

## Równanie z wartością bezwzględną

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Animacja
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela



## Równanie z wartością bezwzględną

Źródło: Louis Magnotti, dostępny w internecie: [www.unsplash.com](http://www.unsplash.com).

Pan Tomasz jest właścicielem firmy znajdującej się między Warszawą a Łodzią. Przyjmijmy, że odległość między tymi miastami wynosi ok. 135 km.

W poniedziałek do Łodzi pojechało 5 transportów, a do Warszawy 7.

Samochody pokonały łącznie 885 km. W jakiej odległości od Łodzi znajduje się firma pana Tomasz?

W tym materiale nauczysz się rozwiązywać równania, pozwalające rozwikłać tę zagadkę.

### Twoje cele

- Poznasz metody rozwiązywania równań z wartością bezwzględną.
- Nauczysz się rozwiązywać równania, w których występuje wartość bezwzględna liczby.

# Przeczytaj

---

Wiesz już, że rozwiązać równanie, to znaleźć liczby, które to równanie spełniają. Liczby te nazywamy **rozwiązaniem równania** lub jego pierwiastkami.

Aby rozwiązać równanie należy przekształcać **równanie równoważnie**, tak aby znaleźć wszystkie jego pierwiastki lub wykazać, że równanie nie ma rozwiązania.

Zapoznaj się z przykładami. Zwróć uwagę na różne metody rozwiązywania równań.

## Przykład 1

Rozwiąż równania:

a)  $|x| = 10$

Najprostszą metodą jest odgadnięcie, jaką liczbą jest  $x$ , jeśli jego wartość bezwzględna wynosi 10.

Taką liczbą jest 10 lub  $-10$ .

A zatem pierwiastki tego równania, to:

$$x = -10 \text{ lub } x = 10.$$

**Odpowiedź:**  $x \in \{-10, 10\}$

b)  $|2x - 4| = 8$

Podobnie jak w poprzednim przykładzie odgadujemy, jaka to liczba, której moduł wynosi 8.

Taką liczbą jest 8 lub  $-8$ .

A zatem

$$2x - 4 = 8 \text{ lub } 2x - 4 = -8$$

Stąd

$$2x = 12 \text{ lub } 2x = -4$$

$$x = 6 \text{ lub } x = -2$$

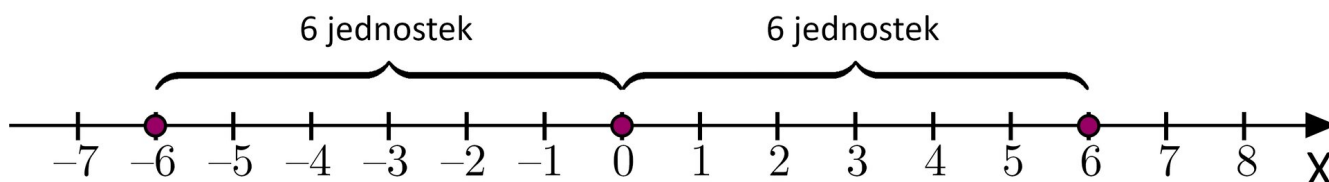
**Odpowiedź:**  $x \in \{-2, 6\}$

## Przykład 2

Rozwiąż równania:

a)  $|x| = 6$

Korzystając z definicji geometrycznej wartości bezwzględnej, wiemy, że powyższy warunek spełniają liczby, których odległość na osi liczbowej od liczby zero wynosi 6.



Są dwie takie liczby:  $-6$  i  $6$ .

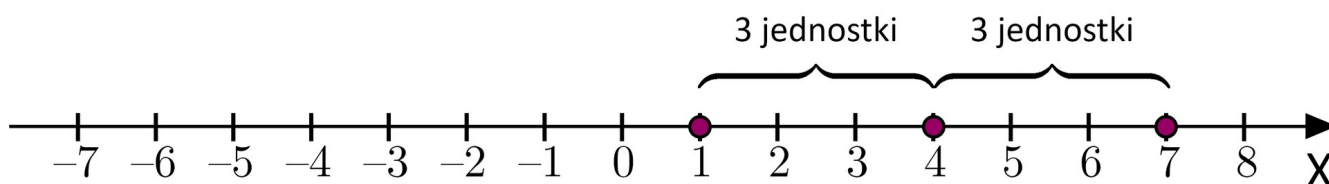
A zatem

$$x = -6 \text{ lub } x = 6.$$

**Odpowiedź:**  $x \in \{-6, 6\}$

b)  $|x - 4| = 3$

Zgodnie z geometryczną definicją wartości bezwzględnej, wiemy, że powyższy warunek spełniają liczby, których odległość od liczby 4 na osi liczbowej wynosi 3.



