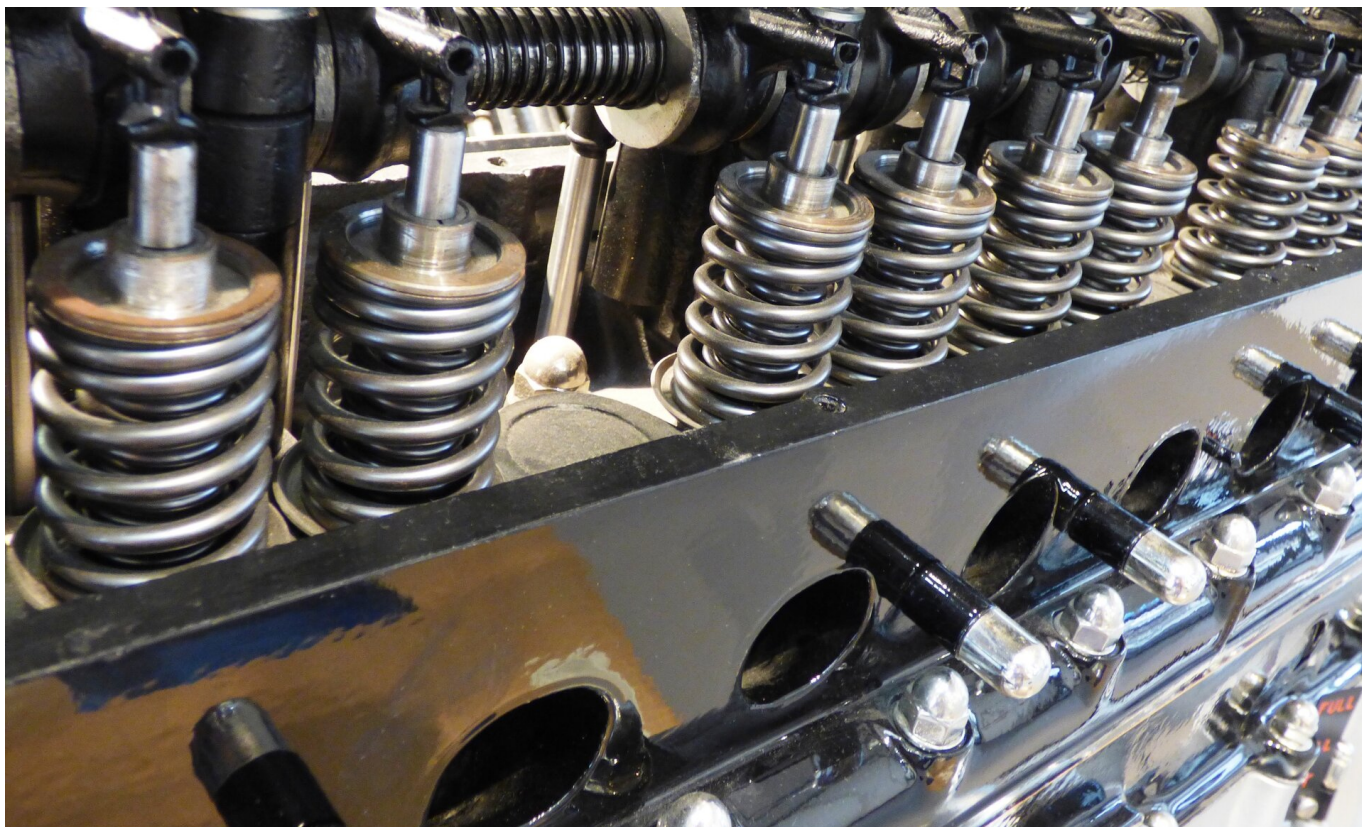




Interpretujemy pole pod wykresem zależności siły od drogi.

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Film samouczek](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Interpretujemy pole pod wykresem zależności siły od drogi.

Źródło: dostępny w internecie: <https://pixabay.com/pl/photos/silnik-motoryzacja-cylinder-1100580/> [dostęp 24.04.2022 r.].

