


Zbiór liczb rzeczywistych. Prawa działań w zbiorze liczb rzeczywistych

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Prezentacja multimedialna
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela



Zbiór liczb rzeczywistych. Prawa działań w zbiorze liczb rzeczywistych

Źródło: Logan Kirschner, dostępny w internecie: www.unsplash.com.

Wszystkie liczby, które poznałeś dotychczas w szkole, należą do zbioru liczb rzeczywistych. Istnieją różne definicje liczb rzeczywistych: niektóre używają aksjomatów, inne granic, ale wszystkie one wykraczają poza program nauki szkolnej.

Dla nas zbiór liczb rzeczywistych będzie po prostu sumą zbioru liczb wymiernych i zbioru liczb niewymiernych. W tej lekcji sklasyfikujemy wszystkie znane nam liczby oraz ponownie przyjrzymy się własnościom działań na nich.

Twoje cele

- Wykonasz działania na liczbach rzeczywistych.
- Rozpoznasz, czy liczba jest naturalna, całkowita, wymierna czy niewymierna.

Przeczytaj

Zbiór liczb rzeczywistych złożony jest ze wszystkich liczb wymiernych i wszystkich liczb niewymiernych.

Oznaczamy go symbolem \mathbb{R} , który pochodzi od pierwszej litery angielskiego słowa *real*, oznaczającego *rzeczywisty*, *realny*.

“Najmniejszym” w sensie zawierania jest zbiór liczb naturalnych.

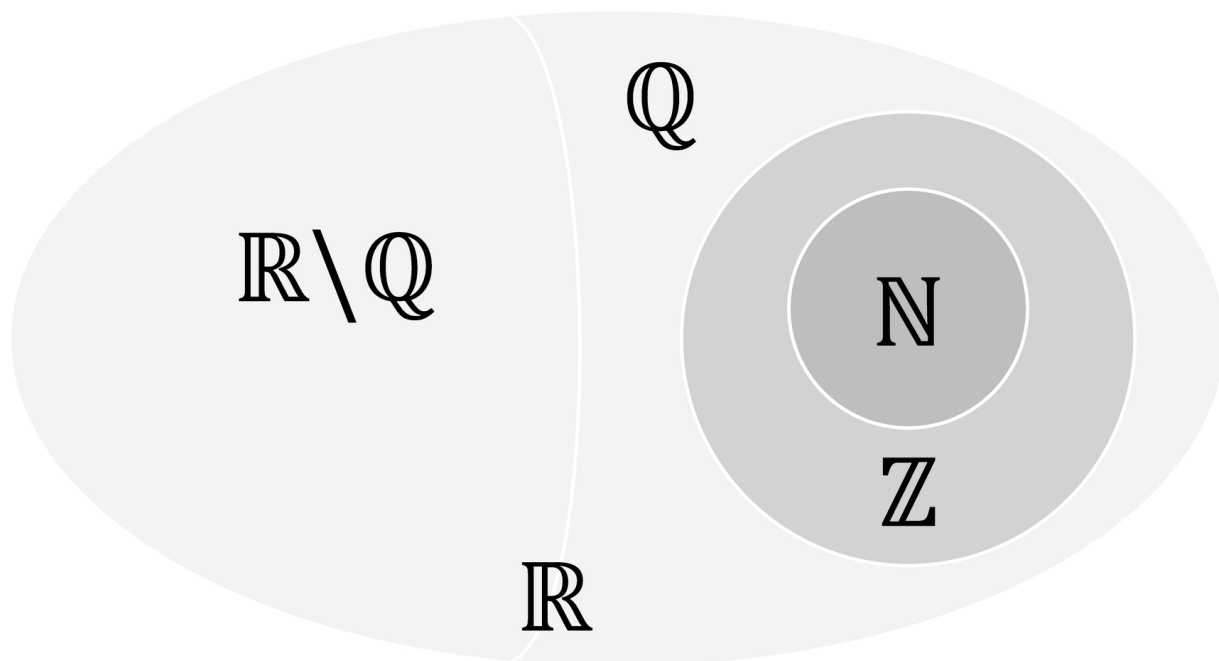
Liczby całkowite możemy skonstruować z liczb naturalnych: wystarczy do liczb naturalnych dodać liczby do nich przeciwne.

