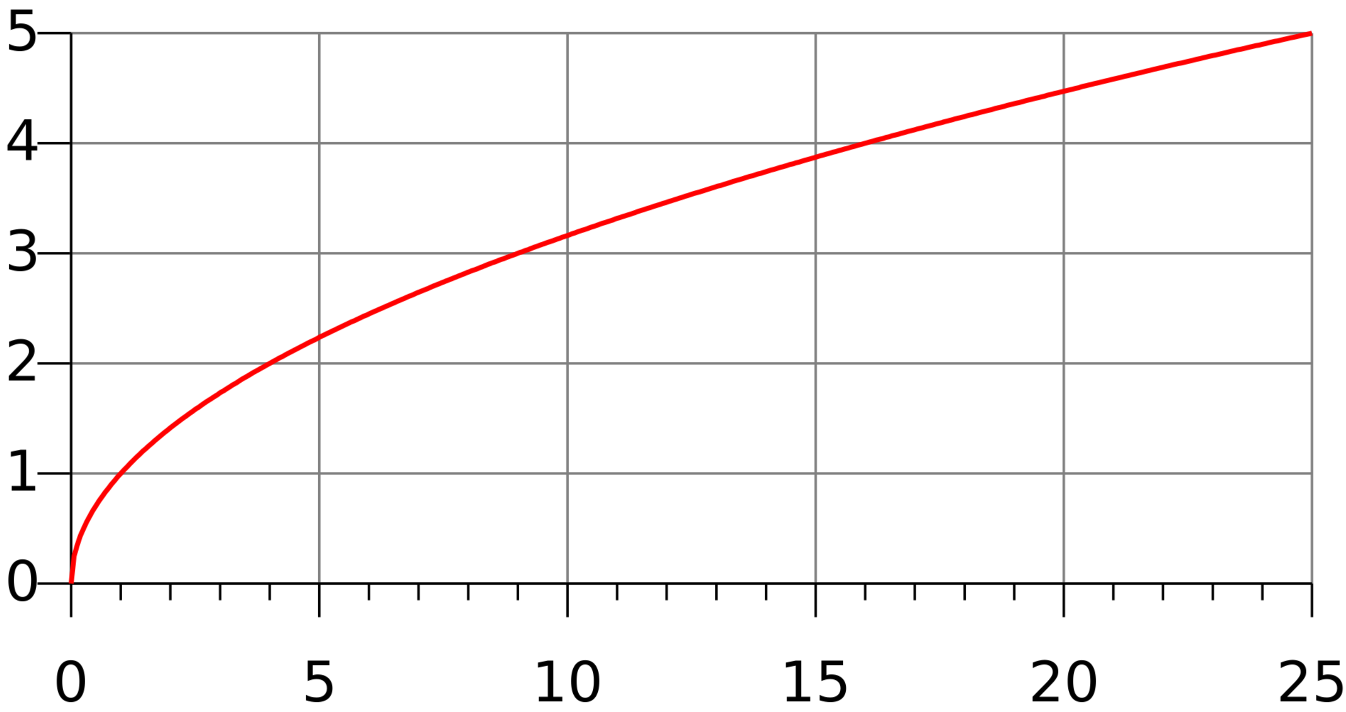