Czy to nie ciekawe?

W e-materiale “Praca mechaniczna i jej jednostka” przedstawiliśmy definicję pracy jako iloczynu skalarnej siły i przemieszczenia. Obliczanie pracy na podstawie tego wzoru nie jest trudne, gdy siła ma stałą wartość. Jest to jednak stosunkowo prosta sytuacja. Co jednak możemy zrobić, gdy siła zmienia się wraz z przemieszczeniem? Czy wtedy również jesteśmy w stanie obliczyć wartość pracy? W tym e-materiale odpowiemy na to pytanie.

Twoje cele

Pracując z tym e-materiałem:

- dowiesz się, jaka jest interpretacja fizyczna pola pod wykresem zależności siły od drogi,
- nauczysz się wyznaczać pracę w przypadku, gdy działająca siła jest zmienna,
- zastosujesz interpretację pola pod wykresem zależności siły od drogi do obliczania pracy w różnych przypadkach.

Przeczytaj

Warto przeczytać

Aby obliczyć pracę mechaniczną siły F działającej na drodze, gdzie łączne **przemieszczenie** wynosi Δr , korzystamy ze wzoru:

$$W = F \Delta r \cos \theta$$

gdzie θ jest kątem między wektorami siły i przemieszczenia. Jeśli ruch jest prostoliniowy (a tylko taki będziemy rozpatrywać w tym e-materiale), wartość przemieszczenia jest po prostu równa wartości drogi $\Delta r = s$. Wyznaczenie pracy nie jest skomplikowane, jeśli siła działająca na ciało ma stałą wartość. Jak jednak obliczyć pracę w sytuacji, gdy siła zmienia się podczas ruchu? Sytuacja taka nie jest nadzwyczajna i występuje na przykład podczas ruchu samochodu, który przejeżdża z asfaltowej drogi na leśną, piaszczystą ścieżkę. W tym przypadku siła tarcia kół o podłoże ulegnie zmianie. Innym przykładem jest ściskanie lub rozciąganie sprężyny. Siła, z jaką musimy działać na sprężynę, ma wtedy postać:

$$F = k \Delta x,$$

gdzie k jest współczynnikiem sprężystości sprężyny, a Δx - wydłużeniem lub skróceniem sprężyny. Jak widzisz, siła w tym przypadku jest wprost proporcjonalna do zmiany długości sprężyny.

Na początek rozpatrzmy jednak prostsze zagadnienie. Wyobraźmy sobie, że na ciało działa pewna, poziomo skierowana siła $F_1 = 3 \text{ N}$, która powoduje poziome przesunięcie ciała o $s_1 = 5 \text{ m}$. W tym momencie siła zmienia swoją wartość na $F_2 = 1 \text{ N}$ i przesuwa ciało o następne $s_2 = 3 \text{ m}$. Aby wyznaczyć całkowitą pracę, powinniśmy dwa razy skorzystać ze wzoru opisującego pracę i dodać otrzymane wyniki:

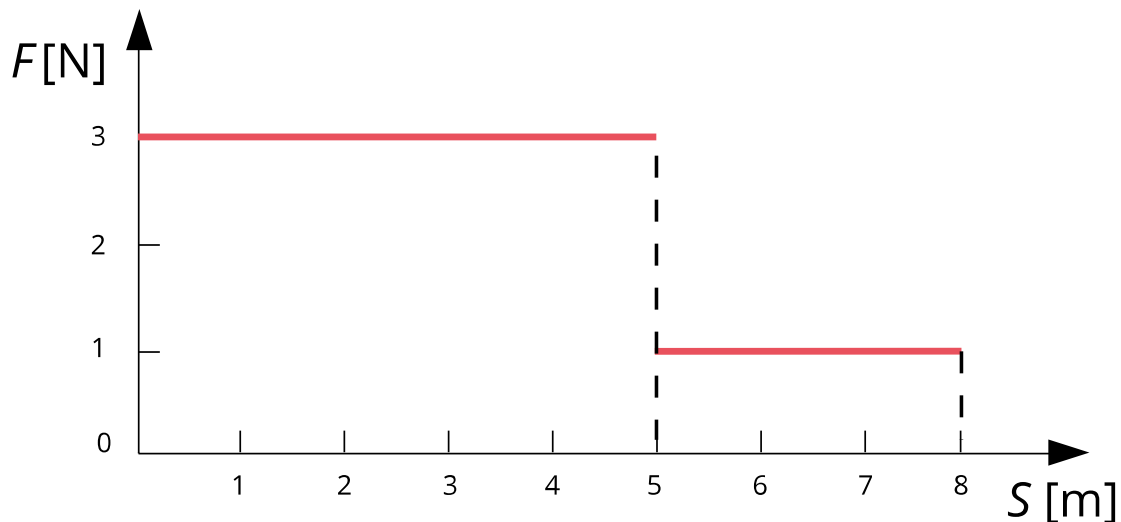
$$W_1 = F_1 s_1 \cos 0^\circ = 3 \text{ N} \cdot 5 \text{ m} = 15 \text{ J},$$