Liczby wymierne powstają jako ilorazy liczb całkowitych przy założeniu że dzielnik nie jest równy 0.

Liczby niewymierne “dopełniają” zbiór liczb wymiernych do całej osi liczbowej.

Zbiór liczb wymiernych i zbiór liczb niewymiernych nie mają wspólnych elementów, ale razem tworzą zbiór liczb rzeczywistych. Każdej liczbie rzeczywistej można przyporządkować dokładnie jeden punkt na osi liczbowej i odwrotnie każdy punkt osi odpowiada jednej liczbie rzeczywistej.

Na podstawie powyższych faktów możemy sporządzić rysunek:



Ciekawostka

Jako ciekawostkę podamy fakt, że liczb naturalnych jest dokładnie tyle samo co liczb całkowitych i dokładnie tyle samo co liczb wymiernych.

Liczb niewymiernych jest “więcej” niż liczb wymiernych. Wydawać by się mogło, że skoro każdy z omawianych zbiorów jest nieskończony, to wszystkie mają tyle samo elementów – nieskończenie wiele. Okazuje się jednak, że istnieją różne nieskończoności, a bada je dział matematyki o nazwie teoria mnogości.

Sformułowanie “w zbiorze A jest tyle samo elementów co w zbiorze B ” oznacza tu, że każdemu elementowi zbioru A możemy przyporządkować dokładnie jeden element ze zbioru B i odwrotnie – każdy element ze zbioru B możemy przyporządkować dokładnie jeden element ze zbioru A .

Innymi słowy elementy zbiorów A i B możemy połączyć w pary. Jeżeli w żadnym ze zbiorów nie zostanie element bez pary, to zbiory mają tyle samo elementów. Jeżeli w jednym ze zbiorów wykorzystamy wszystkie elementy, a w drugim zostaną elementy bez pary, to powiemy, że w tym drugim elementów jest więcej.

Aby pokazać, że w zbiorze liczb całkowitych jest tyle samo elementów, co w zbiorze liczb naturalnych ustawmy liczby całkowite w nieskończony ciąg o wyrazach np.

$0, -1, 1, -2, 2, -3, 3, -4, 4, \dots$. Zauważmy, że każda liczba całkowita pojawi się w nim dokładnie jeden raz, co oznacza że jest ich tyle ile liczb naturalnych. Na tej samej zasadzie można pokazać, że liczb wymiernych jest tyle samo, co liczb naturalnych ustawiając liczby wymierne w ciąg o niepowtarzających się wyrazach.

Własność: Własność trychotomii

Jeśli x i y są liczbami rzeczywistymi, to zachodzi dokładnie jedna z trzech możliwości:

albo $x < y$, albo $x = y$, albo $x > y$.

Innymi słowy własność trychotomii orzeka, że dowolne dwie liczby rzeczywiste można porównać.

Prawo: Prawa działań w zbiorze liczb rzeczywistych

Dla porządku przypomnijmy podstawowe prawa działań na liczbach rzeczywistych:

1. zbiór liczb rzeczywistych jest zamknięty na dodawanie, mnożenie, odejmowanie i dzielenie (poza dzieleniem przez zero);
2. dodawanie jest łączne;
3. liczba 0 jest elementem neutralnym dodawania;
4. każda liczba rzeczywista x posiada dokładnie jedną liczbę przeciwną ($-x$);
5. dodawanie jest przemienne;
6. mnożenie jest łączne;
7. liczba 1 jest elementem neutralnym mnożenia;
8. mnożenie jest przemienne;
9. mnożenie jest rozdzielne względem dodawania;
10. każda niezerowa liczba rzeczywista x posiada dokładnie jedną liczbę rzeczywistą odwrotną $\frac{1}{x}$.

