



Liczba elementów zbioru skończonego - zasada równoliczności

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Animacja](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Liczba elementów zbioru skończonego - zasada równoliczności

Źródło: Ellen Qin, dostępny w internecie: www.unsplash.com.

Zagadka

Na parapecie pod oknem leżała talia 52 kart do brydża. Po otwarciu okna zrobił się przeciąg, który zwał dziesięć kart z parapetu za okno. Oglądamy pierwszą kartę, która została na parapecie.

Który przypadek jest bardziej prawdopodobny:

- „oglądana karta jest w kolorze czerwonym”,

czy

- „oglądana karta jest w kolorze czarnym”?

Na podstawie reguły równoliczności (o której będzie mowa w tym rozdziale), możemy stwierdzić, że oba te przypadki są jednakowo prawdopodobne.

Twoje cele

- Zapoznasz się z regułą równoliczności.
- Udoskonalisz umiejętności posługiwania się pojęciem reguły równoliczności w zadaniach kombinatorycznych.

- Znajomość reguły równoliczności pozwoli Ci oceniać liczby elementów pewnych zbiorów liczbowych.
- Nauczysz się, jak porównywać liczby wyników doświadczeń losowych, które spełniają warunek dający się opisać z wykorzystaniem pojęcia równoliczności zbiorów.

Reguła równoliczności

Dwa zbiory A i B są równoliczne (mają tyle samo elementów) jeżeli ich elementy można przyporządkować wzajemnie jednoznacznie, to znaczy: każdemu elementowi zbioru A przyporządkujemy dokładnie jeden element zbioru B oraz każdemu elementowi zbioru B przyporządkujemy dokładnie jeden element zbioru A .

Przykład 1

Wykażemy, że w zbiorze $\{k, k + 1, \dots, l - 1, l\}$ kolejnych liczb naturalnych od k do l jest $l - k + 1$ elementów.

Uzasadnienie podamy na dwa sposoby.

- **I sposób:**

Ponumerujmy, zaczynając od 1, kolejne liczby zapisane w zbiorze $\{k, k + 1, k + 2, \dots, l - 1, l\}$ i zauważmy, że w tak otrzymanym ciągu numer wyrazu jest niezmiennie o $k - 1$ mniejszy od tego wyrazu, zatem jego ostatni wyraz równy l ma numer $l - (k - 1)$.

Na podstawie [reguły równoliczności](#) stwierdzamy, że w zbiorze $\{k, k + 1, k + 2, \dots, l - 1, l\}$ jest tyle samo elementów, co w zbiorze kolejnych liczb naturalnych od 1 do $l - k + 1$. Oznacza to, że jest ich $l - k + 1$.

Uwaga! Ciąg arytmetyczny (a_n) , o wyrazie pierwszym $a_1 = k$ i różnicy 1 jest określony wzorem ogólnym $a_n = k + n - 1$. Gdy $a_n = l$, to $k + n - 1 = l$, skąd $n = l - k + 1$.

- **II sposób**

Zauważmy, że zbiór $\{1, 2, \dots, l - 1, l\}$, liczący l elementów, możemy podzielić na dwa rozłączne podzbiory:

podzbiór liczb mniejszych od k : $\{1, 2, \dots, k - 2, k - 1\}$, który ma $k - 1$ elementów

oraz podzbiór kolejnych liczb od k do l : $\{k, k + 1, k + 2, \dots, l - 1, l\}$.

Oznacza to, że zbiór $\{k, k + 1, k + 2, \dots, l - 1, l\}$ ma $l - (k - 1) = l - k + 1$ elementów.

Z powyższego spostrzeżenia wynika np., że w zbiorze $\{1410, 1411, \dots, 2020\}$ kolejnych liczb naturalnych od 1410 do 2020 jest dokładnie 611 liczb, co dostajemy z następującego rachunku: $2020 - (1410 - 1) = 611$

Przykład 2

Wykażemy, że wszystkich trzycyfrowych liczb parzystych jest tyle samo, co trzycyfrowych liczb nieparzystych.

