Zastosowanie wielkości wprost proporcjonalnych

Lekcja dotyczy wykorzystania pojęcia wielkości wprost proporcjonalnych do rozwiązywania problemów związanych z życiem codziennym. Podczas lekcji dowiesz się, jak rozpoznać wielkości wprost proporcjonalne oraz jak obliczyć niewiadomą w równaniu, będącym proporcją.

Zastosowanie wielkości wprost proporcjonalnych

Źródło: dostępny w internecie: Pexels.com, licencja: CC BY 3.0.

Do właściwej interpretacji i wyznaczenia rozwiązań problemów matematycznych używamy różnych modeli matematycznych. Jednym z takich modeli są wielkości wprost proporcjonalne, które spotykamy na przykład w przepisach kulinarnych. Poniżej przedstawiono przepis na upieczenie sernika. Zastanów się, ile składników potrzeba, jeżeli chcemy upiec 3 takie serniki. Jak zmieni się liczba i masa poszczególnych składników, gdy chcemy upiec sernik o masie 2 razy mniejszej?

Źródło: Grafika na podstawie: Pexels.com, licencja: CC BY 3.0.

Aby zrozumieć poruszane w tym materiale zagadnienia, przypomnij sobie:

- pojęcie proporcji oraz wielkości wprost proporcjonalnych.

Twoje cele

- Rozpoznasz wielkości wprost proporcjonalne.
- Ułożysz zależność między wielkościami wprost proporcjonalnymi.
- Rozwiążesz równania zapisane w postaci proporcji.
- Wykorzystasz zdobytą wiedzę do rozwiązywania zadań z życia codziennego.

W życiu codziennym spotykamy się z sytuacjami, gdy iloraz pewnych wielkości jest stały np.

- iloraz odległości w jakiej uderza piorun do czasu, po jakim usłyszymy grzmot,
- iloraz odległości w terenie do odpowiadającej jej odległości na mapie,
- iloraz wartości zakupionego towaru do jego masy.

Definicja: wielkości wprost proporcjonalne

Dane są dwie dodatnie wielkości. Mówimy, że te wielkości są wprost proporcjonalne, jeżeli iloraz odpowiadających sobie wartości tych wielkości jest stały.

W przypadku wielkości wprost proporcjonalnych, wzrost lub zmniejszenie jednej wielkości, powoduje wzrost lub odpowiednio zmniejszenie drugiej wielkości tyle samo razy.

Wielkościami wprost proporcjonalnymi są na przykład:

- długość boku trójkąta równobocznego i jego obwód,
- waga jabłek i koszt ich zakupu,
- rzeczywista odległość w terenie oraz odpowiadająca jej odległość na mapie.

Do wyznaczenia zależności pomiędzy wielkościami wprost proporcjonalnymi używa się proporcji.

Jeżeli wprowadzimy następujące oznaczenia:

$a : b$ – iloraz liczb a i b, gdzie $b \neq 0$,

$c : d$ – iloraz liczb c i d, gdzie $d \neq 0$,

to równość dwóch ilorazów $a : b = c : d$ nazywa się proporcją.

Liczby a i d nazywamy wyrazami skrajnymi, a liczby b i c wyrazami środkowymi.

Wówczas mówimy, że iloraz wyrazów skrajnych jest równy ilorazowi wyrazów środkowych.

Ponieważ równanie $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ jest równoważne równaniu $a \cdot d = b \cdot c$, zatem wykorzystamy ten zapis do rozwiązywania problemów matematycznych, w których występują wielkości wprost proporcjonalne.

Przykład 1

W tabeli przedstawiono wielkości x i y, które są wprost proporcjonalne. Wyznaczymy wartości liczb k, l oraz m.

x	y
3	5
k	23
12	l
m	12

$\frac{3}{5} = \frac{k}{23}$, czyli $5k = 69$, zatem $k = 13,8$

$\frac{3}{5} = \frac{12}{l}$, czyli $3l = 60$, zatem $l = 20$

$\frac{3}{5} = \frac{m}{12}$, czyli $5m = 36$, zatem $m = 7,2$

Przykład 2

Wiadomo, że 24 ziarenka grochu ważą 6 g. Obliczymy, ile waży 20 ziarenek grochu.