Przykład 1

Liczbą przeciwną do liczby $x = 2 - 3\sqrt{2}$ jest liczba

$$-x = -(2 - 3\sqrt{2}) = -2 + 3\sqrt{2} = 3\sqrt{2} - 2.$$

Liczbą odwrotną do liczby $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ jest liczba $\frac{1}{x} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Przykład 2

Zauważmy, że:

$$\sqrt{3^2} = \sqrt{9} = 3$$

$$\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3$$

$$\sqrt{5^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$\sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$\sqrt{(\sqrt{2} - 1)^2} = \sqrt{2} - 1$$

$\sqrt{(1 - \sqrt{2})^2} = -(1 - \sqrt{2}) = -1 + \sqrt{2} = \sqrt{2} - 1$ (liczba $1 - \sqrt{2}$ jest ujemna, zaś wynik pierwiastkowania z definicji jest nieujemny - liczba $\sqrt{2} - 1$ jest przeciwna do $1 - \sqrt{2}$ i dodatnia, więc to ona jest wynikiem tego działania)

$$\sqrt{(\sqrt{5} - 2)^2} = \sqrt{5} - 2$$

$\sqrt{(2 - \sqrt{5})^2} = -(2 - \sqrt{5}) = -2 + \sqrt{5} = \sqrt{5} - 2$ (liczba $2 - \sqrt{5}$ jest ujemna, zaś wynik pierwiastkowania z definicji jest nieujemny - liczba $\sqrt{5} - 2$ jest przeciwna do $2 - \sqrt{5}$ i dodatnia, więc to ona jest wynikiem tego działania)

Ale

$$\sqrt[3]{2^3} = \sqrt[3]{8} = 2$$

$$\sqrt[3]{(-2)^3} = \sqrt[3]{-8} = -2$$

$$\sqrt[3]{5^3} = \sqrt[3]{125} = 5$$

$$\sqrt[3]{(-5)^3} = \sqrt[3]{-125} = -5$$

$$\sqrt[3]{(\sqrt{3} - 1)^3} = \sqrt{3} - 1$$

$$\sqrt[3]{(1 - \sqrt{3})^3} = 1 - \sqrt{3}$$

$$\sqrt[3]{(\sqrt{7} - 2)^3} = \sqrt{7} - 2$$

$$\sqrt[3]{(2 - \sqrt{7})^3} = 2 - \sqrt{7}$$

Przykład 3

Wykonamy mnożenie, dodawanie i odejmowanie liczb $x = \frac{1}{\sqrt{5}-1}$ oraz $y = \frac{1}{\sqrt{5}+1}$.

$$\mathbf{a)} \quad x \cdot y = \frac{1}{\sqrt{5}-1} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}+1}$$

Aby pomnożyć te liczby, wystarczy pomnożyć licznik pierwszego ułamka przez licznik drugiego oraz mianownik pierwszego ułamka przez mianownik drugiego. Otrzymane iloczyny stają się odpowiednio licznikiem i mianownikiem iloczynu liczb x i y .

$$\frac{1}{\sqrt{5}-1} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}+1} = \frac{1}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)} = \frac{1}{5+\sqrt{5}-\sqrt{5}-1} = \frac{1}{4}$$

$$\text{b) } x + y = \frac{1}{\sqrt{5}-1} + \frac{1}{\sqrt{5}+1}$$

Aby dodać te liczby, sprowadzamy je do wspólnego mianownika. W tym celu pierwszy składnik rozszerzamy przez $\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}+1}$, zaś drugi przez $\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}-1}$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{5}-1} \cdot \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}+1} + \frac{1}{\sqrt{5}+1} \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}-1} &= \frac{\sqrt{5}+1}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)} + \frac{\sqrt{5}-1}{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)} = \\ &= \frac{\sqrt{5}+1}{5-\sqrt{5}+\sqrt{5}-1} + \frac{\sqrt{5}-1}{5+\sqrt{5}-\sqrt{5}-1} = \frac{\sqrt{5}+1}{4} + \frac{\sqrt{5}-1}{4} = \\ &= \frac{\sqrt{5}+1+\sqrt{5}-1}{4} = \frac{2\sqrt{5}}{4} = \frac{\sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

$$\text{c) } x - y = \frac{1}{\sqrt{5}-1} - \frac{1}{\sqrt{5}+1}$$

Aby odjąć te liczby, sprowadzamy je do wspólnego mianownika. W tym celu pierwszy składnik rozszerzamy przez $\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}+1}$, zaś drugi przez $\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}-1}$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{5}-1} \cdot \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}+1} - \frac{1}{\sqrt{5}+1} \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}-1} &= \frac{\sqrt{5}+1}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)} - \frac{\sqrt{5}-1}{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)} = \\ &= \frac{\sqrt{5}+1}{5-\sqrt{5}+\sqrt{5}-1} - \frac{\sqrt{5}-1}{5+\sqrt{5}-\sqrt{5}-1} = \frac{\sqrt{5}+1}{4} - \frac{\sqrt{5}-1}{4} = \\ &= \frac{\sqrt{5}+1-\sqrt{5}+1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Przykład 4