Są dwie takie liczby: 1 i 7.

A zatem

$$x = 1 \text{ lub } x = 7$$

**Odpowiedź:**  $x \in \{1, 7\}$

### Przykład 3

Rozwiąż równania:

a)  $|x| = 15$

Tym razem skorzystamy z algebraicznej definicji wartości bezwzględnej.

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{dla } a \geq 0 \\ -a, & \text{dla } a < 0 \end{cases}$$

Rozpatrujemy dwa przypadki:

1) Dla  $x \geq 0$

Wtedy  $|x| = x$

Zatem równanie przyjmuje postać

$$x = 15$$

$15 \geq 0$ , więc warunek  $x \geq 0$  jest spełniony.

2) Dla  $x < 0$

Wtedy  $|x| = -x$

Zatem równanie przyjmuje postać

$$-x = 15 \quad | : (-1)$$

$-15 < 0$ , więc warunek  $x < 0$  jest spełniony.

A zatem

$$x = 15 \text{ lub } x = -15$$

**Odpowiedź:**  $x \in \{-15, 15\}$

**b)**  $|3x - 9| = 15$

Ponownie korzystamy z algebraicznej definicji wartości bezwzględnej i rozpatrujemy dwa przypadki:

1) Dla  $3x - 9 \geq 0$

$$3x \geq 9 \quad | : 3$$

$$x \geq 3$$

A więc  $x \in \langle 3, \infty \rangle$

Wtedy  $|3x - 9| = 3x - 9$

Zatem równanie przyjmuje postać

$$3x - 9 = 15$$

$$3x = 15 + 9$$

$$3x = 24 \quad |: 3$$

$$x = 8$$

$8 \in \langle 3, \infty \rangle$ , więc warunek  $x \in \langle 3, \infty \rangle$  jest spełniony.

2) Dla  $3x - 9 < 0$

$$3x < 9 \quad |: 3$$

$$x < 3$$

A więc  $x \in (-\infty, 3)$

$$\text{Wtedy } |3x - 9| = -3x + 9$$

Zatem równanie przyjmuje postać

$$-3x + 9 = 15$$

$$-3x = 15 - 9$$

$$-3x = 6 \quad |: 3$$

$$x = -2$$

$-2 \in (-\infty, 3)$ , więc warunek  $x \in (-\infty, 3)$  jest spełniony.

A zatem

$$x = 8 \text{ lub } x = -2$$

**Odpowiedź:**  $x \in \{-2, 8\}$

#### Przykład 4

Rozwiąż równania:

a)  $|x| + x = 10$

Zauważ, że w tym równaniu niewiadoma znajduje się zarówno pod modulem jak i poza nim. Musimy wtedy skorzystać z definicji algebraicznej wartości bezwzględnej, a zatem rozpatrzyć dwa przypadki.

1) Dla  $x \geq 0$

$$\text{mamy } |x| = x$$

Wtedy równanie przyjmuje postać

$$x + x = 10$$

$$2x = 10 \quad |: 2$$

$$x = 5$$

$5 \geq 0$ , więc warunek  $x \geq 0$  jest spełniony.

2) Dla  $x < 0$

$$\text{mamy } |x| = -x$$

Wtedy równanie przyjmuje postać

$$-x + x = 10$$

$$0 = 10$$

Otrzymaliśmy równanie sprzeczne.

A zatem równanie  $|x| + x = 10$  ma tylko jeden pierwiastek  $x = 5$ .

**Odpowiedź:**  $x \in \{5\}$

**b)**  $|4x - 5| + 3x = 20$

Ponownie korzystamy z algebraicznej definicji wartości bezwzględnej i rozpatrujemy dwa przypadki:

1) Dla  $4x - 5 \geq 0$

$$4x \geq 5 \quad |: 4$$

$$x \geq \frac{5}{4}$$

A więc  $x \in \langle \frac{5}{4}, \infty \rangle$

$$\text{Wtedy } |4x - 5| = 4x - 5$$

Zatem równanie przyjmuje postać

$$4x - 5 + 3x = 20$$

$$7x = 20 + 5$$

$$7x = 25 \quad |: 6$$

$$x = \frac{25}{7}$$

$$x = 3\frac{4}{7}$$

$3\frac{4}{7} \in \langle \frac{5}{4}, \infty \rangle$ , więc warunek  $x \in \langle \frac{5}{4}, \infty \rangle$  jest spełniony.

