



Zależność między polem trójkąta a promieniem koła opisanego na trójkącie

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Animacja](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Zależność między polem trójkąta a promieniem koła opisanego na trójkącie

Źródło: Anton Maksimov Juvnsky, dostępny w internecie: <https://unsplash.com/>.

Istnieje ciekawa zależność pomiędzy polem trójkąta, a promieniem koła opisanego na tym trójkącie. W materiale pokażemy wyprowadzenia oraz zastosowanie wzorów na pole trójkąta z użyciem długości promienia okręgu opisanego na tym trójkącie. Bazując na części teoretycznej oraz omówionych przykładach, rozwiążemy ćwiczenia interaktywne.

Twoje cele

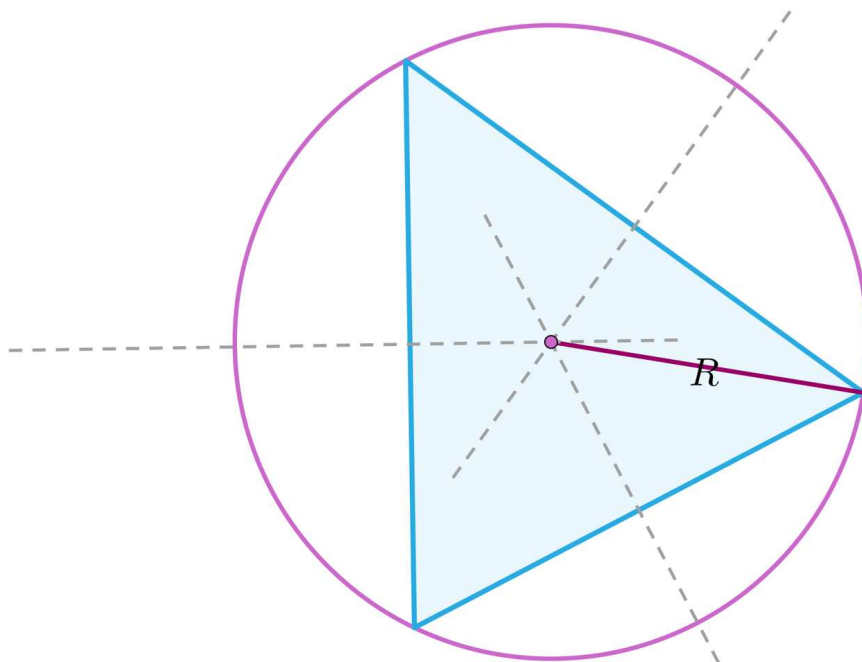
- Wskażesz związek pomiędzy promieniem koła opisanego na trójkącie, a polem trójkąta.
- Wyznaczysz różne wzory na pole trójkąta.
- Obliczysz pola trójkątów za pomocą różnych wzorów.
- Rozwiążesz problemy geometryczne, korzystając z zależności między polem trójkąta, a promieniem koła opisanego na tym trójkącie.

Przeczytaj

Przypomnijmy definicję okręgu opisanego na trójkącie.

Definicja: Okrąg opisany na trójkącie

Mówimy, że okrąg jest opisany na trójkącie wtedy, gdy wszystkie wierzchołki tego trójkąta należą do okręgu.



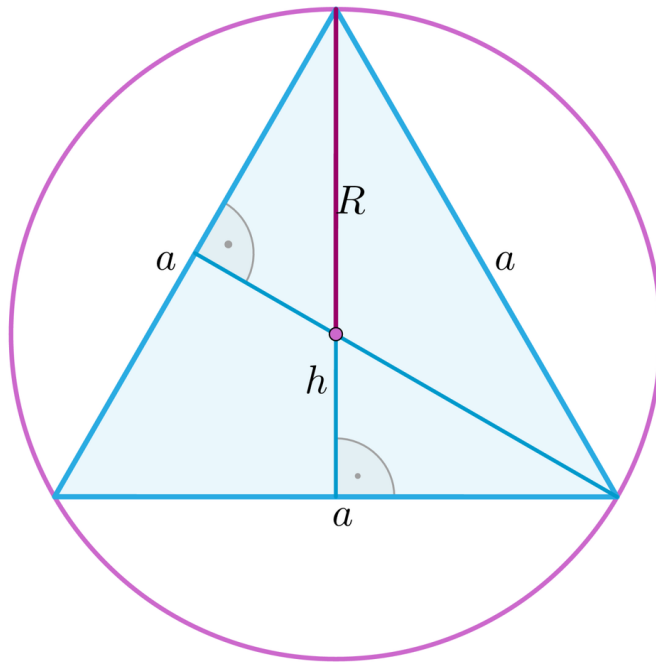
Przez R oznaczmy promień okręgu opisanego na trójkącie.