$$W_2 = F_2 s_2 \cos 0^\circ = 1 \text{ N} \cdot 3 \text{ m} = 3 \text{ J},$$

$$W = W_1 + W_2 = 18 \text{ J}.$$

W sytuacji jednak, gdy siła w trakcie ruchu zmieniałaby się wielokrotnie, dodawanie kolejnych "fragmentów" byłoby bardzo czasochłonne i kłopotliwe. Spróbujmy zamiast tego

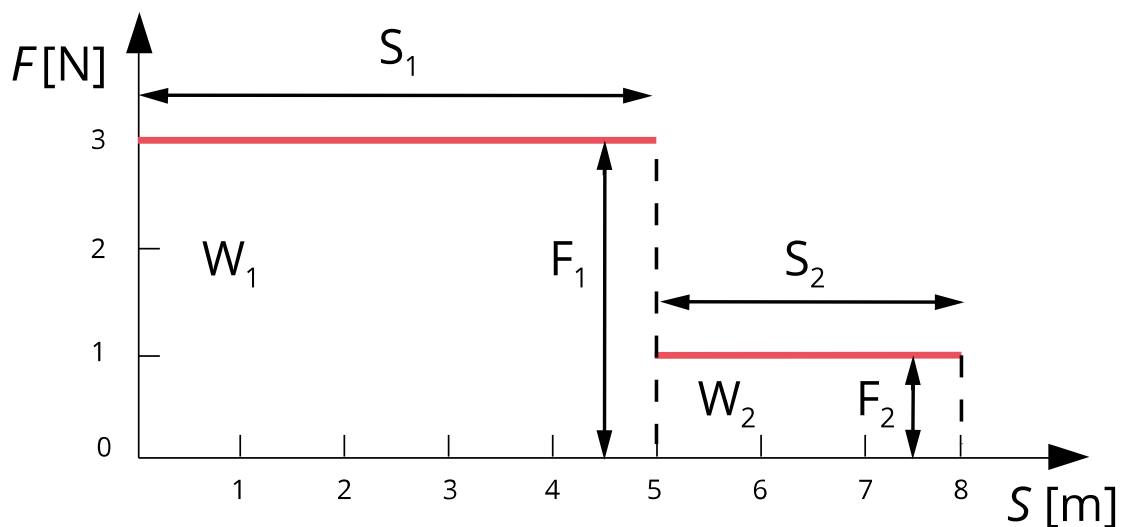
przedstawić naszą sytuację na wykresie siły od drogi:



Rys. 1. Zależność siły od drogi dla opisanego powyżej przypadku.

Źródło: Politechnika Warszawska Wydział Fizyki, licencja: CC BY 4.0. <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.pl>.

Zwróć teraz uwagę, że obliczone powyżej iloczyny odpowiadają dokładnie polu prostokątów pod wykresem:



Rys. 2. Wyznaczanie pola pod wykresem zależności siły od drogi.

