



Rozwiązanie algebraiczne nierówności typu $|x| < a$

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Galeria zdjęć interaktywnych](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Wiesz już jak rozwiązać nierówność typu $|x| < a$, korzystając z geometrycznej definicji wartości bezwzględnej.

Potrafisz też rozwiązać algebraicznie nierówności postaci $|x| > a$ oraz $|x| \geq a$.

Łącząc te umiejętności na pewno bez problemu poradzisz sobie z tematem tego materiału i sprawnie rozwiążesz wszystkie ćwiczenia.

Twoje cele

- Utrwalisz definicję algebraiczną wartości bezwzględnej liczby a .
- Nauczysz się rozwiązywać nierówności typu $|x| < a$ oraz $|x| \leq a$ metodą algebraiczną.
- Udoskonalisz zapisywanie nierówności typu $|x| < a$ oraz $|x| \leq a$ bez użycia symbolu modułu.

Przeczytaj

Przykład 1

Rozwiąż algebraicznie nierówność $|x| < 4$.

Aby znaleźć zbiór rozwiązań tej nierówności, zapisujemy ją bez symbolu wartości bezwzględnej:

$$-4 < x < 4$$

Następnie zaznaczamy otrzymany zbiór na osi liczbowej i zapisujemy zbiór rozwiązań w postaci przedziału.



$$x \in (-4, 4)$$

Przykład 2

Rozwiąż algebraicznie nierówność $|3x| < 21$.

Nierówność możemy zapisać w postaci koniunkcji dwóch nierówności.

$$3x > -21 \mid : 3 \wedge 3x < 21 \mid : 3$$

$$x > -7 \wedge x < 7$$

Zaznaczamy na osi liczbowej przedział, który jest iloczynem ich zbiorów rozwiązań.



Zapisujemy teraz rozwiązanie przedstawione na rysunku w postaci przedziału.

$$x \in (-7, 7)$$

Przykład 3

Rozwiąż algebraicznie nierówność $\left|\frac{4}{5}x\right| \leq 8$.

Skorzystamy teraz z definicji algebraicznej wartości bezwzględnej:

$$|x| = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$$

Przypadek 1:

$$\frac{4}{5}x < 0 \Leftrightarrow x < 0$$

$$\text{Wtedy } \left|\frac{4}{5}x\right| = -\frac{4}{5}x$$

$$-\frac{4}{5}x \leq 8 \quad | : \left(-\frac{4}{5}\right)$$

$$x \geq -8 \cdot \frac{5}{4}$$

$$x \geq -10$$

$$\begin{cases} x < 0 \\ x \geq -10 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \langle -10, 0 \rangle$$

Przypadek 2:

$$\frac{4}{5}x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$$

$$\text{Wtedy } \left|\frac{4}{5}x\right| = \frac{4}{5}x$$

$$\frac{4}{5}x \leq 8$$

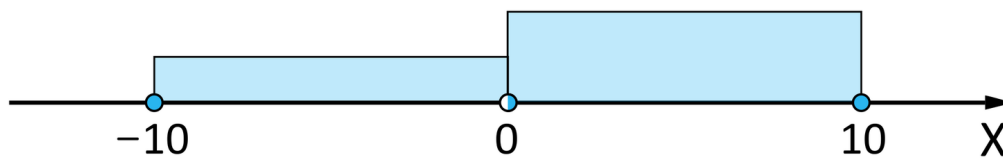
$$x \leq 8 \cdot \frac{5}{4}$$

$$x \leq 10$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq 10 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \langle 0, 10 \rangle$$

Zaznaczamy na osi liczbowej otrzymane przedziały.

Ich suma jest zbiorem rozwiązań nierówności $\left|\frac{4}{5}x\right| \leq 8$.



$$x \in \langle -10, 10 \rangle$$

Przykład 4

Rozwiąż nierówność $|x| + 5 < 8$.

Przenosimy liczbę 5 na drugą stronę nierówności.

$$|x| < 8 - 5$$

$$|x| < 3$$

Zapisujemy ją bez symbolu wartości bezwzględnej.

$$-3 < x < 3$$

Następnie zaznaczmy otrzymany zbiór na osi liczbowej i zapisujemy w postaci przedziału.



$$x \in (-3, 3)$$

Przykład 5

Rozwiąż nierówność $5 - 2|x| \geq 9$.