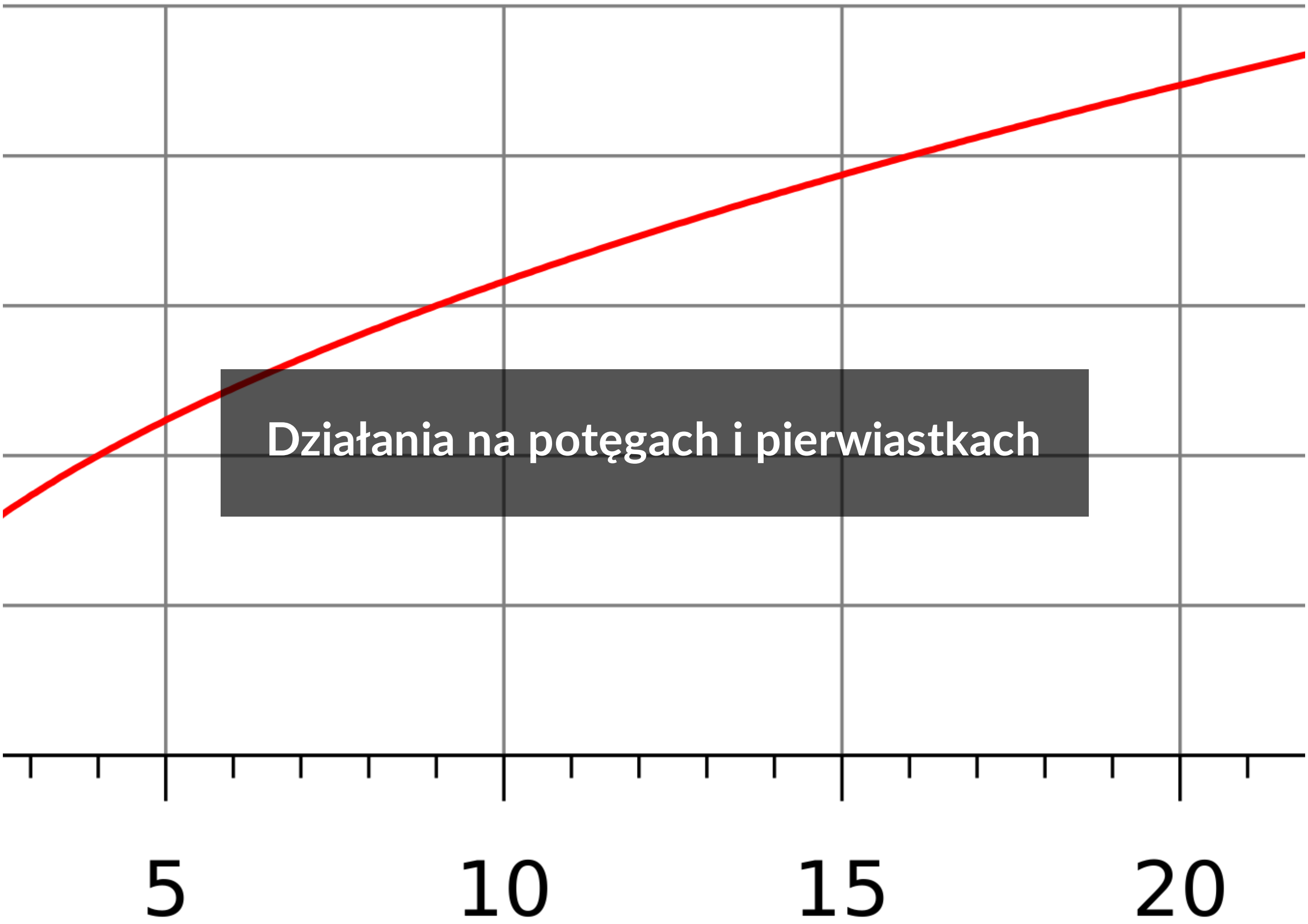