Wykonamy działania

$$\sqrt{1 + \frac{25}{144}} = \sqrt{\frac{144}{144} + \frac{25}{144}} = \sqrt{\frac{169}{144}} = \frac{13}{12}$$

$$\sqrt{\frac{45}{9} - 1} = \sqrt{\frac{45}{9} - \frac{9}{9}} = \sqrt{\frac{36}{9}} = \sqrt{4} = 2$$

$$\sqrt{12^2 + 16^2} = \sqrt{144 + 256} = \sqrt{400} = 20$$

$$\sqrt{15^2 - 9^2} = \sqrt{225 - 81} = \sqrt{144} = 12$$

Przykład 5

Korzystając z [rozdzielności mnożenia względem dodawania \(odejmowania\)](#) opuścimy nawiasy:

$$\sqrt{2} \cdot (\sqrt{2} + 3) = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} + 3 \cdot \sqrt{2} = 2 + 3\sqrt{2}$$

$$\sqrt{2} \cdot (\sqrt{6} + \sqrt{8}) = \sqrt{2} \cdot \sqrt{6} + \sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{12} + \sqrt{16} =$$

$$= \sqrt{4 \cdot 3} + 4 = \sqrt{4} \cdot \sqrt{3} + 4 = 2\sqrt{3} + 4$$

$$\sqrt{3} \cdot (\sqrt{6} - \sqrt{3}) = \sqrt{3} \cdot \sqrt{6} - \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{3 \cdot 6} - \sqrt{3 \cdot 3} = \sqrt{18} - \sqrt{9} =$$

$$\sqrt{9 \cdot 2} - \sqrt{9} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{2} - 3 = 3\sqrt{2} - 3$$

Przykład 6

Korzystając z rozdzielności mnożenia względem dodawania wyłączymy wspólny czynnik przed nawias.

$$\sqrt{10} + \sqrt{15} = \sqrt{5 \cdot 2} + \sqrt{5 \cdot 3} = \sqrt{5} \cdot \sqrt{2} + \sqrt{5} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{5} \cdot (\sqrt{2} + \sqrt{3})$$

$$10 + \sqrt{10} = \sqrt{100} + \sqrt{10} = \sqrt{10 \cdot 10} + \sqrt{10} =$$

$$= \sqrt{10} \cdot \sqrt{10} + \sqrt{10} = \sqrt{10} \cdot (\sqrt{10} + 1)$$

$$\sqrt{12} - 4 = \sqrt{4 \cdot 3} - 4 = \sqrt{4} \cdot \sqrt{3} - 4 = 2\sqrt{3} - 2 \cdot 2 = 2 \cdot (\sqrt{3} - 2)$$

Słownik

zbiór zamknięty na działanie

mówimy, że zbiór A jest zamknięty na działanie $(*)$, gdy dla dowolnych elementów x, y należących do zbioru A element $(x * y)$ również należy do zbioru A

działanie łączne

mówimy, że działanie $(*)$ jest łączne, gdy dla dowolnych elementów x, y, z zachodzi równość $(x * y) * z = x * (y * z)$

element neutralny działania

mówimy, że element e jest elementem neutralnym działania $(*)$, jeśli dla dowolnego elementu x zachodzi warunek $x * e = e * x = x$

liczba przeciwna

mówimy, że liczba a jest przeciwna do liczby b , gdy $a + b = 0$; możemy też powiedzieć, że liczby a i b są wzajemnie przeciwne

liczba odwrotna

mówimy, że niezerowa liczba a jest odwrotna do niezerowej liczby b , gdy $a \cdot b = 1$

działanie przemienne

mówimy, że działanie $(*)$ jest przemienne, gdy dla dowolnych elementów x, y zachodzi równość $x * y = y * x$

rozdzielność działania $*$ względem działania $\#$

mówimy, że działanie $(*)$ jest rozdzielne względem działania $\#$, gdy dla dowolnych elementów x, y, z zachodzi równość $x * (y \# z) = (x * y) \# (x * z)$

Prezentacja multimedialna

Polecenie 1

Przeanalizuj informacje zawarte w prezentacji multimedialnej. Wykonaj polecenie.