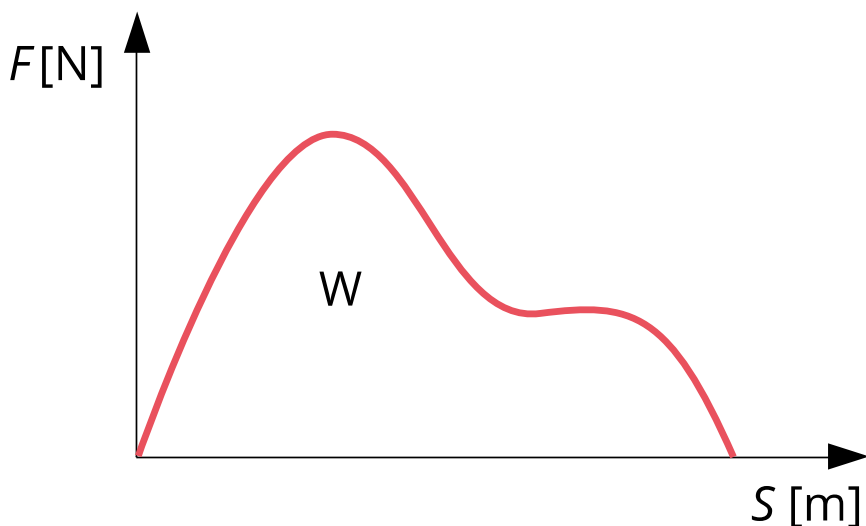
Źródło: Politechnika Warszawska Wydział Fizyki, licencja: CC BY 4.0. <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.pl>.

Jest to ogólna prawidłowość. Pracę danej siły F możemy obliczać, znajdując pole pod wykresem siły od drogi. Nasze rozumowanie możemy uogólnić na siły, które nie są równoległe do przemieszczenia - w takim przypadku zamiast siły, bierzemy pod uwagę jedynie jej składową, która jest równoległa do przemieszczenia $F_{\parallel}$. Jeżeli kąt między siłą a przemieszczeniem wynosi θ , to składowa równoległa siły wynosi:

$$F_{\parallel} = F \cos \theta.$$

Ciekawostka dla bardziej dociekliwych:

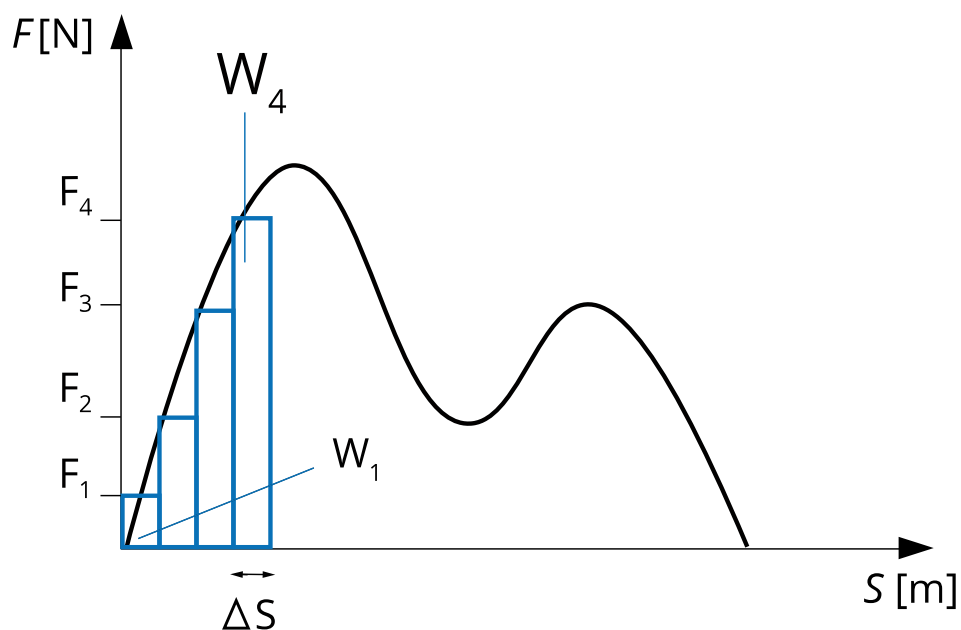
Za pomocą przedstawionego powyżej sposobu możemy stosunkowo prosto obliczyć pracę w sytuacji, gdy pole pod wykresem zależności siły od drogi można przedstawić jako sumę prostych, geometrycznych kształtów. Co jednak zrobić w przypadku, gdy zależność ta przyjmuje kształt np. fragmentu krzywej (jak na poniższym rysunku)?