Działania na potęgach i pierwiastkach

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Gra edukacyjna
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela



Nadszedł czas na podsumowanie wiadomości dotyczących potęg i pierwiastków. Przypomnisz sobie poznane wcześniej definicje, wzory i własności działań oraz zastosujesz je w praktyce.

Twoje cele

- Obliczysz wartości wyrażeń arytmetycznych i uprościsz wyrażenia algebraiczne, wykorzystując właściwą kolejność.
- Obliczysz wartości wyrażeń arytmetycznych, korzystając z definicji potęgowania i pierwiastkowania.
- Obliczysz wartości wyrażeń arytmetycznych i uprościsz wyrażenia algebraiczne, korzystając z praw działań na potęgach i pierwiastkach.
- Sprawdzisz, czy dane równanie jest tożsamością.

Przeczytaj

Najłatwiej zdefiniować potęgę o wykładniku naturalnym. Jest to po prostu skrócony zapis mnożenia kilku takich samych czynników. Wówczas wykładnik oznacza liczbę powtarzających się czynników.

Potęga o wykładniku naturalnym

$$a^0 = 1, \; dla \; a \in R \setminus \{0\}$$

$$a^1 = a, \; dla \; a \in R$$

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \; \dots \; \cdot a}_{\text{czynnik } a \text{ występuje } n \text{ razy}}, \; dla \; a \in R, \; n \in N \setminus \{0{,}1\}$$

Potęgę o wykładniku naturalnym można też zdefiniować rekurencyjnie:

$$a^n = 1 \text{ dla } n = 0, a \in R \setminus \{0\}$$

$$a^n = a, \text{ dla } n = 1, \; a \; \in R$$

$$a^n = a^{n-1} \cdot a, \text{ dla } n \in N \setminus \{0\}$$

Ważne!

Pamiętaj, że wyrażeniu 0° nie przypisujemy żadnej wartości liczbowej. Uznajemy je za **symbol nieoznaczony**.

Przykład 1

$$\left(\frac{3}{5}\right)^0 = 1$$

$$\pi^1 = \pi$$

$$\left(\sqrt{2}\right)^3 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

Znacznie mniej intuicyjne jest potęgowanie w pozostałych przypadkach.

Analizując serie równości:

$2^3 = 8$	$a^3 = aaa$

$2^2 = 4$ (wynik z wiersza powyżej podzielony przez 2)	$a^2 = aa$ (wynik z wiersza powyżej podzielony przez a)
$2^1 = 2$ (wynik z wiersza powyżej podzielony przez 2)	$a^1 = a$ (wynik z wiersza powyżej podzielony przez a)
$2^0 = 1$ (wynik z wiersza powyżej podzielony przez 2)	$a^0 = 1$ (wynik z wiersza powyżej podzielony przez a)

można zauważyć, że każde zmniejszenie o 1 wykładnika potęgi po lewej stronie równości odpowiada podzieleniu prawej strony równości przez podstawę potęgi. Zatem kontynuując rozumowanie otrzymujemy:

$2^{-1} = \frac{1}{2}$	$a^{-1} = \frac{1}{a}$
$2^{-2} = \frac{1}{4}$ (wynik z wiersza powyżej podzielony przez 2)	$a^{-2} = \frac{1}{aa} = \frac{1}{a^2}$ (wynik z wiersza powyżej podzielony przez a)
$2^{-3} = \frac{1}{8}$ (wynik z wiersza powyżej podzielony przez 2)	$a^{-3} = \frac{1}{aaa} = \frac{1}{a^3}$ (wynik z wiersza powyżej podzielony przez a)
$2^{-4} = \frac{1}{16}$ (wynik z wiersza powyżej podzielony przez 2)	$a^{-4} = \frac{1}{aaaa} = \frac{1}{a^4}$ (wynik z wiersza powyżej podzielony przez a)

Zatem potęgę o wykładniku całkowitym ujemnym możemy zdefiniować jak poniżej.

Potęga o wykładniku całkowitym ujemnym

$$a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n,\ a \in R \setminus \{0\},\ n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

Przykład 2

$$3^{-2} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{-3} = 4^3 = 64$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{-4} = \left(\frac{3}{2}\right)^4 = \frac{81}{16}$$

$$\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^{-3} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{8} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

Pierwiastkowanie rozumiemy jako działanie odwrotne do potęgowania.

Pytanie: „Ile jest równy $\sqrt{36}$?” jest tożsame z pytaniem: „Jaką liczbę podnieść do kwadratu, aby otrzymać 36?”.

W obu przypadkach odpowiedź to 6, zatem $\sqrt{36} = 6$.

Jeśli chcemy obliczyć $\sqrt[3]{-125}$, to wystarczy odpowiedzieć na pytanie: „Jaką liczbę podnieść do potęgi 3, aby otrzymać 125?”.

Wobec tego $\sqrt[3]{-125} = (-5)$.

