Równanie stycznej przechodzącej przez punkt leżący na okręgu

Równanie stycznej przechodzącej przez punkt leżący na okręgu

Źródło: Juan Cruz Mountford, dostępny w internecie: unsplash.com.

Ile punktów wspólnych może mieć okrąg i prosta? Czy może być ich nieskończenie wiele? Wykorzystując pojęcie odległości punktu od prostej, omówimy szczególny przypadek wzajemnego położenia okręgu i prostej, gdy mają one dokładnie jeden punkt wspólny. Mówimy wówczas o stycznej do okręgu.

Twoje cele

- Dowiesz się, czym jest styczna do okręgu.
- Wykorzystasz własności stycznej do okręgu do wyznaczenia równania stycznej.
- Wyznaczysz równanie stycznej do okręgu przechodzącej przez punkt leżący na okręgu.

Przeczytaj

Już wiesz

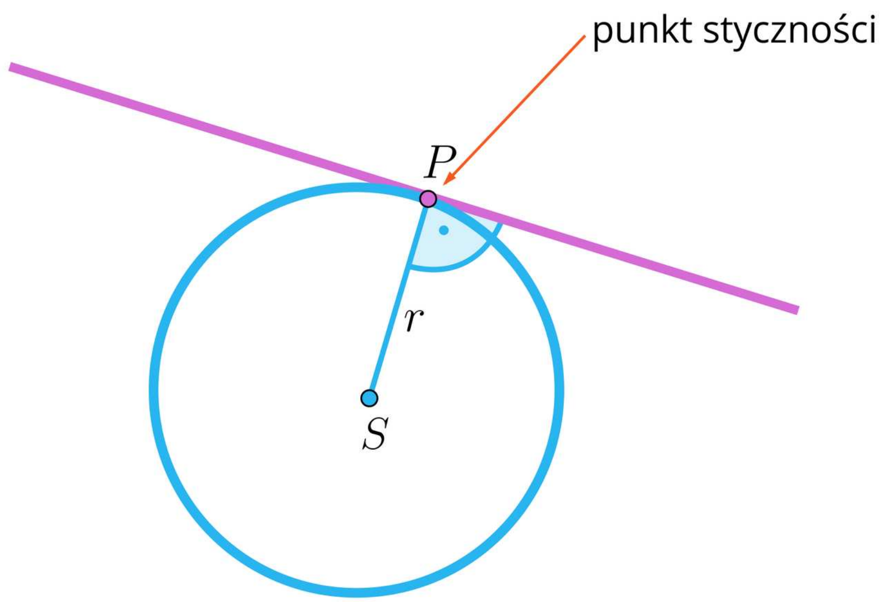
Na podstawie badania wzajemnego położenia prostej i okręgu możemy stwierdzić, że okrąg i prosta mogą mieć:

- jeden punkt wspólny,
- dwa punkty wspólne,
- zero punktów wspólnych.

Omówimy przypadek, gdy prosta i okrąg przecinają się w dokładnie jednym punkcie.

Definicja: styczna do okręgu

Styczną do okręgu nazywamy prostą, która ma dokładnie jeden punkt wspólny z tym okręgiem. Punkt ten nazywamy **punktem styczności.**



Własność: styczna do okręgu

Styczna do okręgu jest prostopadła do promienia łączącego punkt styczności i środek okręgu.

Ważne!

Zauważmy, że długość promienia r jest równa odległości środka S od punktu P, zatem $r = |SP|$.

Omówimy teraz metody wyznaczania równania stycznej do okręgu, przechodzącej przez punkt leżący na tym okręgu.

Metoda I: za pomocą wzoru na odległość punktu od prostej

Przykład 1

Wyznaczymy równanie stycznej do okręgu o równaniu $(x+1)^2+(y-3)^2=5$, przechodzącej przez punkt $(1,2)$.

Z równania okręgu możemy odczytać środek $S=(-1,3)$ oraz promień $r=\sqrt{5}$.

Styczna do okręgu ma równanie $y=ax+b$.

Ponieważ punkt $(1,2)$ należy do tej prostej, zatem otrzymujemy równanie $2=a+b$, więc $b=2-a$.

Prosta jest postaci $y=ax+2-a$, co po przekształceniu do postaci ogólnej daje $ax-y+2-a=0$.

Wykorzystamy wzór na odległość punktu od prostej $d=\frac{|Ax+By-C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$ oraz fakt, że odlegość środka okręgu od podanego punktu jest równa długości promienia okręgu.

Zatem mamy równanie $\frac{|-a-3+2-a|}{\sqrt{a^2+1}}=\sqrt{5}$.