Okrąg można opisać na każdym trójkącie. I odwrotnie - każdy trójkąt można wpisać w okrąg.

Środek okręgu opisanego na trójkącie jest punktem przecięcia symetralnych boków trójkąta.

Wyznamy wzór na pole trójkąta, w zależności od rodzaju trójkąta, przy użyciu długości promienia okręgu opisanego na tym trójkącie.

Pole trójkąta równobocznego, na którym opisano okrąg o promieniu R



Przyjmijmy oznaczenia takie, jak na rysunku. Symetralne boków trójkąta zawierają wysokości, a wysokości i środkowe trójkąta przecinają się w jednym punkcie, będącym środkiem okręgu opisanego na tym trójkącie i dzielą się w stosunku 2 : 1. Stąd

$$R = \frac{2}{3}h \text{ oraz } h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Zatem

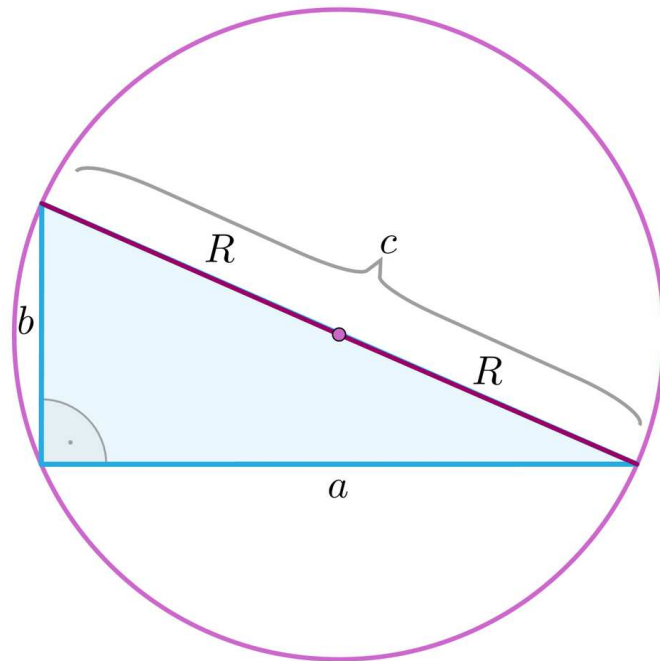
$$R = \frac{a\sqrt{3}}{3}, \text{ więc } a = R\sqrt{3}$$

Wobec tego pole trójkąta równobocznego wyraża się wzorem

$$P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{(\sqrt{3}R)^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}R^2}{4}$$

Przeciwprostokątna trójkąta prostokątnego, na którym opisano okrąg o promieniu R

Środek okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym jest punktem będącym środkiem jego przeciwprostokątnej.

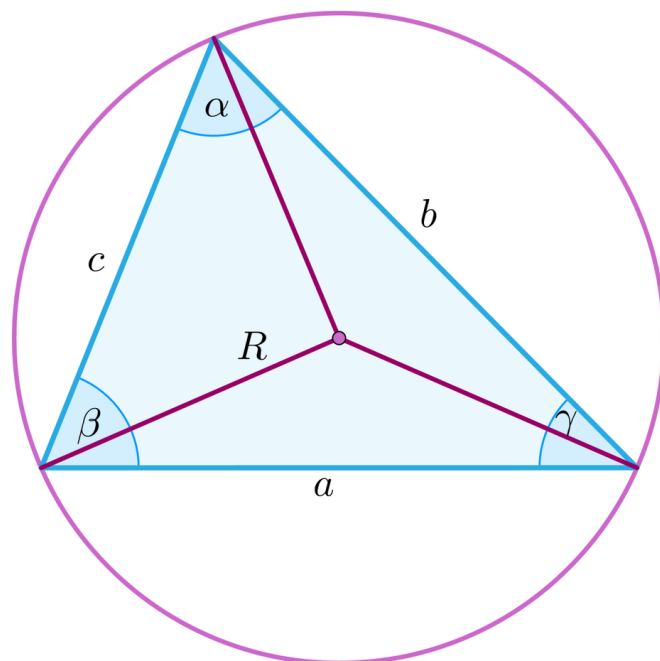


$$P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \text{ oraz } R = \frac{c}{2}$$