Rozwiązanie:

Jeżeli przez x oznaczymy masę dwudziestu ziarenek grochu, to do wyznaczenia wartości x rozwiązujemy równanie zapisane w postaci proporcji:

$\frac{6}{24} = \frac{x}{20}$, zatem $x = 5$.

Odpowiedź:
20 ziarenek grochu ma masę 5 g.
Przykład 3

Wiadomo, że wielkości a i b zapisane w tabeli są wprost proporcjonalne. Obliczymy wartość x.

a	b
$5x-2$	4
$-2x+5$	3

Rozwiązanie:

Układamy i rozwiązujemy równanie zapisane w postaci proporcji:

$\frac{5x-2}{4} = \frac{-2x+5}{3}$

$3 \cdot (5x-2) = 4 \cdot (-2x+5)$

$15x - 6 = -8x + 20$

$23x = 26$

Wobec tego $x = \frac{26}{23}$
Przykład 4

Na wycieczkę pojechało 56 uczniów. Stosunek liczby dziewcząt do liczby chłopców jest równy $5 : 9$. Wyznaczymy liczbę dziewcząt i liczbę chłopców biorących udział w wycieczce.

Rozwiązanie:

Niech x będzie liczbą naturalną. Jeżeli przez x oznaczymy liczbę dziewcząt w tej szkole, to liczba chłopców wynosi $56 - x$ oraz $0 < x < 56$.

Układamy i rozwiązujemy równanie zapisane w postaci proporcji:

$\frac{x}{56-x} = \frac{5}{9}$.

Zatem $9 \cdot x = 5 \cdot (56 - x)$, czyli

$x = 20$,

$56 - x = 36$.

Odpowiedź:
Liczba dziewcząt biorących udział w wycieczce wynosiła 20, a chłopców 36.

Przykład 5

Samochód pokonał trasę 280 km w ciągu $3,5$ h. Obliczymy, jakiej długości trasę pokonałby ten samochód w ciągu 6 godzin, gdyby utrzymał tę samą średnią prędkość.

Rozwiązanie:

Jeżeli przez x oznaczymy długość trasy jaką samochód pokona w ciągu 6 h, to do jej wyznaczenia rozwiązujemy równanie zapisane w postaci proporcji:

$\frac{280}{3{,}5} = \frac{x}{6}$, zatem $6 \cdot 280 = 3,5 \cdot x$, czyli $x = 480$.

Odpowiedź:
Przy tej samej średniej prędkości, samochód w ciągu 6 h pokonałby trasę długości 480 km.

Przykład 6

Listewkę podzielono na dwa mniejsze kawałki, których stosunek długości wynosi $4 : 9$. Wyznaczymy, jaka jest długość każdej części listewki, jeżeli mniejsza część jest o 15 cm krótsza od większej części.

Rozwiązanie:

Wykonajmy rysunek pomocniczy do zadania i wprowadźmy następujące oznaczenia:

x cm – długość krótszej części listewki,

$(x + 15)$ cm – długość dłuższej części listewki,

Układamy i rozwiązujemy równanie zapisane w postaci proporcji:

$\frac{4}{9} = \frac{x}{x+15}$, zatem $9 \cdot x = 4 \cdot (x + 15)$.

Po rozwiązaniu równania otrzymujemy, że $x = 12$.

Odpowiedź:
Krótsza część listewki ma długość 12 cm, a dłuższa 27 cm.