Pierwiastek parzystego stopnia

$\sqrt[n]{a} = b$ wtedy i tylko wtedy gdy $b^n = a,\ a,\ b \in \langle 0,\ +\infty)$

> **Przykład 3**
>
> $$\sqrt{9} = 3,\ bo\ 9 = 3^2$$
>
> $$\sqrt[4]{\frac{1}{625}} = \frac{1}{5},\ bo\ \frac{1}{625} = \left(\frac{1}{5}\right)^4$$
>
> $$\sqrt[6]{\frac{729}{64}} = \frac{3}{2},\ bo\ \frac{729}{64} = \left(\frac{3}{2}\right)^6$$

Przy tej okazji zauważmy, że pierwiastki nieparzystego stopnia możemy obliczać z liczb ujemnych - wynik takiego pierwiastkowania jest również ujemny.

Z kolei pierwiastki parzystego stopnia możemy obliczać tylko z liczb nieujemnych otrzymując w wyniku liczby nieujemne.

Pierwiastek nieparzystego stopnia

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a; a, b \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}, n \text{ jest liczbą nieparzystą}$$

> **Przykład 4**
>
> $$\sqrt[3]{-64} = -4,\ bo\ (-4)^3 = -64$$
>
> $$\sqrt[3]{\frac{125}{27}} = \frac{5}{3},\ bo\ \left(\frac{5}{3}\right)^3 = \frac{125}{27}$$
>
> $$\sqrt[5]{-\frac{32}{234}} = -\frac{2}{3},\ bo\ \left(-\frac{2}{3}\right)^5 = -\frac{32}{234}$$

Okazuje się, że pierwiastkowanie można potraktować jako szczególny przypadek potęgowania. Rozważmy pewien szczególny przypadek.

$\left(\sqrt{2}\right)^2 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2 \cdot 2} = \sqrt{4} = 2$
(korzystamy z własności pierwiastkowania)

$\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^2 = 2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = 2^1 = 2$
(korzystamy z własności potęgowania)

Wiadomo ponadto, że istnieje tylko jedna liczba rzeczywista dodatnia, która podniesiona do kwadratu daje 2. Zatem $\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$.

Ogólnie przyjmujemy następujące definicje:

Potęga o wykładniku wymiernym

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a},\ a \in R,\ n \in \mathbb{N} \setminus \left\{0, 1\right\},\ n\ \text{jest liczbą nieparzystą}$$

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a},\ a\ \in R_{+} \cup \{0\},\ n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$$

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m},\ a \in R,\ n \in \mathbb{N} \setminus \left\{0, 1\right\},\ m \in \mathbb{Z},\ \mathrm{NWD}\left(\left|m\right|,\ n\right) = 1,\ n\ \text{jest liczbą nieparzystą}$$

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m},\ a \in R_{+} \cup \{0\},\ n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\},\ m \in \mathbb{Z},\ \mathrm{NWD}\left(|m|,\ n\right) = 1$$

Przykład 5

$$49^{\frac{1}{2}} = \sqrt{49} = 7$$

$$(-125)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-125} = -5$$

$$\left(-\tfrac{343}{216}\right)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\left(-\tfrac{343}{216}\right)^2} = \tfrac{49}{36}$$

$$0,0625^{-\frac{3}{2}} = \sqrt{0,0625^{-3}} = 64$$

Wprost z definicji potęgowania wynikają następujące własności:

Własności potęgowania

$$\text{Dla dowolnych liczb } a,\ b\ \in R_{+},\ m,\ n \in R:$$

$$(1)\ a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$(2)\ a^m : a^n = a^{m-n}$$

$$(3)\ (a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

$$(4)\ a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

$$(5)\ a^n : b^n = (a : b)^n$$

Ich dowody znajdują się w rozdziale dotyczącym potęg.

Przykład 6

$$(1)\ 5^{-20} \cdot 5^{16} = 5^{-20+16} = 5^{-4} = \tfrac{1}{625}$$

$$(2)\ 6^{18} : 6^{15} = 6^{18-15} = 6^3 = 216$$

$$(3)\ \left(4^{\frac{7}{2}}\right)^{\frac{3}{7}} = 4^{\frac{7}{2}\cdot\frac{3}{7}} = 4^{\frac{3}{2}} = 8$$

$$(4)\ \left(\tfrac{3}{19}\right)^3 \cdot \left(\tfrac{19}{6}\right)^3 = \left(\tfrac{3}{19} \cdot \tfrac{19}{6}\right)^3 = \left(\tfrac{3}{6}\right)^3 = \left(\tfrac{1}{2}\right)^3 = \tfrac{1}{8}$$

$$(5)\ \left(\tfrac{17}{4}\right)^4 : \left(\tfrac{17}{3}\right)^4 = \left(\tfrac{17}{4} : \tfrac{17}{3}\right)^4 = \left(\tfrac{17}{4} \cdot \tfrac{3}{17}\right)^4 = \left(\tfrac{3}{4}\right)^4 = \tfrac{81}{256}$$