Zatem

$$c = 2R \text{ oraz } a^2 + b^2 = (2R)^2 = 4R^2$$

Pole dowolnego trójkąta, na którym opisano okrąg o promieniu R



Pole trójkąta obliczamy ze wzoru:

$$P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin \gamma$$

Z twierdzenia sinusów zachodzą następujące zależności:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = 2R, \text{ zatem } a = 2R \sin \alpha$$

$$\frac{b}{\sin \beta} = 2R, \text{ zatem } b = 2R \sin \beta$$

$$\frac{c}{\sin \gamma} = 2R, \text{ zatem } c = 2R \sin \gamma$$

Wobec tego

$$P = \frac{1}{2}ab \cdot \frac{c}{2R} = \frac{abc}{4R}$$

$$P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin \gamma = \frac{1}{2} \cdot 2R \sin \alpha \cdot 2R \sin \beta \cdot \sin \gamma = 2R^2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$$

Otrzymane wzory na pole trójkąta, w zależności od długości promienia okręgu opisanego na tym trójkącie, są używane do rozwiązywania bardziej złożonych problemów matematycznych.

W obliczeniach czasami będziemy używać wzoru Herona, za pomocą którego obliczamy pole dowolnego trójkąta, gdy dane są długości trzech jego boków.

$$P = \sqrt{p \cdot (p - a) \cdot (p - b) \cdot (p - c)}, \text{ gdzie } a, b, c \text{ są długościami boków trójkąta oraz}$$
$$p = \frac{a+b+c}{2}$$

Jeżeli użyjemy wyżej wyprowadzonych zależności, to:

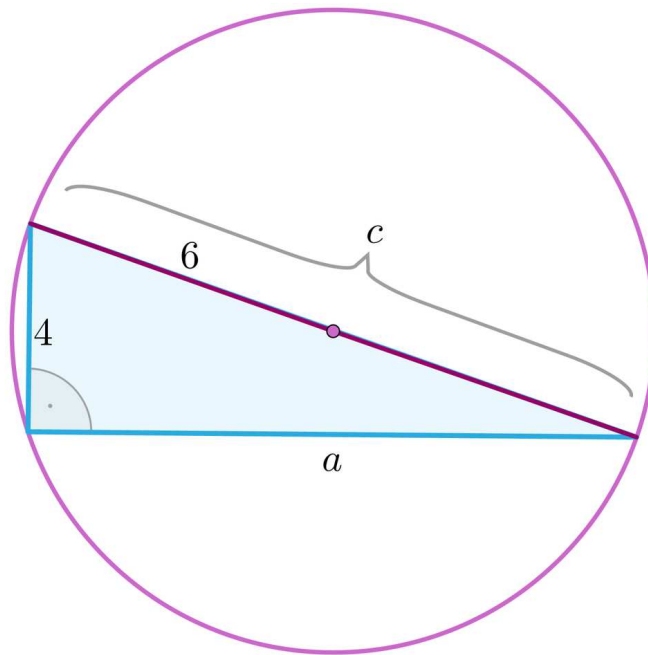
$$p = \frac{2R \sin \alpha + 2R \sin \beta + 2R \sin \gamma}{2} = R(\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma)$$

Przykład 1

Obliczymy pole trójkąta prostokątnego, w którym jedna przyprostokątna ma długość 4, a promień okręgu opisanego na tym trójkącie wynosi 6.

Rozwiązanie:

Narysujmy trójkąt oraz opisany na nim okrąg i wprowadźmy oznaczenia, jak na rysunku.



Niech R będzie długością promienia okręgu opisanego na tym trójkącie. Zatem

$$c = 2R = 2 \cdot 6 = 12$$

Zatem do wyznaczenia wartości a rozwiązujemy równanie, utworzone na podstawie twierdzenia Pitagorasa:

$$a^2 + 4^2 = 12^2$$

$$a^2 + 16 = 144$$

$$a^2 = 128, \text{ czyli } a = 8\sqrt{2}$$

Wobec tego pole trójkąta wynosi:

$$P = \frac{8\sqrt{2} \cdot 4}{2} = 16\sqrt{2}$$

Przykład 2

Obliczymy pole trójkąta równobocznego, w którym promień okręgu opisanego na tym trójkącie ma długość $4\sqrt{3}$.