Przenosimy liczbę 5 na drugą stronę nierówności.

$$-2|x| \geq 9 - 5$$

$$-2|x| \geq 4$$

Dzielimy obie strony nierówności przez liczbę (-2) .

Pamiętaj, że przy dzieleniu nierówności przez liczbę ujemną, należy zmienić jej znak na przeciwny.

$$-2|x| \geq 4 \quad |: (-2)$$

$$|x| \leq -2$$

Otrzymana nierówność to **nierówność sprzeczna**.

$$x \in \emptyset$$

Przykład 6

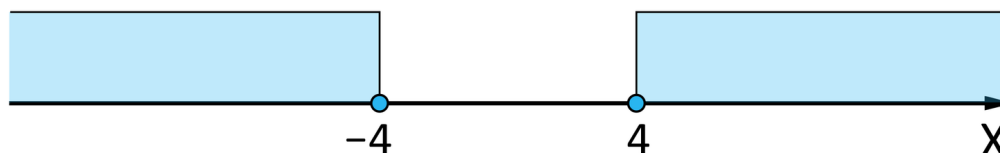
Rozwiąż nierówność $-2|x| \leq -8$.

Dzielimy obie strony nierówności przez liczbę (-2) .

$$|x| \geq 4$$

Otrzymaliśmy nierówność, którą już umiesz rozwiązać – zapisujemy ją bez wartości bezwzględnej, w postaci alternatywy dwóch nierówności, zaznaczamy rozwiązanie na osi liczbowej i zapisujemy w postaci sumy przedziałów.

$$x \leq -4 \text{ lub } x \geq 4$$



$$x \in (-\infty, -4] \cup [4, \infty)$$

Słownik

nierówność sprzeczna

zbiorem rozwiązań jest zbiór pusty – nierówność nie posiada rozwiązania

Galeria zdjęć interaktywnych

Polecenie 1

Zapoznaj się z przykładem, w którym pojawia się więcej niż jeden symbol wartości bezwzględnej. Następnie wykonaj samodzielnie polecenie 2.

Polecenie 2

Rozwiąż nierówność. Zaznacz rozwiązanie na osi liczbowej i zapisz w postaci przedziału $|5|4x|| < 20$.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Zaznacz zbiór rozwiązań nierówności $|x| < 7$.

☐ $x \in (-\infty, -7) \cup (7, \infty)$

☐ $x \in \langle -7, 7 \rangle$

☐ $x \in (-\infty, -7] \cup [7, \infty)$

☐ $x \in (-7, 7)$

Ćwiczenie 2



Wskaż nierówność sprzeczną.

☐ $|x| < 5$

☐ $|x| < -5$

☐ $|x| > 5$

☐ $|x| > -5$

Ćwiczenie 3



Wskaż nierówność tożsamościową.

☐ $|x| \geq -4$

☐ $|x| \leq -4$

☐ $|x| \leq 4$

☐ $|x| \geq 4$

Ćwiczenie 4



Rozwiąż nierówności dowolnym sposobem. Posegreguj je w zależności od liczby posiadanych rozwiązań i przeciągnij w odpowiedni obszar, zgodnie z opisem.

Nieskończenie wiele rozwiązań

Brak rozwiązań

Tylko jedno rozwiązanie

$6 \geq |x| + 7$

$4 - |x| \geq 4$

$7 - |x| < 5$

$|2x| + 10 \leq 2$

$6 \geq |x| + 6$

$|x| - 7 \leq -10$

$|3x| - 12 \geq -3$

$-10 \leq |x| + 2$

$-5 + |x| \leq -5$

$4 + |x| \geq 8$

Ćwiczenie 5



Połącz w pary nierówności i zbiory ich rozwiązań.

$$|2x| \leq 6$$

$$x \in \langle -3, 3 \rangle$$

$$|x| \geq 3$$

$$x \in (-\infty, -3] \cup [3, \infty)$$

$$|x| - 3 \leq 6$$

$$x \in \langle -9, 9 \rangle$$

$$3 - |x| \leq 6$$

$$x \in \mathbb{R}$$

Ćwiczenie 6



Połącz w pary nierówności i zbiory ich rozwiązań.

$$|2|3x|| \leq 18$$

$$x \in \langle -2, 2 \rangle$$

$$|3|x|| < 3$$

$$x \in (-1, 1)$$

$$|4|x|| \leq 8$$

$$x \in \langle -3, 3 \rangle$$

$$|4|6x|| > 24$$

$$x \in (-\infty, -2] \cup [2, \infty)$$

$$|-2|x|| \geq 4$$

$$x \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$$

$$-|x| > 3$$

$$x \in (-\infty, -3) \cup (3, \infty)$$

Ćwiczenie 7



Ułóż we właściwej kolejności kolejne etapy rozwiązania nierówności $|4\frac{2}{3}x| \leq 42$.

$$|4\frac{2}{3}x| \leq 42$$

$$1^\circ -42 \leq 4\frac{2}{3}x$$

$$2^\circ 4\frac{2}{3}x \leq 42$$

$$x \in$$

$$4\frac{2}{3}x \geq -42 \mid : 4\frac{2}{3}$$

$$4\frac{2}{3}x \leq 42 \mid : 4\frac{2}{3}$$

$$-42 \leq 4\frac{2}{3}x \leq 42$$

$$(-9, 9)$$

$$x \geq -9$$

$$\langle -9, 9 \rangle$$

$$x \leq \frac{42}{1} \cdot \frac{3}{14}$$

$$x \geq -\frac{42}{1} \cdot \frac{3}{14}$$

$$x \leq 9$$

$$\langle 9, -9 \rangle$$

$$(9, -9)$$



Ćwiczenie 8



Wypisz wszystkie liczby naturalne należące do zbioru rozwiązań nierówności

$$|-2|-3x| < 20$$

Dla nauczyciela

Autor: Beata Wojciechowska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Rozwiązanie algebraiczne nierówności typu $|x| < a$

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

I. Liczby rzeczywiste. Zakres podstawowy.

Uczeń:

7) stosuje interpretację geometryczną i algebraiczną wartości bezwzględnej, rozwiązuje równania i nierówności typu: $|x + 4| = 5$, $|x - 2| < 3$, $|x + 3| \geq 4$.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- utrwała definicję algebraiczną wartości bezwzględnej liczby a
- zapisuje nierówności typu $|x| < a$ oraz $|x| \leq a$ bez użycia symbolu modułu
- rozwiązuje nierówności typu $|x| < a$ oraz $|x| \leq a$ sposobem algebraicznym
- wykorzystuje definicję algebraiczną wartości bezwzględnej liczby a do rozwiązywania nierówności typu $|x| < a$ oraz $|x| \leq a$

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- analiza przypadku

- dyskusja
- rozmowa nauczająca z wykorzystaniem galerii zdjęć interaktywnych i ćwiczeń interaktywnych

Formy pracy:

- praca w parach
- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami i dostępem do Internetu, słuchawki
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć oraz wspólnie z uczniami ustala kryteria sukcesu.
2. Uczniowie przypominają sobie w parach wiadomości i umiejętności dotyczące algebraicznej definicji wartości bezwzględnej oraz zapisywania wyrażeń z wartością bezwzględną bez użycia symbolu modułu.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie pracują w parach metodą analizy przypadku. Analizują przykłady zawarte w części „Przeczytaj”.
2. Uczniowie wspólnie nauczycielem analizują i omawiają przykład przedstawiony w medium bazowym, a następnie wykonują zawarte pod nim polecenie. Wątpliwości konsultują z nauczycielem.
3. Uczniowie pracując indywidualnie wykonują ćwiczenia interaktywne 1 – 6.

Faza podsumowująca:

1. Jako podsumowanie nauczyciel zadaje uczniom pytania dotyczące ćwiczeń.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, udzielając im tym samym informacji zwrotnej.

Praca domowa:

Uczniowie wykonują ćwiczenia 7 i 8 z sekcji „Sprawdź się”.

Materiały pomocnicze:

- [Nierówności stopnia pierwszego](#)

- [Wartość bezwzględna – definicja](#)

Wskazówki metodyczne:

Uczniowie mogą wykorzystać przez chętnych uczniów do samodzielnego utrwalenia w domu poznanego tematu.