Wykorzystując fakt, że każdy pierwiastek można zapisać jako potęgę o wykładniku wymiernym, łatwo udowodnić następujące własności pierwiastkowania.

Własności pierwiastkowania

Dla dowolnych liczb $a,\ b \in R_+,\ m,\ n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$

$$(1)\ \sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{a \cdot b}$$

$$(2)\ \sqrt[m]{a} : \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{\tfrac{a}{b}}$$

$$(3)\ \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$$

$$(4)\ \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$$

Ich kompletne dowody znajdują się w rozdziale dotyczącym własności pierwiastkowania.

Przykład 7

$$(1)\ \sqrt[3]{\frac{27}{19}} \cdot \sqrt[3]{\frac{19}{8}} = \sqrt[3]{\frac{27}{19} \cdot \frac{19}{8}} = \sqrt[3]{\frac{27}{8}} = \frac{3}{2}$$

$$(2)\ \sqrt[4]{\frac{16}{29}} : \sqrt[4]{\frac{81}{29}} = \sqrt[4]{\frac{16}{29} : \frac{81}{29}} = \sqrt[4]{\frac{16}{29} \cdot \frac{29}{81}} = \sqrt[4]{\frac{16}{81}} = \frac{2}{3}$$

$$(3)\ \sqrt{\sqrt[3]{64}} = \sqrt[6]{64} = 2$$

$$(4)\ \sqrt[3]{27^6} = \left(\sqrt[3]{27}\right)^6 = 3^6 = 729$$

Słownik

tożsamość

równość prawdziwa dla dowolnego argumentu z dziedziny

potęgowanie

w najprostszym aspekcie to uogólnienie mnożenia takich samych czynników

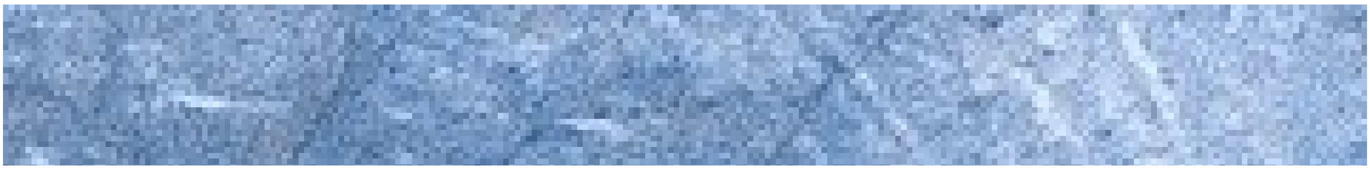
pierwiastkowanie

działanie odwrotne do potęgowania

Gra edukacyjna

Polecenie 1

Sprawdź swoją wiedzę. Rozwiąż quiz.



Test

Sprawdź swoją wiedzę

Poziom trudności:

InteractiveTest.difficultyLevel.easy

Limit czasu:

4 min

Twój ostatni wynik:

-

Trwa wczytywanie...

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

Ćwiczenie 7

Ćwiczenie 8

Dla nauczyciela

Autor: Sebastian Guz

Przedmiot: Matematyka

Temat: Działania na potęgach i pierwiastkach – podsumowanie

Grupa docelowa: III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres podstawowy

Podstawa programowa:

Zakres podstawowy.