Po przekształceniu równania otrzymujemy, że $|-2a-1|=\sqrt{5}\sqrt{a^2+1}$.

Podnosimy obie strony równania do kwadratu i przekształcamy do postaci $a^2-4a+4=0$, co daje $(a-2)^2=0$, więc $a=2$.

Otrzymujemy, że $b=0$.

Zatem szukana styczna jest postaci $y=2x$.

Metoda II: poprzez rozwiązanie układu równań, w którym jedno równanie jest równaniem okręgu, a drugie równaniem szukanej stycznej

Przykład 2

Wyznaczymy równanie stycznej do okręgu o równaniu $(x-3)^2+(y+2)^2=25$, przechodzącej przez punkt $(0,2)$.

Prosta styczna jest postaci $y=ax+b$.

Ponieważ punkt $(0,2)$ należy do tej prostej, zatem jest ona postaci $y=ax+2$.

Rozwiążemy układ równań $\begin{cases}(x-3)^2+(y+2)^2=25\\ y=ax+2\end{cases}$.

Aby prosta była styczna do okręgu, to układ musi mieć jedno rozwiązanie.

Po podstawieniu otrzymujemy równanie $(x-3)^2+(ax+4)^2=25$

Po uporządkowaniu mamy, że $\left(a^2+1\right)x^2+(8a-6)x=0$. Obliczamy wyróżnik, który musi wynosić 0, zatem mamy równanie $(8a-6)^2=0$.

Z równania wynika, że $a=\frac{3}{4}$.

Zatem szukana styczna jest postaci $y=\frac{3}{4}x+2$.

Metoda III: poprzez wyznaczenie równania prostej prostopadłej do promienia okręgu, przechodzącej przez podany punkt

Przykład 3

Wyznaczymy równanie stycznej do okręgu $(x-2)^2+y^2=10$, przechodzącej przez punkt $(1,3)$.

Z równania okręgu możemy odczytać, że $S=(2,0)$ oraz $r=\sqrt{10}$.

Ponieważ styczna jest prostopadła do promienia okręgu w punkcie styczności, wyznaczymy równanie prostej prostopadłej.

Prosta przechodząca przez punkty $(1,3)$ i $(2,0)$ ma współczynnik kierunkowy równy $a=-3$.

Zatem współczynnik kierunkowy stycznej wynosi $a=\frac{1}{3}$.

Styczna przechodzi przez punkt $(1,3)$, zatem mamy równanie $3=\frac{1}{3}+b$.

Zatem $b=2\frac{2}{3}$.

Równanie szukanej stycznej jest postaci $y=\frac{1}{3}x+2\frac{2}{3}$.

Metoda IV: za pomocą wzoru na styczną do okręgu

Jeżeli okrąg ma równanie

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2,$$

gdzie:

$S=(a,b)$ - środek,
r - promień okręgu,

(x_a, y_b) - punkt, przez który przechodzi styczna,

wówczas równanie stycznej wyraża się wzorem

$$(x_a - a)(x - a) + (y_b - b)(y - b) = r^2.$$

Przykład 4

Wyznaczymy równanie stycznej do okręgu o równaniu $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 4$, przechodzącej przez punkt $(2, 1)$.

Odczytujemy dane $S = (2, -1)$, $r = 2$ oraz $(x_a, y_b) = (2, 1)$.

Po podstawieniu do wzoru na równanie stycznej otrzymujemy, że $(2-2)(x-2) + (1+1)(y+1) = 4$.

Zatem równanie stycznej jest postaci $y = 1$.

Przykład 5

Wyznaczymy dla jakiego parametru m okrąg $x^2 + (y+2)^2 = m + 4$ i prosta $y = 2x - 1$ mają dokładnie jeden punkt wspólny.

Aby równanie przedstawiało okrąg, to powinien zachodzić warunek $m + 4 > 0$, więc $m \in (-4, \infty)$.

W celu wyznaczenia wartości parametru rozwiążemy układ równań, w którym jedno równanie jest równaniem okręgu, a drugie równanie opisuje prostą.

Zatem mamy $\begin{cases} x^2 + (y+2)^2 = m + 4 \\ y = 2x - 1 \end{cases}$.

Podstawiamy drugie równanie do pierwszego równania w miejsce niewiadomej y. Otrzymujemy równanie $x^2 + (2x+1)^2 = m + 4$, co po przekształceniu daje równanie $5x^2 + 4x - m - 3 = 0$.

Aby prosta i okrąg miały dokładnie jeden punkt wspólny, to wyróżnik musi być równy 0.

Obliczamy $\Delta = 16 - 20 \cdot (-m - 3) = 76 + 20m$.