Zauważmy, że najmniejszą liczbą trzycyfrową jest liczba 100 (parzysta), a największą liczbą trzycyfrową jest liczba 999 (nieparzysta). Oznacza to, że:

1. liczb trzycyfrowych jest $999 - (100 - 1) = 900$,
2. zapisując wszystkie liczby trzycyfrowe rosnąco będziemy więc mogli dobrać je w pary tak, aby liczbie mniejszej, parzystej odpowiadała wzajemnie jednoznacznie liczba większa od niej o jeden, nieparzysta.

Można je na przykład wypisywać parami, w kolejnych wierszach, których będzie 450:

numer wiersza	liczba parzysta	liczba nieparzysta
1	100	101
2	102	103
3	104	105
...		
450	998	999

Zatem trzycyfrowych liczb parzystych jest tyle samo, co trzycyfrowych liczb nieparzystych.

Powyższe rozumowanie możemy sformalizować. Ponieważ każdą naturalną liczbę parzystą da się zapisać w postaci $2n$, gdzie n jest liczbą naturalną, więc do zbioru trzycyfrowych liczb parzystych należą wszystkie liczby spełniające dodatkowo warunek $100 \leq 2n \leq 999$. Zatem n może przyjmować wartości 50, 51, 51, ..., 499. Rozpatrzmy więc dwa ciągi:

ciąg (a_n) , opisany wzorem $a_n = 2n$, gdzie $n = 50, 51, \dots, 499$,

ciąg (b_n) , opisany wzorem $b_n = a_n + 1 = 2n + 1$, gdzie $n = 50, 51, \dots, 499$.

W ciągu (a_n) występują kolejne parzyste liczby trzycyfrowe, a w ciągu (b_n) występują kolejne nieparzyste liczby trzycyfrowe.

wyrazy ciągu (a_n)	wyrazy ciągu (b_n)
$a_{50} = 100$	$b_{50} = 101$
$a_{51} = 102$	$b_{51} = 103$
$a_{52} = 104$	$b_{52} = 105$
...	

wyrazy ciągu (a_n)	wyrazy ciągu (b_n)
$a_{499} = 998$	$b_{499} = 999$

Wyrazy ponumerowane są od 50 do 499, więc na podstawie [reguły równoliczności](#) stwierdzamy, że jest ich w obu ciągach tyle samo.

Obliczamy, że jest ich w każdym ciągu po $499 - (50 - 1) = 450$.

Przykład 3

Rozstrzygniemy, których liczb trzycyfrowych jest więcej: tych, które dzielą się przez 7, czy tych, które dają resztę 3 z dzielenia przez 7.

- **I sposób:**

Zapiszmy wszystkie liczby trzycyfrowe rosnąco.

Ponieważ 900 przy dzieleniu przez 7 daje resztę 4, więc liczb w tym zbiorze nie da się podzielić na grupy siedmioelementowe.

Natomiast na grupy siedmioelementowe można podzielić zbiór $A = \{104, 105, \dots, 999\}$, czyli zbiór kolejnych liczb trzycyfrowych, z którego usunięto cztery najmniejsze liczby trzycyfrowe: 100, 101, 102, 103.

Zapisując elementy zbioru A w porządku rosnącym i z podziałem na grupy siedmioelementowe zauważymy, że tych grup jest $(900 - 4) : 7 = 128$ i w każdej z nich jest dokładnie jedna liczba podzielna przez 7 oraz dokładnie jedna liczba, która przy dzieleniu przez 7 daje resztę 3.

Zatem na podstawie [reguły równoliczności](#) stwierdzamy, że w zbiorze $A = \{104, 105, \dots, 999\}$ jest tyle samo liczb podzielnych przez 7, co liczb, które przy dzieleniu przez 7 dają resztę 3.

Ponieważ wśród czterech usuniętych liczb nie ma żadnej podzielnej przez 7, natomiast dokładnie jedna z nich, 101, przy dzieleniu przez 7 daje resztę 3, więc wśród liczb trzycyfrowych więcej jest tych, które dają resztę 3 z dzielenia przez 7 niż tych, które dzielą się przez 7.

