont inwestycyjny. I rzeczywiście tak jest, jednak relacja ryzyka do wartości oczekiwanej zmniejsza się wraz z wydłużaniem czasu inwestycji.

Źródło: *Geometryczny ruch Browna*, dostępny w internecie: kupakcje.pl [dostęp 9.06.2021].

Ruchy Browna są używane do tworzenia modeli inwestycyjnych. Wyjaśnij, jaką strategię należałoby przyjąć, jeśli inwestować, bazując na modelu ruchów Browna.

Dla nauczyciela

Autor: Maurycy Gast

Przedmiot: Informatyka

Temat: Modelowanie ruchów Browna

Grupa docelowa:

Liceum ogólnokształcące i technikum, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

Cele kształcenia – wymagania ogólne

I. Rozumienie, analizowanie i rozwiązywanie problemów na bazie logicznego i abstrakcyjnego myślenia, myślenia algorytmicznego i sposobów reprezentowania informacji.

II. Programowanie i rozwiązywanie problemów z wykorzystaniem komputera oraz innych urządzeń cyfrowych: układanie i programowanie algorytmów, organizowanie, wyszukiwanie i udostępnianie informacji, posługiwanie się aplikacjami komputerowymi.

Treści nauczania – wymagania szczegółowe

I + II. Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

3) objaśnia, a także porównuje podstawowe metody i techniki algorytmiczne oraz struktury danych, wykorzystując przy tym przykłady problemów i algorytmów, w szczególności:

h) metodę Monte Carlo (obliczanie przybliżonej wartości liczby π , symulacja ruchów Browna),

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii.

Cele operacyjne (językiem ucznia):

- Zwizualizujesz zaawansowane procesy.
- Zbudujesz programistyczny model zjawiska fizycznego.
- Przeanalizujesz sposób wyznaczania kolejnych pozycji cząsteczki, która porusza się zgodnie z teorią ruchów Browna.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja;
- rozmowa nauczająca z wykorzystaniem multimediu i ćwiczeń interaktywnych;
- metody aktywizujące.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

1. **Przygotowanie do zajęć.** Nauczyciel loguje się na platformie i udostępnia e-materiał: „Modelowanie ruchów Browna”. Nauczyciel prosi uczniów o zapoznanie się z treściami w sekcji „Przeczytaj”.

Faza wstępna:

1. Nauczyciel wyświetla temat oraz cele zajęć, omawiając lub ustalając razem z uczniami kryteria sukcesu.
2. **Rozpoznanie wiedzy uczniów.** Uczniowie tworzą pytania dotyczące tematu zajęć, na które odpowiedzą w trakcie lekcji.

Faza realizacyjna:

1. **Praca z tekstem.** Jeżeli przygotowanie uczniów do lekcji jest niewystarczające, nauczyciel prosi o indywidualne zapoznanie się z treścią zawartą w sekcji „Przeczytaj”. Każdy uczestnik zajęć podczas cichego czytania wynotowuje najważniejsze kwestie poruszane w tekście.
2. **Praca z multimediami.** Nauczyciel wyświetla zawartość sekcji „Aplet”. Uczniowie zapoznają się z przedstawioną symulacją ruchów Browna dla pięciu cząsteczek. Następnie zapisują własne spostrzeżenia.
3. **Ćwiczenie umiejętności.** Uczniowie wykonują ćwiczenia nr 1-8 z sekcji „Sprawdź się”. Nauczyciel sprawdza poprawność wykonanych zadań, omawiając je wraz z uczniami.

Faza podsumowująca:

1. Na koniec zajęć nauczyciel raz jeszcze wyświetla na tablicy temat lekcji i cele zawarte w sekcji „Wprowadzenie”. W odniesieniu do ich realizacji dokonuje szczegółowej oceny rozwiązania zastosowanego przez wybranego ucznia.
2. Wybrany uczeń podsumowuje zajęcia, zwracając uwagę na nabyte umiejętności, omawia ewentualne problemy podczas rozwiązania ćwiczeń.

Praca domowa:

1. Przygotuj notatkę na temat wykorzystania modelowania ruchów Browna w matematyce i fizyce.

Wskazówki metodyczne:

- Treści w sekcji „Przeczytaj” można wykorzystać jako podsumowanie i utrwalenie wiedzy uczniów.