Rozwiązanie:

Do rozwiązania zadania wykorzystamy wzór na pole trójkąta równobocznego, gdy dana jest długość promienia okręgu opisanego na tym trójkącie:

$$P = \frac{3\sqrt{3}R^2}{4}$$

Ponieważ $R = 4\sqrt{3}$, zatem:

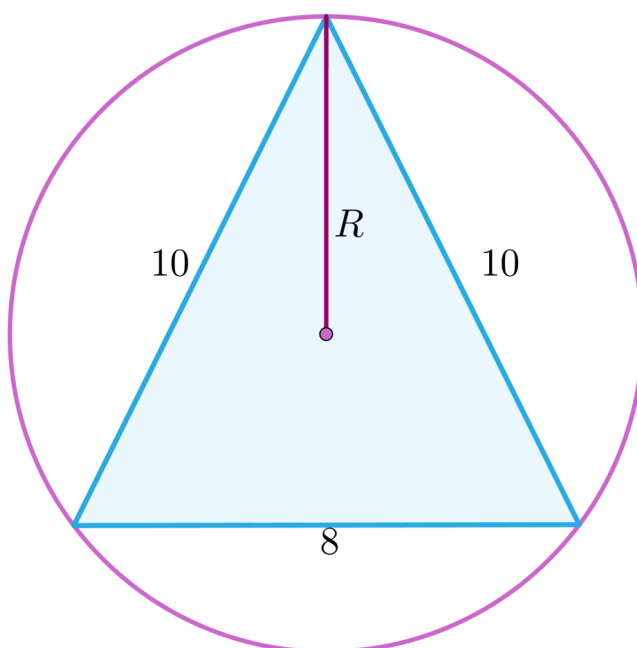
$$P = \frac{3\sqrt{3} \cdot (4\sqrt{3})^2}{4} = \frac{3\sqrt{3} \cdot 48}{4} = 36\sqrt{3}$$

Przykład 3

Obliczymy długość **okręgu opisanego na trójkącie** równoramiennym o podstawie długości 8 i ramionach długości 10.

Rozwiązanie:

Narysujmy trójkąt równoramienny, okrąg na nim opisany oraz wprowadźmy oznaczenia, jak na rysunku. Promień okręgu opisanego na trójkącie jest odcinkiem łączącym wierzchołek trójkąta z punktem, w którym przecinają się symetralne boków trójkąta.



Niech

$$a = 8$$

$$b = c = 10$$

Do wyznaczenia pola trójkąta, wykorzystamy wzór Herona:

$$P = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \text{ gdzie } p = \frac{a+b+c}{2}$$

$$\text{Zatem } p = \frac{8+10+10}{2} = 14.$$

$$\text{Wobec tego } P = \sqrt{14 \cdot (14-8) \cdot (14-10) \cdot (14-10)} = \sqrt{14 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 4} = 8\sqrt{21}.$$

Ponieważ pole trójkąta możemy obliczyć ze wzoru $P = \frac{abc}{4R}$, gdzie R jest promieniem okręgu opisanego na trójkącie, zatem po przekształceniu wzoru na pole trójkąta mamy:

$$R = \frac{abc}{4P}$$

$$R = \frac{8 \cdot 10 \cdot 10}{32\sqrt{21}} = \frac{100}{4\sqrt{21}} = \frac{25\sqrt{21}}{21}$$

Długość okręgu opisanego na tym trójkącie wynosi:

$$L = 2\pi \cdot R = 2\pi \cdot \frac{25\sqrt{21}}{21} = \frac{50\sqrt{21}}{21}\pi$$

Przykład 4

Wiadomo, że iloczyn sinusów kątów wewnętrznych w pewnym trójkącie wynosi $\frac{12}{25}$, a pole tego trójkąta jest równe 6. Obliczmy długość promienia okręgu opisanego na tym trójkącie.

Rozwiązanie:

Jeżeli α, β, γ są miarami kątów wewnętrznych opisywanego trójkąta, to z warunku podanego w zadaniu wynika, że

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma = \frac{12}{25} \text{ oraz}$$

$$P = 6$$

Do wyznaczenia długości R promienia okręgu opisanego na tym trójkącie wykorzystamy wzór na pole trójkąta:

$$P = 2R^2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$$

$$6 = 2 \cdot R^2 \cdot \frac{12}{25}$$

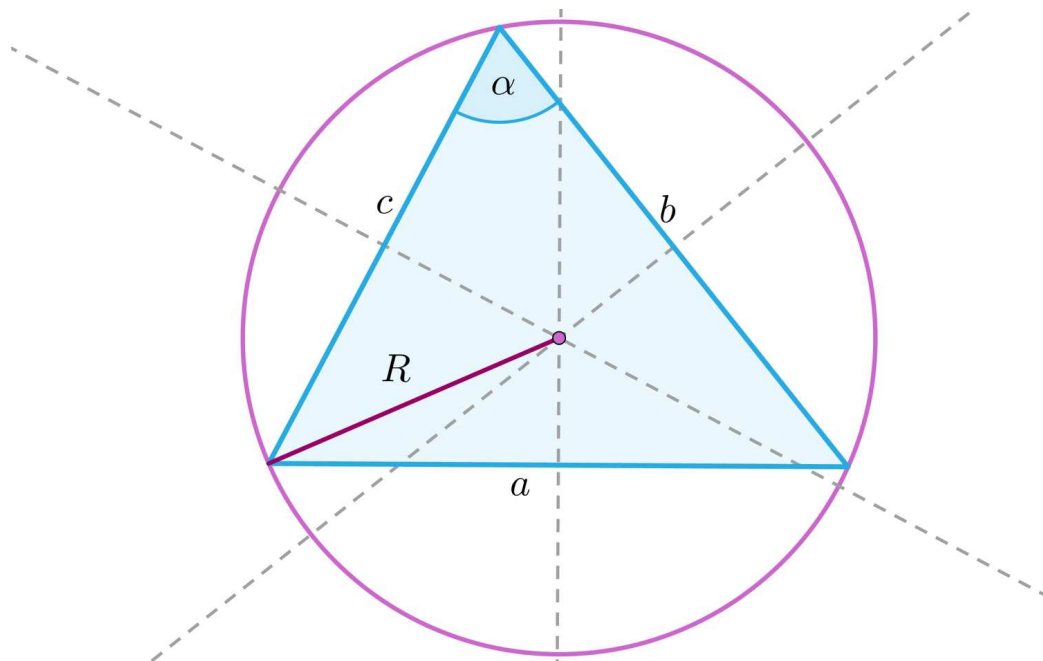
$$R^2 = \frac{25}{4}, \text{ czyli } R = \frac{5}{2}$$

Przykład 5

Obliczmy długości boków trójkąta, w którym miara jednego z kątów wynosi 60° , pole trójkąta wynosi $2\sqrt{3}$, a promień okręgu na tym trójkącie jest równy 4.

Rozwiązanie:

Narysujmy okrąg opisany na trójkącie i wprowadźmy oznaczenia, jak na rysunku.



Ponieważ $\alpha = 60^\circ$ oraz $R = 4$, zatem:

korzystając z twierdzenia sinusów $\frac{a}{\sin \alpha} = 2R$, czyli $a = 2R \sin \alpha$

$$a = 2 \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$$

Zależność pomiędzy długościami boków b i c oraz polem trójkąta wyraża równanie:

$$2\sqrt{3} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin 60^\circ$$

Jeżeli wykorzystamy [twierdzenie cosinusów](#), to:

$$\left(4\sqrt{3}\right)^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos 60^\circ$$

Wobec tego do wyznaczenia długości boków b i c rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} 2\sqrt{3} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin 60^\circ \\ \left(4\sqrt{3}\right)^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos 60^\circ \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\sqrt{3} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 48 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8 = bc \\ 48 = b^2 + c^2 - bc \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = \frac{8}{c} \\ 48 = b^2 + c^2 - 8 \end{cases}$$

Rozwiązujemy równanie z jedną niewiadomą:

$$\left(\frac{8}{c}\right)^2 + c^2 - 56 = 0$$

$$c^4 - 56c^2 + 64 = 0$$

$$c = \sqrt{28 - 12\sqrt{5}} \text{ lub } c = \sqrt{28 + 12\sqrt{5}}$$

$$\text{Zatem } b = \frac{8}{\sqrt{28-12\sqrt{5}}} = \frac{2\sqrt{28-12\sqrt{5}}}{7-3\sqrt{5}} \text{ lub } b = \frac{8}{\sqrt{28+12\sqrt{5}}} = \frac{2\sqrt{28+12\sqrt{5}}}{7+3\sqrt{5}}$$

Istnieją dwa trójkąty spełniające warunki zadania:

- trójkąt o bokach długości $4\sqrt{3}$, $\frac{2\sqrt{28-12\sqrt{5}}}{7-3\sqrt{5}}$ oraz $\sqrt{28 - 12\sqrt{5}}$,
- trójkąt o bokach długości $4\sqrt{3}$, $\frac{2\sqrt{28+12\sqrt{5}}}{7+3\sqrt{5}}$, $\sqrt{28 + 12\sqrt{5}}$

Słownik

okrąg opisany na trójkącie

okrąg, na którym leżą wszystkie wierzchołki tego trójkąta

twierdzenie sinusów

w dowolnym trójkącie stosunek długości dowolnego boku do sinusa kąta leżącego naprzeciwko tego boku jest stały i równy podwojonej długości promienia okręgu opisanego na tym trójkącie

twierdzenie cosinusów

w dowolnym trójkącie, kwadrat długości dowolnego boku jest równy sumie kwadratów długości pozostałych boków pomniejszonej o podwojony iloczyn długości tych boków i cosinusa kąta zawartego między nimi

Animacja

Polecenie 1

Zapoznaj się z animacją, a następnie wykonaj poniższe polecenie.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D8ejlEeGo>

Film nawiązujący do treści materiału dotyczącej zależności między polem trójkąta a promieniem okręgu opisanego na nim.

Polecenie 2

Wyznacz pole koła opisanego na trójkącie o bokach długości 8, 10 i 12.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Zaznacz poprawną odpowiedź.

Jeżeli pole trójkąta równobocznego wynosi P , to promień okręgu opisanego na tym trójkącie jest równy:

☐ $R = \frac{4P}{3\sqrt{3}}$

☐ $R = \frac{4P\sqrt{3}}{9}$

☐ $R = \frac{\sqrt{4P\sqrt{3}}}{3}$

Ćwiczenie 2



Wstaw w tekst odpowiednie liczby.

Jeżeli promień okręgu opisanego na trójkącie równobocznym ma długość 4, to pole tego trójkąta wynosi .

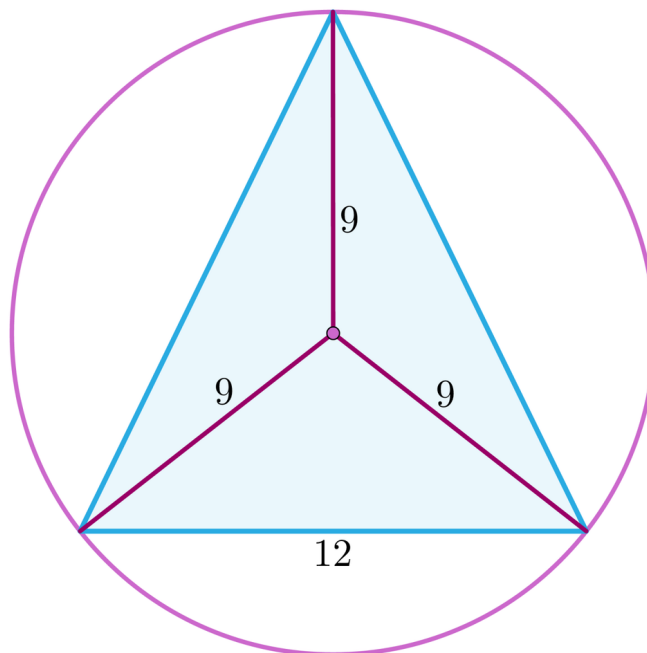
Jeżeli promień okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym ma długość 6, a jedna z przyprostokątnych jest równa 8, to pole tego trójkąta jest równe .

Jeżeli promień okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym równoramiennym ma długość 4, to pole tego trójkąta wynosi .

Ćwiczenie 3



Na podstawie rysunku zaznacz zdania, które są prawdziwe.

☐

Wysokość trójkąta równoramiennego na którym opisano okrąg, opuszczona na bok długości 12 ma długość $3\sqrt{5}$.

☐

Pole trójkąta równoramiennego z rysunku jest równe 72.

☐

Pole trójkąta równoramiennego z rysunku jest równe $54 + 18\sqrt{5}$.

☐

Wysokość trójkąta równoramiennego na którym opisano okrąg, opuszczona na bok długości 12 ma długość $3\sqrt{5} + 9$.

Ćwiczenie 4



Ćwiczenie 5



Oblicz pole trójkąta równobocznego, jeżeli pole koła na nim opisanego wynosi 24π .

Ćwiczenie 6



Oblicz pole trójkąta prostokątnego równoramiennego, jeżeli promień okręgu opisanego na tym trójkącie ma długość 16.

Ćwiczenie 7



Oblicz obwód koła opisanego na trójkącie o bokach długości 3, 4 i 6.

Ćwiczenie 8



W trójkącie dane są:

- pole $P = 2$,
- promień okręgu opisanego na tym trójkącie $R = \frac{1}{2}$,
- długość jednego boku $c = 2$,
- obwód trójkąta $L = 6$.

Wyznacz długości pozostałych boków tego trójkąta.

Dla nauczyciela

Autor: Tomasz Wójtowicz

Przedmiot: Matematyka

Temat: Zależność między polem trójkąta a promieniem koła opisanego na trójkącie

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

Treści nauczania – wymagania szczegółowe:

VIII. Planimetria. Zakres podstawowy. Uczeń:

10) wskazuje podstawowe punkty szczególne w trójkącie: środek okręgu wpisanego w trójkąt, środek okręgu opisanego na trójkącie, ortocentrum, środek ciężkości oraz korzysta z ich własności;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- wskazuje związek pomiędzy promieniem koła opisanego na trójkącie, a polem trójkąta;
- wyznacza różne wzory na pole trójkąta;
- oblicza pola trójkątów za pomocą różnych wzorów;
- wykorzystuje poznaną wiedzę do rozwiązywania problemów matematycznych.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja;
- liga zadaniowa;
- metoda kota i myszy.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel przedstawia uczniom temat – „Zależność między polem trójkąta a promieniem koła opisanego na trójkącie”, wskazuje cele zajęć oraz ustala z nimi kryteria sukcesu.
2. Prowadzący prosi uczniów, aby zgłaszali swoje propozycje pytań do tematu. Jedna osoba może zapisywać je na tablicy. Gdy uczniowie wyczerpią pomysły, a pozostały jakieś ważne kwestie do poruszenia, nauczyciel je dopowiada.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel dzieli uczniów na 4-osobowe grupy. Uczniowie w grupach zapoznają się z informacjami w sekcji „Przeczytaj”. Analizują przedstawione przykłady i notują pytania. Następnie przedstawiają pytania na forum klasy. Odpowiadają na nie uczniowie z innych grup. Nauczyciel wyjaśnia ewentualne wątpliwości.
2. Uczniowie zapoznają się indywidualnie z treścią sekcji „Animacja”. Zapisują ewentualne pytania dotyczące napotkanych trudności, po czym następuje dyskusja, w trakcie której nauczyciel wyjaśnia niezrozumiałe elementy z materiału.
3. Uczniowie wykonują pierwsze dwa ćwiczenia interaktywne z sekcji „Sprawdź się”. Wyniki pracy omawiane są na forum i komentowane przez nauczyciela.
4. Kolejny etap to liga zadaniowa – uczniowie wykonują w grupach na czas ćwiczenia 3-5 z sekcji „Sprawdź się”, a następnie omawiają je na forum klasy.
5. Ćwiczenia numer 6, 7 i 8 z sekcji „Sprawdź się” uczniowie wykonują metodą kot i mysz. Mysz stara się jak najlepiej rozwiązać zadania, a kot sprawdza ich poprawność. Po 2 nieudanych próbach kot „łapie mysz”, która odpada z gry. Aby gra toczyła się dalej – role uczniów odwracają się i mysz staje się kotem – procedura się powtarza.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.

2. Wybrany uczeń podsumowuje zajęcia, zwracając uwagę na nabyte umiejętności, odnosząc się do wyświetlonych na tablicy interaktywnej celów z sekcji „Wprowadzenie”.

Praca domowa:

1. Uczniowie opracowują FAQ (minimum 3 pytania i odpowiedzi prezentujące przykład i rozwiązanie) do tematu lekcji („Zależność między polem trójkąta a promieniem koła opisanego na trójkącie”).

Materiały pomocnicze:

- [Pole trójkąta.](#)

Wskazówki metodyczne:

- Materiał w sekcji „Animacja” można potraktować jako zadanie domowe dotyczące analizy problemu w zakresie znajdowania zależności między polem trójkąta, a promieniem koła opisanego na trójkącie.
- „Animację” można wykorzystać na zajęciach dotyczących obliczania pola trójkąta.