I. Liczby rzeczywiste.

Uczeń:

4) stosuje związek pierwiastkowania z potęgowaniem oraz prawa działań na potęgach i pierwiastkach.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się;
- kompetencje obywatelskie.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- oblicza wartości wyrażeń arytmetycznych i upraszcza wyrażenia algebraiczne, wykorzystując właściwą kolejność.
- oblicza wartości wyrażeń arytmetycznych, korzystając z definicji potęgowania i pierwiastkowania.
- oblicza wartości wyrażeń arytmetycznych i upraszcza wyrażenia algebraiczne, korzystając z praw działań na potęgach i pierwiastkach.
- sprawdza, czy dane równanie jest tożsamością.

Strategie nauczania:

- lekcja odwrócona;
- konstruktywizm;

- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- gra edukacyjna;
- rozmowa nauczająca z wykorzystaniem prezentacji i ćwiczeń interaktywnych;
- dyskusja.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami i dostępem do internetu, słuchawki;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg zajęć:

Faza wstępna

1. Nauczyciel przedstawia cel zajęć: Utrwalicie wiedzę o działaniach na potęgach i pierwiastkach.

2. Zajęcia przeprowadzane metodą lekcji odwróconej. Podczas jednego z poprzedzających spotkań nauczyciel dzieli klasę na 5 grup, których zadaniem jest przygotowanie prezentacji multimedialnych na przydzielone tematy:

- grupa 1: Potęga o wykładniku naturalnym;
- grupa 2: Potęga o wykładniku całkowitym ujemnym;
- grupa 3: Pierwiastek parzystego stopnia;
- grupa 4: Pierwiastek nieparzystego stopnia;
- grupa 5: Potęga o wykładniku wymiernym.

Podczas przygotowywania prezentacji uczniowie wykorzystują zawartość e-materiału oraz innych dostępnych źródeł, w tym internetowych. Zadanie uczniów polega na znalezieniu (lub opracowaniu) i uwzględnieniu w swojej prezentacji przede wszystkim materiałów wizualnych – wzorów, schematów. Prezentacje powinny zawierać jak najmniej tekstu – jej treść przedstawią uczniowie ustnie podczas zajęć. Każda prezentacja może trwać nie dłużej niż 5 minut.

Faza realizacyjna

1. Grupy przedstawiają swoje prezentacje – komentują materiały wizualne zawarte w prezentacji. Po każdej prezentacji nauczyciel prosi uczniów, którzy byli jej odbiorcami, o skomentowanie pracy kolegów i koleżanek: co było najbardziej interesujące, czy przekaz był jasny, mogą też zadawać pytania i prosić o dodatkowe wyjaśnienia.

Nauczyciel czuwa nad poprawnością przekazywanych informacji.

2. Nauczyciel prosi, by uczniowie w parach przygotowali najważniejsze własności potęgowania i pierwiastkowania. Uczniowie korzystają z dostępnych źródeł. Po upływie wyznaczonego czasu chętne/wybrane pary prezentują rezultaty swojej pracy.

3. Następnie uczniowie dzielą się na 5 grup w ten sposób, by w nowych grupach znalazło sie po jednej osobie, które przygotowywały poszczególne prezentacje. Nauczyciel informuje, że grupy staną do rywalizacji i rozwiążą quiz dotyczący tematu lekcji. Grupa, która najszybciej poprawnie rozwiąże test, zostanie nagrodzona oceną za aktywność.

4. Uczniowie rozwiazuja ćwiczenia interaktywne wskazane przez nauczyciela. Wspólnie omawiaja odpowiedzi.

Faza podsumowująca

1. Na zakończenie zajęć nauczyciel zadaje uczniom pytanie: Jakie umiejętności musicie ukształtować, aby uznać, iż jesteście mistrzami w wykonywaniu działań na potęgach i pierwiastkach?

Praca domowa:

1. Uczniowie wykonują ćwiczenia interaktywne, których nie rozwiązali na lekcji.

Materiały pomocnicze:

Działania na potęgach: https://epodreczniki.pl/a/dzialania-na-potegach/D9yvb6PII

Działania na pierwiastkach:
https://epodreczniki.pl/a/dzialania-na-pierwiastkach/DpHZRqUPr

Wskazówki metodyczne:

Grę interaktywną można wykorzystać jako element indywidualnej rywalizacji uczniów. Jako dogrywkę, w celu wyłonienia zwycięzcy, można użyć pytań dodatkowych opracowanych przez uczniów.