2) Dla  $4x - 5 < 0$

$$4x < 5 \quad |: 4$$

$$x < \frac{5}{4}$$

A więc  $x \in (-\infty, \frac{5}{4})$

$$\text{Wtedy } |4x - 5| = -4x + 5$$

Zatem równanie przyjmuje postać

$$-4x + 5 + 3x = 20$$

$$-x = 20 - 5$$

$$-x = 15 \quad | : (-1)$$

$$x = -15$$

$-15 \in (-\infty, \frac{5}{4})$ , więc warunek  $x \in (-\infty, \frac{5}{4})$  jest spełniony.

Równanie  $|4x - 5| + 3x = 20$  ma dwa pierwiastki  $x = 3\frac{4}{7}$  oraz  $x = -15$ .

**Odpowiedź:**  $x \in \{-15, 3\frac{4}{7}\}$

### Przykład 5

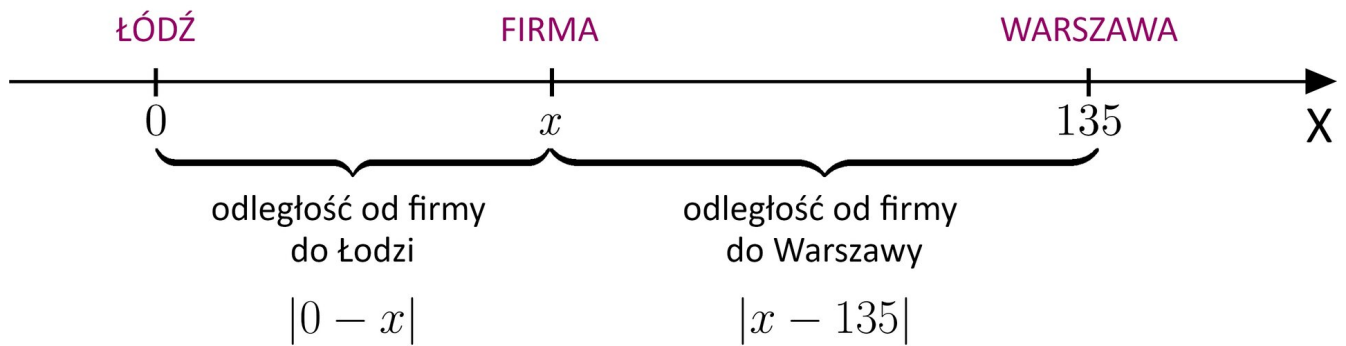
Wróćmy do zadania, od którego rozpoczęliśmy ten materiał.

**Pan Tomasz jest właścicielem firmy znajdującej się między Warszawą a Łodzią.**

**Przyjmijmy, że odległość między tymi miastami wynosi ok. 135 km.**

**W poniedziałek do Łodzi pojechało 5 transportów, a do Warszawy 7. Samochody pokonały łącznie 885 km. W jakiej odległości od Łodzi znajduje się firma pana Tomasza?**

Opisaną w zadaniu sytuację możemy zilustrować, korzystając z graficznej definicji wartości bezwzględnej.



Możemy zatem zapisać równanie

$$5 \cdot |0 - x| + 7 \cdot |x - 135| = 885$$

Stosując poznane metody rozwiązujemy równanie.

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{dla } x \geq 0 \\ -x, & \text{dla } x < 0 \end{cases}$$

oraz

$$|x - 135| = \begin{cases} x - 135, & \text{dla } x \geq 135 \\ -x + 135, & \text{dla } x < 135 \end{cases}$$

Uwzględniając warunki zadania, wiemy, że  $0 < x < 135$ .

A zatem

$$|x| = x \text{ oraz } |x - 135| = -x + 135.$$

Wtedy

$$5x + 7 \cdot (-x + 135) = 885$$

$$5x - 7x + 945 = 885$$

$$-2x = -60$$

$$x = 30$$

**Odpowiedź:** Firma pana Tomasza znajduje się 30 km od Łodzi.

## Słownik

rozwiązanie równania

liczba spełniająca równanie

**równania równoważne**

równania posiadające taki sam zbiór rozwiązań

# Animacja

---

## Polecenie 1

Przeanalizuj metody rozwiązania równań przedstawione w materiale. Następnie wykonaj Polecenie 2.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D17E9orF0>

Film nawiązujący do treści lekcji dotyczącej równań z wartością bezwzględną.