Rys. 3. Dowolna zależność siły od drogi.

Źródło: Politechnika Warszawska Wydział Fizyki, licencja: CC BY 4.0. <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.pl>.

W takiej sytuacji, pracę, w sposób przybliżony, możesz obliczyć, dzieląc pole pod wykresem na wąskie paski o szerokości Δs i wysokości równej wartości siły w połowie szerokości paska. Obliczając pola wszystkich pasków-prostokątów, otrzymasz przybliżoną wartość pracy. Rozumowanie to przedstawiliśmy na rysunku. Im “węższy” pasek (im mniejsze Δs) wykorzystasz, tym dokładniejsze przybliżenie uzyskasz.



Rys. 4. Podział pola pod wykresem zależności na małe, prostokątne fragmenty.

Źródło: Politechnika Warszawska Wydział Fizyki, licencja: CC BY 4.0. <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.pl>.

$$W = W_1 + W_2 + W_3 + \dots + W_n$$

$$W = F_1 \Delta s + F_2 \Delta s + F_3 \Delta s + \dots + F_n \Delta s$$

Słowniczek

przemieszczenie

(*ang.: displacement*) – wektor łączący położenie początkowe ciała z końcowym. Wartość tego wektora jest zawsze mniejsza bądź równa drodze pokonanej przez ciało.

Film samouczek

Interpretujemy pole pod wykresem zależności siły od drogi

Oglądając poniższy film dowiesz się, w jaki sposób, korzystając z wykresu zależności siły od drogi, możemy wyznaczyć wartość wykonanej pracy, gdy siła wykonująca tę pracę zmienia się wraz z przesunięciem.

Polecenie 1

Jak zmieniłby się wykres oraz wyznaczone wartości pracy, gdyby przyłożona siła była skierowana pod kątem 45° do poziomemu?

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Wartość pracy można obliczyć, korzystając z wykresu:

☐ drogi od siły

☐ siły od drogi

☐ czasu od siły

☐ siły od czasu

Ćwiczenie 2



Jaki kształt pola pod wykresem siły od drogi uzyskamy, jeśli siła działająca na ciało jest stała?