Polecenie 2

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Ćwiczenie 2



Ćwiczenie 3



Ćwiczenie 4



Ćwiczenie 5



Ćwiczenie 6

Oblicz:

$$\frac{(1\frac{16}{75} + 2,46) : 11,02}{1\frac{2}{3} : [1\frac{8}{9} : (\frac{2}{15} + 0,15)]}$$



Ćwiczenie 7



W zbiorze liczb rzeczywistych definiujemy działanie $*$ w następujący sposób

$a * b = a + b + 2$. Sprawdź, czy działanie $*$ jest przemienne. Sprawdź, czy działanie $*$ jest łączne.

Ćwiczenie 8



W zbiorze liczb rzeczywistych definiujemy działanie $\#$ w następujący sposób

$a \# b = \frac{a+b}{3}$. Sprawdź, czy działanie $\#$ jest przemienne. Sprawdź, czy działanie $\#$ jest łączne.

Dla nauczyciela

Autor: Sebastian Guz

Przedmiot: Matematyka

Temat: Zbiór liczb rzeczywistych. Prawa działań w zbiorze liczb rzeczywistych

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

Treści nauczania – wymagania szczegółowe:

I. Liczby rzeczywiste. Zakres podstawowy. Uczeń:

1) wykonuje działania (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie, pierwiastkowanie, logarytmowanie) w zbiorze liczb rzeczywistych;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii.

Cele operacyjne:

- Wykonasz działania na liczbach rzeczywistych.
- Rozpoznasz, czy liczba jest naturalna, całkowita, wymierna czy niewymierna.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona klasa;
- debata;
- dyskusja.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

1. Nauczyciel prosi uczniów o zapoznanie się z zagadnieniami, które będą poruszane podczas lekcji.

Faza wstępna:

1. Przedstawienie tematu zajęć: „Zbiór liczb rzeczywistych. Prawa działań w zbiorze liczb rzeczywistych” oraz wspólne z uczniami ustalenie kryteriów sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel prosi, aby wybrany uczeń przeczytał polecenie numer 1 z sekcji „Prezentacja multimedialna” - „Przeanalizuj informacje zawarte w galerii zdjęć interaktywnych. Wykonaj polecenie” Następnie prosi uczniów, aby zapoznali się z materiałem. Po ustalonym wcześniej czasie pyta czy były wątpliwości z jego zrozumieniem i tłumaczy je.
2. Prowadzący zapowiada uczniom, że w kolejnym kroku będą rozwiązywać ćwiczenia nr 1 i 2 z sekcji „Sprawdź się”. Każdy z uczniów robi to samodzielnie. Po ustalonym czasie wybrani uczniowie przedstawiają rozwiązania. Nauczyciel w razie potrzeby koryguje odpowiedzi, dopowiada istotne informacje, udziela uczniom informacji zwrotnej.
3. Nauczyciel dzieli klasę na 4-osobowe grupy. Uczniowie rozwiązują ćwiczenia 3-5 na czas (od łatwiejszego do trudniejszych). Grupa, która poprawnie rozwiąże ćwiczenia jako pierwsza, wygrywa, a nauczyciel może nagrodzić uczniów ocenami za aktywność. Rozwiązania są prezentowane na forum klasy i omawiane krok po kroku.
4. Ćwiczenia numer 6, 7 i 8 uczniowie wykonują indywidualnie, a następnie omawia je nauczyciel.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.

Praca domowa:

1. Uczniowie opracowują FAQ (minimum 3 pytania i odpowiedzi prezentujące przykład i rozwiązanie) do tematu lekcji („Zbiór liczb rzeczywistych. Prawa działań w zbiorze liczb rzeczywistych”).

Materiały pomocnicze:

[Uporządkowanie zbioru liczb rzeczywistych](#)

Wskazówki metodyczne:

- Medium w sekcji „Prezentacja multimedialna” można wykorzystać na lekcji jako podsumowanie i utrwalenie wiedzy w temacie „Zbiór liczb rzeczywistych. Prawa działań w zbiorze liczb rzeczywistych”.