- **II sposób:**

Rozpatrzmy dwa ciągi:

ciąg (a_n) opisany wzorem $a_n = 7n + 94$, gdzie $n = 1, 2, \dots, 129$,

ciąg (b_n) opisany wzorem $b_n = 7n + 98$, gdzie $n = 1, 2, \dots, 128$.

Ponieważ:

$a_1 = 101, a_{129} = 997, a_n = 7n + 94 = 7(n + 13) + 3$, oraz $a_{n+1} - a_n = 7$, więc w ciągu (a_n) jest każda z liczb trzycyfrowych, które przy dzieleniu przez 7 dają resztę 3. Na podstawie **reguły równoliczności** stwierdzamy, że tych liczb jest 129;

$b_1 = 105, b_{128} = 994, b_n = 7n + 98 = 7(n + 14)$, oraz $b_{n+1} - b_n = 7$, więc w ciągu (b_n) jest każda z liczb trzycyfrowych, które dzielą się przez 7. Na podstawie **reguły równoliczności** stwierdzamy, że tych liczb jest 128.

Wynika stąd, że liczb trzycyfrowych, które przy dzieleniu przez 7 dają resztę 3 jest o jedną więcej, niż liczb trzycyfrowych, które dzielą się przez 7.

Przykład 4

Rozpatrzmy wszystkie możliwe wyniki rzutu siedmioma symetrycznymi monetami o różnych nominałach. Rozstrzygnij, których wyników wśród nich jest więcej:

- na dokładnie dwóch monetach wypadły reszki”, czy „na dokładnie dwóch monetach wypadły orły”,
- „wypadło więcej orłów niż reszek”, czy „wypadło więcej reszek niż orłów”.

Rozwiązanie

Zapiszmy wynik każdego rzutu tymi siedmioma monetami w porządku przypisanym monetom od najniższego nominału do najwyższego, przy czym przez o oznaczmy wynik ‘wypadł orzeł’, a przez r – ‘wypadła reszka’.

Przykładowo ciąg: o, o, o, r, o, r, r opisuje wynik rzutu, w którym na trzech pierwszych monetach oraz na piątej wypadły orły, a na pozostałych trzech – reszki.

- Korzystając z powyższej umowy, rozpatrzmy dwa rodzaje ciągów:
 - ciagi, w których występują dokładnie dwa r i pięć o ; tych ciągów jest tyle samo, co wszystkich wyników, w których na dokładnie dwóch monetach wypadły reszki,
 - ciagi, w których występują dokładnie dwa o i pięć r ; tych ciągów jest tyle samo, co wszystkich wyników, w których na dokładnie dwóch monetach wypadły orły.Zauważmy, że jeżeli w każdym ciągu typu (1) zamienimy każde o na r i każde r na o , to otrzymamy ciąg typu (2), a jeżeli w każdym ciągu typu (2) zamienimy każde r na o i każde o na r , to otrzymamy ciąg typu (1).
Zatem da się wzajemnie jednoznacznie przyporządkować do siebie każdy ciąg typu (1) z ciągiem typu (2), skąd, na podstawie **reguły równoliczności**, otrzymujemy, że wyników „na dokładnie dwóch monetach wypadły reszki” jest tyle samo, co wyników „na dokładnie dwóch monetach wypadły orły”.
- Zauważmy, że jeżeli w ciągu opisującym przypadek „wypadło więcej orłów niż reszek” zamienimy każde o na r , to otrzymamy przypadek „wypadło więcej reszek

niż orłów” i odwrotnie, jeżeli w ciągu opisującym przypadek „wypadło więcej reszek niż orłów” zamienimy każde o na r , to otrzymamy przypadek „wypadło więcej orłów niż reszek”.

Zatem każdy z wyników jednego przypadku da się wzajemnie jednoznacznie przyporządkować do wyniku z drugiego przypadku.

Wobec tego wyników „wypadło więcej orłów niż reszek” jest tyle samo, co wyników „wypadło więcej reszek niż orłów”, co stwierdzamy, korzystając z [reguły równoliczności](#).

Problem 1

Na zakończenie proponujemy samodzielne rozwiązanie problemu, który został podany we wstępie.

Na parapecie pod oknem leżała talia 52 kart do brydża. Po otwarciu okna zrobił się przeciąg, który zwał dziesięć kart z parapetu za okno. Oglądamy pierwszą kartę, która została na parapecie.

Który przypadek jest bardziej prawdopodobny:

- „oglądana karta jest w kolorze czerwonym”,

czy

- „oglądana karta jest w kolorze czarnym”?

Słownik

reguła równoliczności

Dwa zbiory A i B są równoliczne (mają tyle samo elementów), jeżeli ich elementy można przyporządkować wzajemnie jednoznacznie, to znaczy: każdemu elementowi zbioru A przyporządkujemy dokładnie jeden element zbioru B oraz każdemu elementowi zbioru B przyporządkujemy dokładnie jeden element zbioru A .

ciąg arytmetyczny

ciąg liczbowy o co najmniej trzech wyrazach, w którym każdy wyraz (oprócz pierwszego) różni się od wyrazu poprzedniego o tę samą wartość, nazywaną różnicą ciągu arytmetycznego

Animacja

Polecenie 1

Zapoznaj się z przedstawioną poniżej animacją. Przeanalizuj zaprezentowane w niej rozwiązanie zadania, w którym pokazane jest, jak zastosować regułę równoliczności.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D1FsJXG5i>

Film nawiązujący do treści materiału na temat liczby elementów zbioru skończonego oraz zasady równoliczności .

Polecenie 2

Korzystając z omówionego przykładu rozwiąż samodzielnie następujące zadanie.

Rozpatrzmy rzut czterema symetrycznymi kostkami sześciennymi do gry, z których każde dwie mają inne kolory.

Wykaż, że takich wyników, w których wypadła suma liczb oczek większa niż szesnaście jest tyle samo, co wyników, w których wypadła suma liczb oczek mniejsza niż dwanaście.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Oblicz, ile jest elementów w zbiorze liczb naturalnych, które są większe od 136 i jednocześnie mniejsze od 463.

☐ 324

☐ 327

☐ 326

☐ 325

Ćwiczenie 2



Rozpatrzmy rzut siedmioma symetrycznymi monetami. Dobierz w pary te wyniki, które są równoliczne.

wypadł jeden orzeł

wypadło pięć reszek

wypadły dokładnie trzy orły

wypadły dokładnie cztery orły

wypadły same orły

wypadło sześć reszek

wypadły dwie reszki

wypadły same reszki

Ćwiczenie 3



Oblicz, ile jest wszystkich liczb trzycyfrowych, które dzielą się przez 17. Wpisz odpowiedź w poniższe pole.

Odpowiedź:

Ćwiczenie 4



Ile jest elementów w zbiorze trzycyfrowych liczb naturalnych, które są podzielne przez 11? Zaznacz prawidłową odpowiedź.

☐ 81

☐ 82

☐ 80

☐ 79

Ćwiczenie 5



Oblicz, ile jest pięciocyfrowych liczb naturalnych, które przy dzieleniu przez każdą z liczb: 3, 4, 5 dają resztę 1. Odpowiedź wpisz do okna poniżej.

Odpowiedź:

Ćwiczenie 6



Rozpatrzmy wszystkie pięciocyfrowe liczby naturalne, w których zapisie dziesiętnym występują wyłącznie cyfry 1, 2, 3, 4. Zbiór wszystkich tak otrzymanych liczb można podzielić na pary w ten sposób, żeby sumy liczb każdej z tak otrzymanych par były równe S . Zaznacz wszystkie prawidłowe możliwości.

☐ $S = 33333$

☐ $S < 54321$

☐ $S > 12345$

☐ $S = 55555$

Ćwiczenie 7



Oblicz, ile jest elementów w każdym ze zbiorów:

A – liczb trzycyfrowych większych od 599, które przy dzieleniu przez 4 dają resztę 1,

B – liczb trzycyfrowych mniejszych od 602, które przy dzieleniu przez 5 dają resztę 1,

C – liczb trzycyfrowych mniejszych od 699, które przy dzieleniu przez 6 dają resztę 3,

D – liczb trzycyfrowych większych od 117, które dzielą się przez 9.

Połącz zbiory z liczbami ich elementów.

$ B $	101
$ D $	98
$ C $	99
$ A $	100

Ćwiczenie 8



Rozpatrujemy wszystkie liczby pięciocyfrowe o różnych cyfrach. Zaznacz wszystkie zdania prawdziwe.

☐

Dokładnie czwarta część z nich spełnia jednocześnie dwa warunki "cyfra jedności jest większa od cyfry dziesiątek" oraz "cyfra tysięcy jest mniejsza od cyfry setek".

☐

Dokładnie połowa z nich spełnia warunek "cyfra jedności jest większa od cyfry dziesiątek".

☐

Dokładnie trzecia część z nich spełnia warunek "cyfra setek jest mniejsza od cyfry dziesiątek".

Dla nauczyciela

Autor: Paweł Kwiatkowski

Przedmiot: Matematyka

Temat: Liczba elementów zbioru skończonego - zasada równoliczności

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

Treści nauczania – wymagania szczegółowe:

VI. Ciągi. Zakres podstawowy. Uczeń:

5) stosuje wzór na n -ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego;

XI. Kombinatoryka. Zakres podstawowy. Uczeń:

1) zlicza obiekty w prostych sytuacjach kombinatorycznych;

Zakres rozszerzony 1) oblicza liczbę możliwych sytuacji, spełniających określone kryteria, z wykorzystaniem reguły mnożenia i dodawania (także łącznie) oraz wzorów na liczbę: permutacji, kombinacji i wariacji, również w przypadkach wymagających rozważenia złożonego modelu zliczania elementów;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- opisuje regułę równoliczności,
- doskonalą umiejętności posługiwania się regułą równoliczności w zadaniach kombinatorycznych,
- ocenia liczby elementów pewnych zbiorów liczbowych,
- porównuje liczby wyników doświadczeń losowych, które spełniają warunek dający się opisać z wykorzystaniem pojęcia równoliczności zbiorów,
- wykorzystać pojęcie funkcji do opisu doświadczeń losowych, spełniających warunek równoliczności zbiorów.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona klasa;
- symulacja;
- dyskusja.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel dzieli uczniów na 4-osobowe grupy. Uczniowie w grupach zapoznają się z informacjami w sekcji „Przeczytaj”. Analizują przedstawione przykłady i notują pytania. Następnie przedstawiają pytania na forum klasy. Odpowiadają na nie uczniowie z innych grup. Nauczyciel wyjaśnia ewentualne wątpliwości.
2. Nauczyciel przechodzi do sekcji „Sprawdź się”. Zapowiada uczniom, że w kolejnym kroku będą rozwiązywać ćwiczenia numer 1 i 2, i będą to robić wspólnie. Wybrana osoba czyta po kolei polecenia. Po każdym przeczytanym poleceniu ochotnik udziela odpowiedzi. Reszta uczniów ustosunkowuje się do niej, proponując swoje pomysły. Nauczyciel w razie potrzeby koryguje odpowiedzi, dopowiada istotne informacje, udziela uczniom informacji zwrotnej.
3. W kolejnym kroku uczniowie realizują w parach ćwiczenia 3-5, po ich wykonaniu porównują otrzymane wyniki z inną parą.
4. Uczniowie indywidualnie wykonują ćwiczenia nr 6-8, ale następnie konsultują swoje rozwiązania z innym uczniem i zapisują na kartce problemy, które mieli podczas ich wykonywania.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Wybrany uczeń podsumowuje zajęcia, zwracając uwagę na nabyte umiejętności.

Praca domowa:

1. Zadanie dla kolegi/koleżanki. Uczniowie dobierają się w pary i opracowują zadania analogiczne do ćwiczeń 7 i 8 z sekcji „Sprawdź się”. Następnie przesyłają je do siebie mailem, rozwiązują i na następnej lekcji porównują wyniki.

Materiały pomocnicze:

- [Liczba elementów zbioru skończonego](#)

Wskazówki metodyczne:

- Medium w sekcji „Animacja” można wykorzystać jako materiał służący powtórzeniu materiału w temacie „Liczba elementów zbioru skończonego – zasada równoliczności”.