Przykład 7

Wiadomo, że wielkości występujące po obu stronach równania są wprost proporcjonalne. Wyznaczymy rozwiązania tych równań.

a. $\frac{24}{x+3} = \frac{18}{2x-1}$,

b. $\frac{3x-1}{x} = \frac{6x+3}{2x+2}$.

Rozwiązanie

a. Równanie $\frac{24}{x+3} = \frac{18}{2x-1}$, przekształcamy do postaci:

$24 \cdot (2x-1) = 18 \cdot (x+3)$.

Zatem:

$48x - 24 = 18x + 54$,

$30x = 78$.

Zatem $x = 2,6$.

Sprawdzenie:

$$\frac{24}{2,6+3} = \frac{18}{2 \cdot 2,6 - 1},$$

$$\frac{24}{5,6} = \frac{18}{4,2},$$

$$24 \cdot 4,2 = 18 \cdot 5,6,$$

$$100,8 = 100,8.$$

b. Równanie $\frac{3x-1}{x} = \frac{6x+3}{2x+2}$ przekształcamy do postaci:

$(3x-1) \cdot (2x+2) = x \cdot (6x+3)$.

Zatem:

$6x^2 + 6x - 2x - 2 = 6x^2 + 3x,$

$4x - 2 = 3x.$

Wobec tego $x = 2$.

Sprawdzenie:

$$\frac{3 \cdot 2 - 1}{2} = \frac{6 \cdot 2 + 3}{2 \cdot 2 + 2},$$

$$\frac{5}{2} = \frac{5}{2}.$$

Notatnik

Miejsce na Twoje notatki

Gra edukacyjna

Zagraj w grę, a następnie wykonaj poniższe polecenia.

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/b/P14qFNJAG

Źródło: GroMar Sp. z o.o., licencja: CC BY 3.0.

Polecenie 1

Źródło: Pexels.com, licencja: CC BY 3.0.

Przeciągnij i upuść lub kliknij w lukę i wybierz odpowiedź z listy rozwijalnej, aby uzupełnić zdania.

Karat, tak samo jak próba, jest określeniem zawartości czystego złota w danej próbce metalu.

Złoto 9 - karatowe to złoto próby 375. Sztabka złota tej próby o masie 6 g kosztuje 1440 zł.

Zatem:

- za sztabkę złota tej próby o masie 25 g należy zapłacić ____.
- za kwotę 20160 zł można kupić ____ złota tej próby.

5500 zł | 6000 zł | 75 g | 84 g

Źródło: GroMar Sp. z o.o., licencja: CC BY 3.0.

Polecenie 2

Wiadomo, że wielkości a i b zapisane w tabeli są wprost proporcjonalne. Oblicz wartość x.

a	b
$4x - 3$	5
$-3x + 6$	4

Polecenie 3

Odcinek długości $90\ \mathrm{cm}$ podzielono na dwie części w stosunku $7 : 11$. Oblicz różnicę długości pomiędzy częściami tego odcinka.

Zestaw ćwiczeń interaktywnych

Ćwiczenie 1

Rozwiązaniem równania zapisanego w postaci proporcji $\frac{x+1}{3} = \frac{x-2}{2}$ jest liczba:

- ◯ (-8)
- ◯ (-7)
- ◯ 8

Ćwiczenie 2

Wstaw w tekst odpowiednie liczby.

Wiadomo, że na przejechanie 100 km samochód potrzebuje 8 l benzyny. Wówczas:

- na przejechanie 250 km potrzeba ______ litrów benzyny,
- po wlaniu do pustego baku 30 l benzyny samochód może przejechać trasę ______ km,
- na przejechanie 75 km potrzeba ______ litrów benzyny,
- po wlaniu do pustego baku 10 l benzyny samochód może przejechać trasę ______ km.

450 | 5 | 30 | 6 | 375 | 125 | 20 | 150

Ćwiczenie 3

Rozwiąż zadania i uzupełnij odpowiedzi właściwymi liczbami.

Samochód przebył trasę długości 390 km ze średnią prędkością $65 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Ile czasu zajęło mu pokonanie tej trasy?