Z równania $\Delta = 0$ oraz po uzgodnieniu z założeniem otrzymujemy, że $m = -3\frac{4}{5}$.

Słownik

styczna do okręgu

prosta, która ma dokładnie jeden punkt wspólny z okręgiem

równanie stycznej do okręgu

równanie postaci $(x_a - a)(x - a) + (y_b - b)(y - b) = r^2$, gdzie środek $S = (a, b)$ oraz r - promień okręgu, (x_a, y_b) - punkt, przez który przechodzi styczna

Animacja

Polecenie 1

Zapoznaj się z animacją, a następnie wykonaj polecenie.

Film dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/D16P1AT3o

Film nawiązujący do treści lekcji dotyczącej równania stycznej przechodzącej przez punkt.

Polecenie 2

Wyznacz równanie stycznej do okręgu o równaniu $(x-3)^2+(y+2)^2=20$, przechodzącej przez punkt $(1,2)$.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

Ćwiczenie 7

Ćwiczenie 8

Dla nauczyciela

Autor: Tomasz Wójtowicz

Przedmiot: Matematyka

Temat: Równanie stycznej przechodzącej przez punkt leżący na okręgu

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres podstawowy i rozszerzony

Podstawa programowa:
Treści nauczania – wymagania szczegółowe:
IX. Geometria analityczna na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zakres podstawowy. Uczeń:
6) znajduje punkty wspólne prostej i okręgu oraz prostej i paraboli będącej wykresem funkcji kwadratowej;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- zna pojęcie stycznej do okręgu;
- wyznacza równanie stycznej do okręgu kilkoma sposobami;
- stosuje pojęcie stycznej do okręgu do rozwiązywania problemów matematycznych.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona klasa;
- z użyciem e-podręcznika;
- objaśnienie nowej wiedzy.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca całego zespołu klasowego;
- praca w parach.

Środki dydaktyczne:

- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda;
- komputery z dostępem do internetu dla uczniów.

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

1. Nauczyciel prosi uczniów o zapoznanie się z zagadnieniami, które będą poruszane podczas lekcji.

Faza wstępna:

1. Wskazanie przez nauczyciela tematu: „Równanie stycznej przechodzącej przez punkt leżący na okręgu” i celów zajęć, przejście do wspólnego ustalenia kryteriów sukcesu.
2. Nauczyciel prosi o przygotowanie w parach pytań związanych z tematem. Czego się uczniowie chcą dowiedzieć? Co ich interesuje w związku z tematem lekcji?

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel dzieli uczniów na 4-osobowe grupy. Uczniowie w grupach zapoznają się z informacjami w sekcji „Przeczytaj”. Analizują przedstawione przykłady i notują pytania. Następnie przedstawiają pytania na forum klasy. Odpowiadają na nie uczniowie z innych grup. Nauczyciel wyjaśnia ewentualne wątpliwości. Nauczyciel czyta polecenie nr 1 w sekcji „Animacja” - „Obejrzyj animację, a następnie wykonaj polecenie” - prosi uczniów, aby zapoznali się z materiałem. Uczniowie zapisują ewentualne wątpliwości i niezrozumiałe aspekty, które zostały w nim przedstawione - nauczyciel tłumaczy je na forum klasy.
2. Wybrani uczniowie wykonują ćwiczenia nr 1-2 na forum klasy. Nauczyciel sprawdza poprawność ich wykonania , omawiając je wraz z uczniami na bieżąco.
3. Kolejne ćwiczenia (numer 3, 4 i 5) uczniowie wykonują w parach. Następnie konsultują swoje rozwiązania z inną parą uczniów i ustalają jedną wersję odpowiedzi.
4. Uczniowie wykonują ćwiczenia nr 6-8 z sekcji „Sprawdź się”. Nauczyciel sprawdza poprawność wykonanych zadań, omawiając je wraz z uczniami.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.

2. Wybrany uczeń podsumowuje zajęcia, zwracając uwagę na nabyte umiejętności, odnosząc się do wyświetlonych na tablicy interaktywnej celów z sekcji „Wprowadzenie”.

Praca domowa:

1. Zadanie dla kolegi/koleżanki. Uczniowie dobierają się w pary i opracowują zadania analogiczne do ćwiczeń 7 i 8 z sekcji „Sprawdź się”. Następnie przesyłają je do siebie mailem, rozwiązują i na następnej lekcji porównują wyniki.

Materiały pomocnicze:

- Styczna do okręgu
- Jak wyznaczyć równanie stycznej?

Wskazówki metodyczne:

- Medium w sekcji „Animacja” można wykorzystać jako materiał służący powtórzeniu materiału w temacie „Równanie stycznej przechodzącej przez punkt leżący na okręgu”.