---

## Polecenie 2

Korzystając z dowolnie wybranej metody, rozwiąż równania:

a)  $|x| + 4 = 0$

b)  $|x| - 12 = 0$

c)  $|3x - 5| = 4$

d)  $3x + |2x - 1| = 4$

# Sprawdź się

---

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Ćwiczenie 2



Ćwiczenie 3



Ćwiczenie 4



Ćwiczenie 5



Ćwiczenie 6



Ćwiczenie 7



Ćwiczenie 8



# Dla nauczyciela

---

**Autor:** Beata Wojciechowska

**Przedmiot:** Matematyka

**Temat:** Równanie z wartością bezwzględną

**Grupa docelowa:**

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

**Podstawa programowa:**

I. Liczby rzeczywiste. Zakres podstawowy.

Uczeń:

7) stosuje interpretację geometryczną i algebraiczną wartości bezwzględnej, rozwiązuje równania i nierówności typu:  $|x + 4| = 5$ ,  $|x - 2| < 3$ ,  $|x + 3| \geq 4$ .

**Kształtowane kompetencje kluczowe:**

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

**Cele operacyjne:**

Uczeń:

- zna i stosuje podstawowe własności wartości bezwzględnej liczby rzeczywistej  $a$
- korzystając z własności modułu, upraszcza wyrażenia z wartością bezwzględną
- rozwiązuje równania z wartością bezwzględną

**Strategie nauczania:**

- konstruktywizm

**Metody i techniki nauczania:**

- stacje eksperckie
- analiza przypadku
- dyskusja

- rozmowa nauczająca z wykorzystaniem medium bazowego

### **Formy pracy:**

- praca całego zespołu klasowego
- praca w grupach
- praca w parach

### **Środki dydaktyczne:**

- komputery z głośnikami i dostępem do Internetu, słuchawki
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda

### **Przebieg lekcji**

#### **Faza wstępna:**

1. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć oraz wspólnie z uczniami ustala kryteria sukcesu.
2. Uczniowie będą pracować metodą stacji eksperckich.
3. Ośmiu uczniów tworzy cztery grupy eksperckie i przygotowują informacje na temat metod rozwiązywania równań z wartością bezwzględną.
4. Eksperci prezentują w dowolnie wybranej formie, przygotowane przez siebie wiadomości. Przygotowują cztery stacje eksperckie.

#### **Faza realizacyjna:**

1. Uczniowie – eksperci kolejno prezentują przygotowane przez siebie informacje. Po prezentacji odpowiadają na pytania pozostałych uczniów i wyjaśniają wątpliwości.
  - I. Rozwiązywanie równań „intuicyjnie”, odpowiadając na pytanie „Jaką liczbą jest  $x$ , jeśli jego wartość bezwzględna wynosi np. 5?”

Uczniowie mogą wykorzystać przykład 1 z części „Przeczytaj”.
  - II. Rozwiązywanie równań, poprzez wykorzystanie geometrycznego pojęcia wartości bezwzględnej liczby.

Uczniowie mogą wykorzystać przykład 2 z części „Przeczytaj”.
  - III. Rozwiązywanie równań korzystając z definicji wartości bezwzględnej liczby.

Uczniowie mogą wykorzystać przykład 3 z części „Przeczytaj”.
  - IV. Rozwiązywanie trudniejszych równań, w których  $x$  znajduje się pod modulem i poza nim.

Uczniowie mogą wykorzystać przykład 4 z części „Przeczytaj”.
2. Nauczyciel dzieli uczniów na cztery grupy, które podchodzą do stacji informacyjnych. Każda z grup zadaniowych, rozwiązuje przygotowane przez ekspertów zadania.
3. Eksperci wspierają pozostałych uczniów, wyjaśniają wątpliwości. Nauczyciel nadzoruje pracę grup.
4. Po wykonaniu zadań z danego zakresu, grupy zadaniowe przechodzą do kolejnej stacji.

5. Pracując w parach, uczniowie zapoznają się z animacją i wykonują polecenie umieszczone pod medium bazowym.
6. Uczniowie rozwiązują zadania zawarte w materiale multimedialnym. Rozwiązania zadań uczniowie zapisują w zeszycie, sprawdzając w materiale ich poprawność.

#### **Faza podsumowująca:**

1. Jako podsumowanie nauczyciel zadaje uczniom pytania dotyczące ćwiczeń. Nauczyciel i uczniowie – eksperci wyjaśniają wątpliwości.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, omawia pracę ekspertów oraz wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, udzielając im tym samym informacji zwrotnej.

#### **Praca domowa:**

Uczniowie wykonują pozostałe ćwiczenia.

#### **Materiały pomocnicze:**

- [Zadania prowadzące do rozwiązywania równań z wartością bezwzględną](#)

#### **Wskazówki metodyczne:**

Uczniowie mogą wykorzystać przykłady zawarte w części „Przeczytaj” oraz animację do utrwalenia informacji po lekcji i pomoc przy odrabianiu pracy domowej.