☐ trójkąta

☐ półokręgu

☐ trapezu

☐ prostokąta

Ćwiczenie 3

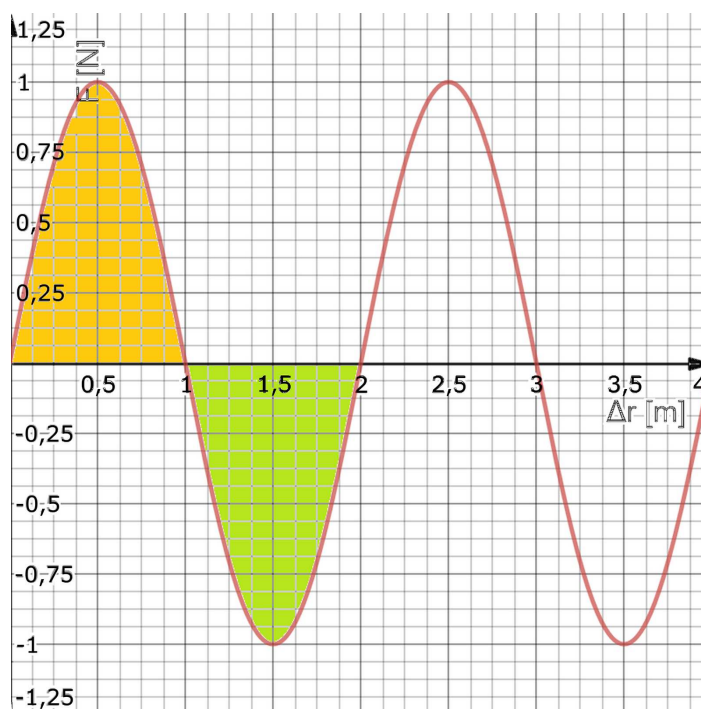


Stała siła $F = 10 \text{ N}$ działająca na ciało powoduje jego przemieszczenie o $\Delta r = 5 \text{ m}$ (w kierunku działania siły). Wykaż, że praca obliczona za pomocą wykresu zależności siły od przemieszczenia da dokładnie ten sam wynik, jak za pomocą wzoru będącego definicją pracy.

Ćwiczenie 4



Na rysunku przedstawiono wykres siły F od przemieszczenia ciała Δr . Wyznacz pracę siły F , wiedząc, że pole pokolorowanych obszarów jest takie samo.



Źródło: Politechnika Warszawska Wydział Fizyki, licencja: CC BY 4.0.

Praca siły w tym przypadku wynosi J.

Ćwiczenie 5



Narysuj wykres zależności siły od drogi dla siły niezbędnej do rozciągnięcia sprężyny o współczynniku sprężystości $k = 2 \text{ N/m}$. Siła ta dana jest wzorem $F = k\Delta x$, gdzie Δx jest rozciągnięciem sprężyny ponad jej długość początkową.

Ćwiczenie 6



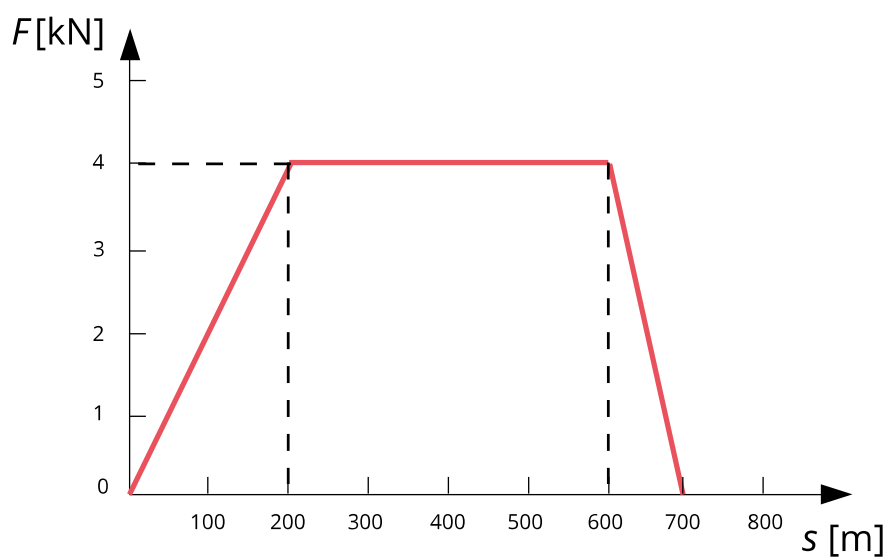
Korzystając z interpretacji pracy jako pola pod wykresem siły od drogi, oblicz pracę wykonaną podczas rozciągnięcia sprężyny o $\Delta x = 4 \text{ cm}$ ponad jej początkową długość. Siła niezbędna do rozciągnięcia sprężyny dana jest wzorem $F = k\Delta x$, gdzie Δx jest rozciągnięciem sprężyny ponad jej długość początkową. Współczynnik sprężystości sprężyny k wynosi $2,5 \text{ N/m}$. Wynik podaj w milidżulach.

W = mJ

Ćwiczenie 7



Silnik samochodu pracuje ze zmienną mocą. Z tego powodu siła ciągu działająca na samochód również zmienia się. Zależność siły od drogi przebytej przez samochód przedstawiono na rysunku. Zakładając, że połowa wykonanej przez silnik pracy powoduje zwiększenie energii kinetycznej pojazdu, oblicz końcową prędkość samochodu. Masa pojazdu wynosi $m = 2,2$ t. Wynik podaj w m/s, z dokładnością do jednego miejsca po przecinku.



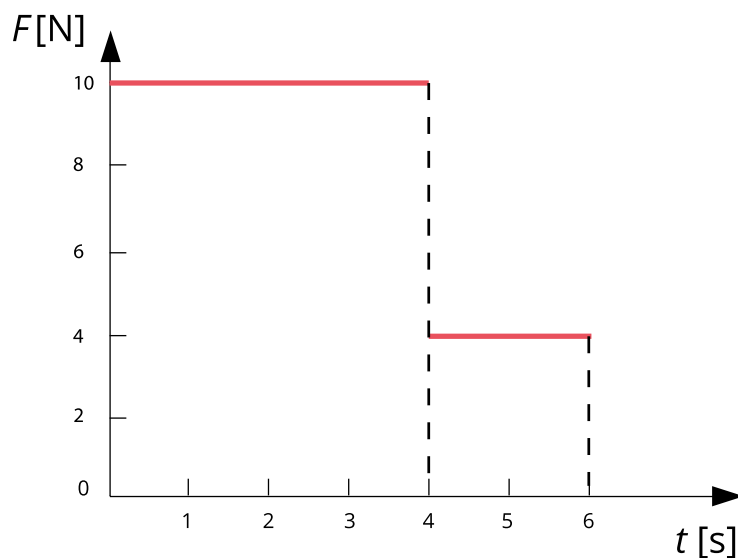
Źródło: Politechnika Warszawska Wydział Fizyki, licencja: CC BY 4.0.

$v =$ m/s

Ćwiczenie 8



Na rysunku przedstawiono zależność siły działającej na ciało od czasu. Wiedząc, że masa ciała wynosi $m = 2 \text{ kg}$ i że przed rozpoczęciem działania siły znajdowało się ono w spoczynku, oblicz pracę, jaką wykonała ta siła.



Źródło: Politechnika Warszawska Wydział Fizyki, licencja: CC BY 4.0.

$W =$ J

Dla nauczyciela

Konspekt (scenariusz) lekcji

Imię i nazwisko autora:	Przemysław Michalski
Przedmiot:	Fizyka
Temat zajęć:	Jak obliczyć pracę, gdy na pierwszy rzut oka nie można jej obliczyć?
Grupa docelowa:	III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres podstawowy i rozszerzony
Podstawa programowa:	Cele kształcenia – wymagania ogólne II. Rozwiązywanie problemów z wykorzystaniem praw i zależności fizycznych. Zakres podstawowy Treści nauczania – wymagania szczegółowe I. Wymagania przekrojowe. Uczeń: 4) przeprowadza obliczenia liczbowe posługując się kalkulatorem; 6) tworzy teksty, tabele, diagramy lub wykresy, rysunki schematyczne lub blokowe dla zilustrowania zjawisk bądź problemu; właściwie skaluje, oznacza i dobiera zakresy osi; 7) wyodrębnia z tekstów, tabel, diagramów lub wykresów, rysunków schematycznych lub blokowych informacje kluczowe dla opisywanego zjawiska bądź problemu; przedstawia te informacje w różnych postaciach; II. Mechanika. Uczeń: 10) posługuje się pojęciami pracy mechanicznej, mocy, energii kinetycznej, energii potencjalnej wraz z ich jednostkami; stosuje zasadę zachowania energii mechanicznej do obliczeń. Zakres rozszerzony Treści nauczania – wymagania szczegółowe

	I. Wymagania przekrojowe. Uczeń: 4) przeprowadza obliczenia liczbowe posługując się kalkulatorem; 6) tworzy teksty, tabele, diagramy lub wykresy, rysunki schematyczne lub blokowe dla zilustrowania zjawisk bądź problemu; właściwie skaluje, oznacza i dobiera zakresy osi; 7) wyodrębnia z tekstów, tabel, diagramów lub wykresów, rysunków schematycznych lub blokowych informacje kluczowe dla opisywanego zjawiska bądź problemu; przedstawia te informacje w różnych postaciach; II. Mechanika. Uczeń: 22) interpretuje pole pod wykresem zależności siły od drogi i pole pod wykresem zależności mocy od czasu jako wykonaną pracę.
Kształtowane kompetencje kluczowe:	Zalecenia Parlamentu Europejskiego i Rady UE z 2018 r.: • kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji, • kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii, • kompetencje cyfrowe, • kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.
Cele operacyjne:	Uczeń: 1. interpretuje pracę jako pole pod wykresem zależności siły od drogi. 2. stosuje interpretację pracy i oblicza ją dla danego wykresu zależności siły od drogi. 3. analizuje wzór lub opis słowny i na jego podstawie rysuje wykres zależności drogi od czasu. 4. analizuje wykresy siły od czasu i na tej podstawie tworzy wykresy siły od przemieszczenia; oblicza pracę na tej podstawie.
Strategie nauczania:	Flipped classroom
Metody nauczania:	Zajęcia rachunkowe
Formy zajęć:	Praca indywidualna

Środki dydaktyczne:	tablica
Materiały pomocnicze:	brak
PRZEBIEG LEKCJI	
Faza wprowadzająca:	
Weryfikacja wiedzy uczniów zdobytej na podstawie e-materiału. Wprowadzenie nauczyciela dotyczące ograniczeń w stosowaniu klasycznego wzoru na pracę – tj. zmiana siły w trakcie ruchu, zmiana kąta między siłą a przemieszczeniem. Sprawdzenie znajomości interpretacji wykresu zależności siły od drogi.	
Faza realizacyjna:	
Część 1 – rysowanie wykresów zależności siły od drogi. Nauczyciel rozwiązuje z uczniami zadanie 5 z zestawu ćwiczeń i omawia sposób tworzenia wykresu. W tym przypadku wykres był tworzony na podstawie wzoru zależności. Następnie nauczyciel wprowadza „opisowy” sposób zmiany siły wraz z przemieszczeniem. Zadaniem uczniów jest narysowanie wykresu na podstawie jego opisu słownego stworzonego na podstawie zadania 7. Obydwa wykresy zostają na tablicy, wraz z miejscem na dalsze obliczenia. Część 2 – obliczanie pracy na podstawie wykresów zależności siły od drogi. Obydwa wprowadzone powyżej przypadki dotyczą zmieniającej się w trakcie ruchu siły. Nauczyciel prosi uczniów o wyznaczenie pracy w obydwu przypadkach. De facto, uczniowie rozwiązują w ten sposób zadanie 6 i 7. Część 3 – przekształcanie innych wykresów. Nauczyciel rozwiązuje i omawia z uczniami zadanie 8 z zestawu ćwiczeń. Jeśli udało się zrealizować wszystkie punkty i zostało jeszcze trochę czasu, nauczyciel może zaproponować inne zadanie związane z przekształceniem wykresu $F(t)$ na $F(s)$ lub przejść do części 4. Część 4 – zmienny kąt między siłą a przemieszczeniem. Nauczyciel prosi uczniów o rozważenie sytuacji, gdy długość wektora siły jest stała, ale w trakcie ruchu zmienia się kąt między siłą a przemieszczeniem. Jaki będzie kształt wykresu $F(s)$ w tym przypadku?	
Faza podsumowująca:	
Podsumowanie i wyjaśnienie następuje po rozwiązaniu każdego zadania.	
Praca domowa:	

Samodzielne rozwiązanie zadań 1-4 z zestawu ćwiczeń. Dla uczniów realizujących zakres rozszerzony – wykreślenie wykresu w arkuszu kalkulacyjnym oraz obliczenie pracy jako pola pod nim przy wykorzystaniu instrukcji w części „Dla bardziej dociekliwych” e-materiału.

**Wskazówki
metodyczne
opisujące różne
zastosowania danego
multimedium:**

Multimedium bazowe może być wykorzystane na lekcji w celu sprowokowania do dyskusji lub po lekcji w celu powtórzenia i utrwalenia wiadomości.