Odpowiedź: ________ godzin.

Jaką trasę pokona ten samochód jadąc z tą samą średnią prędkością w ciągu 7 godzin?

Odpowiedź: ________ kilometrów.

Ile czasu zajęło mu pokonanie trasy długości 195 km?

Odpowiedź: ________ godziny.

Jaką trasę pokona ten samochód jadąc z tą samą prędkością w ciągu 12 godzin?

Odpowiedź: ________ kilometrów.

Ćwiczenie 4

Wiadomo, że wielkości występujące po obu stronach równania są wprost proporcjonalne. Połącz w pary równanie z jego rozwiązaniem.

$\frac{x+5}{2} = \frac{2x-1}{3}$	$x = 3$
$\frac{x+2}{x+1} = \frac{x+4}{x+2}$	$x = 17$
$\frac{2}{x+1} = \frac{3}{x+3}$	$x = 0$
$\frac{4}{x} = \frac{9}{x+3}$	$x = \frac{12}{5}$

Ćwiczenie 5

Przenieś odpowiednie liczby do tabeli, jeżeli wiadomo, że wielkości x i y są wprost proporcjonalne:

x	y
3	5
$\frac{1}{3}$	
8	
35	

$\frac{175}{3}$ @@59 $\frac{155}{3}$ 13 $\frac{40}{3}$ 175 $\frac{41}{5}$ $\frac{4}{9}$

Ćwiczenie 6

Zaznacz zdania, które są prawdziwe.

Zegarek spóźnia się 2 s w ciągu $1,5$ godz.

- [ ] Zegarek będzie się spóźniał o 20 s po upływie 10 godz.
- [ ] Zegarek będzie się spóźniał o 1 min po upływie 45 godz.
- [ ] Po upływie 12 godz. zegarek będzie się spóźniał o 14 s.
- [ ] Po upływie 18 godz. zegarek będzie się spóźniał o 24 s.

Ćwiczenie 7

Źródło: Pexels.com, licencja: CC BY 3.0.

Do wykonania 60 sztuk pierniczków potrzeba:

$\frac{1}{4}$ szklanki miodu,

80 g masła,

$\frac{1}{2}$ szklanki brązowego cukru,

4 jajka,

$2\frac{1}{4}$ szklanki mąki pszennej.

Oblicz, ilość poszczególnych składników potrzebnych do wykonania 45 sztuk pierniczków.

Źródło: GroMar Sp. z o.o., licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 8

Rozwiąż zadania:

a. 18 litrów paliwa kosztuje $104,40$ zł. Ile trzeba zapłacić za 30 litrów tego paliwa?

b. Dźwięk błyskawicy w ciągu pięciu sekund pokonuje drogę około 1655 m. W jakiej odległości od domu Pawła uderzył piorun jeśli od błysku do grzmotu minęło 17 sekund?

Słownik

proporcja

równość dwóch ilorazów liczb.

Bibliografia

Babiański W., Braun M., Janowicz J., Mańkowska A., Paszyńska M., (2020), *Matematyka z kluczem. Szkoła podstawowa klasa* 7*. Podręcznik*, Warszawa: Nowa Era.

Budzich D., Górska E., (2017) *Licz ze mną. Zbiór zadań z matematyki dla klas* 7 *i* 8, Kijewo Królewskie: Wydawnictwo Niko.

Drążek A., Duvnjak E., Kokiernak-Jurkiewicz E., (2020), *Matematyka wokół nas. Podręcznik. Klasa* 7, Warszawa: Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne.

Gancarczyk R., (2021), *Egzamin ósmoklasisty - matematyka. Repetytorium*, Kraków: Wydawnictwo Greg.

Makowski A., Masłowski T., Toruńska A., (2017) *Podręcznik do matematyki dla klasy* 7 *szkoły podstawowej*, Warszawa: Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne.