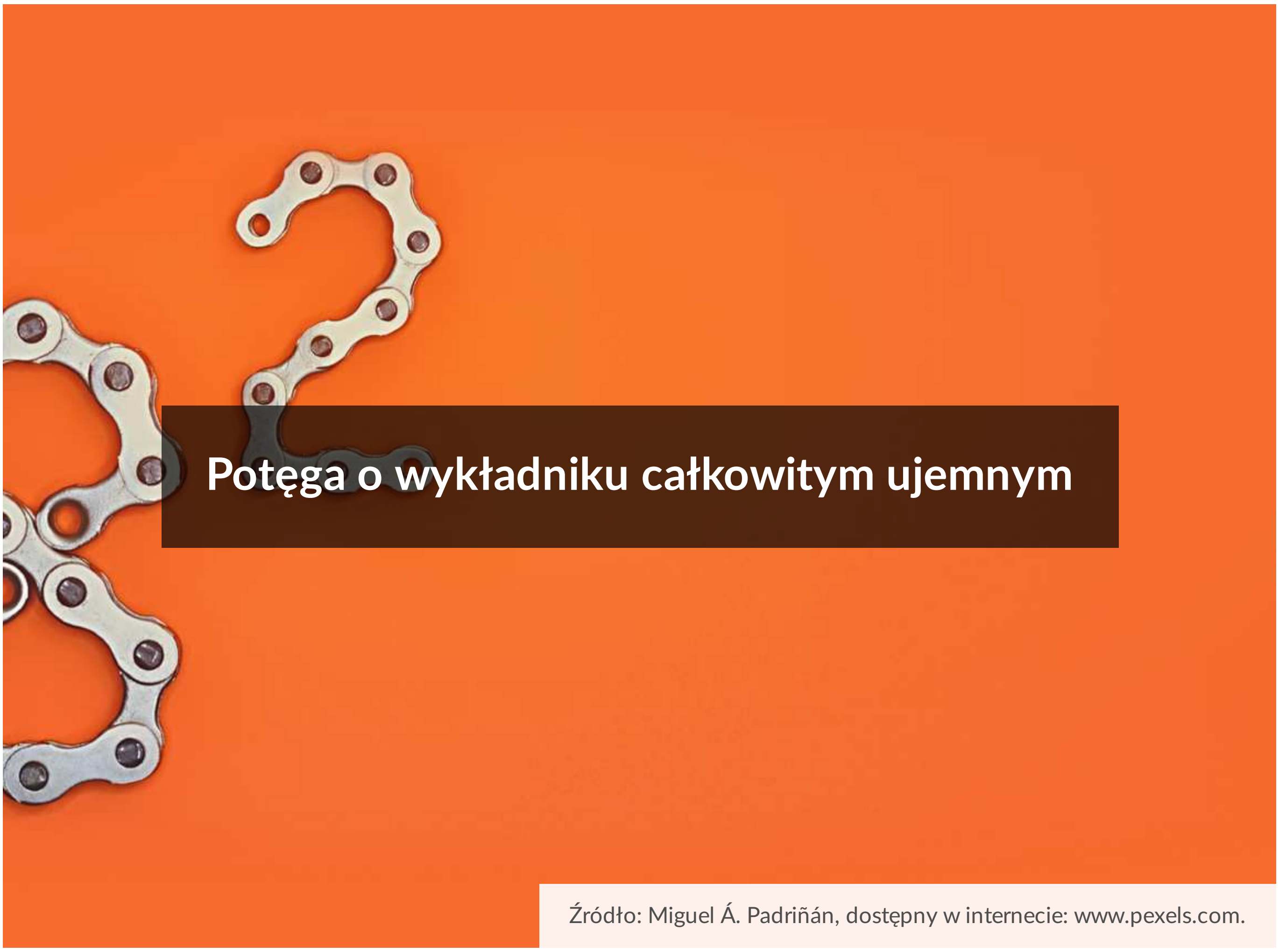
Potęga o wykładniku całkowitym ujemnym

Potęga o wykładniku całkowitym ujemnym



Źródło: Miguel Á. Padriñán, dostępny w internecie: www.pexels.com.

W matematyce często mamy do czynienia z sytuacją, w której jakieś zagadnienie zaczyna się od zagadnień prostych i intuicyjnych, ale wraz z rozwojem danej teorii pojawiają się w niej pojęcia, które stają się tak abstrakcyjne, że trudno sobie wyobrazić, co one mogłyby właściwie oznaczać w realnym świecie. Jako przykład może posłużyć potęgowanie. Liczba a^3 może być objętością sześcianu o krawędzi a. A czym jest liczba a^{-3}? Jak obliczyć jej wartość? Tego dowiemy się w tej lekcji.

Twoje cele

- Zastosujesz definicję do obliczania wartości potęg o wykładniku całkowitym ujemnym.
- Zastosujesz własności działań na potęgach o wykładnikach całkowitych ujemnych.

Przeczytaj

Zacznijmy od rozważenia serii kilku równości.

Z definicji potęgi o wykładniku naturalnym mamy:

$$a^2 = a \cdot a$$

Jeśli a nie jest zerem, możemy podzielić obie strony równania przez a otrzymując

$$\frac{a^2}{a} = (a \cdot a) : a$$

Stosując własności działań na potęgach do lewej strony równości oraz łączność mnożenia do prawej strony otrzymujemy równość:

$$a^1 = a$$

Ponownie podzielmy obie strony równości przez a:

$$\frac{a^1}{a} = a : a$$

Z własności działań na potęgach o wykładniku naturalnym wynika, że lewą stronę możemy zapisać jako

$$\frac{a^1}{a} = \frac{a^1}{a^1} = a^{1-1} = a^0$$

Zatem powyższa równość przyjmuje postać

$$a^0 = 1$$

Sprawdźmy, co się stanie, jeśli ponownie podzielimy obie strony równości przez a:

$$\frac{a^0}{a} = 1 : a$$

$$\frac{a^0}{a^1} = \frac{1}{a}$$

Chcemy, aby własności działań na potęgach były uniwersalne i prawdziwe nie tylko dla wykładników naturalnych. Po zastosowaniu własności dotyczącej ilorazu potęg o tych samych podstawach otrzymujemy:

$$a^{-1} = \frac{1}{a}$$

Jeśli podzielimy obie strony równania jeszcze raz przez a otrzymamy:

$$\frac{a^{-1}}{a} = \frac{1}{a} : a$$

czyli:

$$\frac{a^{-1}}{a^{1}} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{a}$$

$$a^{-1-1} = \frac{1}{a^2}$$

$$a^{-2} = \frac{1}{a^2}$$

Ogólnie, aby własności potęg były prawdziwe dla dowolnych wykładników, definiujemy dla $a \neq 0$ i liczby naturalnej n potęgę o wykładniku całkowitym ujemnym:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$$

Przykład 1

Obliczymy:

$2^{-5} = \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$

$\left(\frac{1}{3}\right)^{-4} = 3^4 = 81$

$\left(\frac{2}{3}\right)^{-3} = \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{8}$

$(-0{,}1)^{-2} = \left(-\frac{1}{0{,}1}\right)^2 = \frac{1}{0{,}01}$

$(-0{,}2)^{-3} = \left(-\frac{1}{0{,}2}\right)^3 = -\frac{1}{0{,}008}$

$\left(\sqrt{2}\right)^{-2} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}$

$\left(\sqrt{5}\right)^{-3} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^3 = \frac{1}{5\sqrt{5}}$ możemy jeszcze usunąć niewymierność z mianownika $\frac{1}{5\sqrt{5}} = \frac{1}{5\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{25}$

Własność: Własności potęg

Wszystkie własności potęg o wykładnikach naturalnych przenoszą się na potęgi o wykładnikach całkowitych. Zatem dla liczb całkowitych k i m oraz liczb a i b różnych od zera mamy:

1. $a^k \cdot a^m = a^{k+m}$
2. $a^k : a^m = a^{k-m}$
3. $\left(a^k\right)^m = a^{k \cdot m}$
4. $a^k \cdot b^k = (a \cdot b)^k$
5. $a^k : b^k = (a : b)^k$

Przykład 2

Uprościmy wyrażenie $\left(\frac{x^{-2}\cdot y^{-3}}{x^{-3}\cdot y^{-2}}\right)^{-2}$.

Korzystamy z własności działań na ułamkach:

$$\left(\frac{x^{-2}\cdot y^{-3}}{x^{-3}\cdot y^{-2}}\right)^{-2} =$$

Stosujemy wzór na iloraz potęg o tych samych podstawach:

$$= \left(x^{-2-(-3)} \cdot y^{-3-(-2)}\right)^{-2} =$$

Z własności działań na liczbach całkowitych mamy:

$$= \left(x^{-2+3} \cdot y^{-3+2}\right)^{-2} =$$

$$= \left(x^{1} \cdot y^{-1}\right)^{-2} =$$

Z rozdzielności potęgowania względem mnożenia mamy:

$$= \left(x^{1}\right)^{-2} \cdot \left(y^{-1}\right)^{-2} =$$

Ze wzoru na potęgę potęgi mamy:

$$= x^{-2} \cdot y^{2} =$$

Z definicji potęgi o wykładniku ujemnym mamy:

$$= \frac{1}{x^{2}} \cdot y^{2} =$$

Z własności działań na pierwiastkach mamy:

$$= \frac{y^{2}}{x^{2}}$$

Przykład 3

Obliczymy wartość wyrażenia $\frac{18^{-4}\cdot 36^{5}}{6^{-2}\cdot 32^{2}}$.

$$\frac{18^{-4}\cdot 36^{5}}{6^{-2}\cdot 32^{2}} =$$

Zamieniamy podstawy 6, 18 i 36 potęg na iloczyny $2\cdot 3$, $2\cdot 9$ i $4\cdot 9$, zaś liczbę 32 zapisujemy w postaci potęgi o podstawie 2: $32 = 2^{5}$

$$= \frac{(2\cdot 9)^{-4}\cdot (4\cdot 9)^{5}}{(2\cdot 3)^{-2}\cdot \left(2^{5}\right)^{2}} =$$

Zamieniamy liczby 4 i 9 na potęgi o podstawach 2 i 3: $4 = 2^{2}$, $9 = 3^{2}$

$= \frac{(2 \cdot 3^2)^{-4} \cdot (2^2 \cdot 3^2)^5}{(2 \cdot 3)^{-2} \cdot (2^5)^2} =$

Korzystamy z rozdzielności potęgowania względem mnożenia

$= \frac{2^{-4} \cdot (3^2)^{-4} \cdot (2^2)^5 \cdot (3^2)^5}{2^{-2} \cdot 3^{-2} \cdot (2^5)^2} =$

Korzystamy ze wzoru na potęgę potęgi

$= \frac{2^{-4} \cdot 3^{-8} \cdot 2^{10} \cdot 3^{10}}{2^{-2} \cdot 3^{-2} \cdot 2^{10}} =$

Korzystamy z własności działań na potęgach o tych samych podstawach

$= \frac{2^6 \cdot 3^2}{2^8 \cdot 3^{-2}} =$

Ponownie korzystamy z własności działań na potęgach o tych samych podstawach

$= 2^{6-8} \cdot 3^{2-(-2)} =$

Korzystamy z własności działań na liczbach całkowitych

$= 2^{-2} \cdot 3^4 =$

Korzystamy z definicji potęg o wykładnikach naturalnych i wykładnikach całkowitych ujemnych

$= \frac{1}{4} \cdot 81 =$

Korzystamy z własności działań na ułamkach

$= \frac{81}{4} =$

Zamieniamy ułamek niewłaściwy na liczbę mieszaną

$= 20\frac{1}{4}$

Słownik

rozdzielność potęgowania względem mnożenia

własność potęgowania orzekająca, że dla dowolnych liczb a i b różnych od zera oraz dowolnej liczby rzeczywistej x zachodzi $(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$

potęga o wykładniku całkowitym ujemnym

jeśli a jest liczbą rzeczywistą różną od zera, zaś n jest liczbą naturalną, wówczas zachodzi wzór $a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1}{a^n}$

Animacja

Polecenie 1

Przeanalizuj informacje zawarte w animacji.

Trwa wczytywanie danych...

Film dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DILHbDTwz

Film nawiązujący do treści lekcji dotyczącej potęgi o wykładniku całkowitym.

Polecenie 2

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

Zapisz w postaci potęgi.

a) $\left[b^{-4}\cdot\left(b^{7}:b^{-5}\right)\right]:\left[b^{2}\cdot\left(b^{-5}:b^{3}\right)\right]$

b) $\left\{\left[b^{5}\cdot\left(b^{-3}:b^{-2}\right)\right]:\left[b^{6}:\left(b^{-5}\cdot b^{-3}\right)\right]\right\}:b^{-2}$

Ćwiczenie 7

Przedstaw w najprostszej postaci.

a) $\left\{2a^{2}b^{3}\cdot\left[\left(4a^{3}b^{-2}\right)^{3}:\left(2a^{-3}b^{2}\right)^{2}\right]\right\}:\left(-2a^{2}b^{-1}\right)^{2}$, gdzie $a\neq 0$, $b\neq 0$

b) $\left[\left(5x^{-1}y^{3}\right)^{3}:\left(5x^{-4}y^{-2}\right)^{2}\right]\cdot\left[\left(25x^{-2}y^{2}\right)^{2}:\left(5x^{-1}y^{-2}\right)^{4}\right]$, gdzie $x\neq 0$, $y\neq 0$

Ćwiczenie 8

Znane jest twierdzenie:

Jeśli potęgi mają takie same podstawy, które są liczbami dodatnimi różnymi od 1 i są równe, to wykładniki tych potęg też są równe.

(**Innymi słowy:** Jeśli $a > 0$ i $a \neq 1$ oraz $a^x = a^y$, to $x = y$).

Korzystając z powyższego twierdzenia możemy rówiązywać równania, w których niewiadoma znajduje się w wykładniku potęgi.

Na przykład:

$$2^4 \cdot 2^x \cdot 4^3 = 2^6 \cdot 8^3$$

$$2^4 \cdot 2^x \cdot \left(2^2\right)^3 = 2^6 \cdot \left(2^3\right)^3$$

$$2^4 \cdot 2^x \cdot 2^6 = 2^6 \cdot 2^9$$

$$2^4 \cdot 2^6 \cdot 2^x = 2^6 \cdot 2^9$$

$$2^{10} \cdot 2^x = 2^{15}$$

$$2^{10+x} = 2^{15}$$

$$10 + x = 15$$

$$x = 5$$

Dla nauczyciela

Autor: Sebastian Guz

Przedmiot: Matematyka

Temat: Potęga o wykładniku całkowitym ujemnym

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:
Treści nauczania – wymagania szczegółowe:
I. Liczby rzeczywiste. Zakres podstawowy. Uczeń:
1) wykonuje działania (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie, pierwiastkowanie, logarytmowanie) w zbiorze liczb rzeczywistych;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczen:

- oblicza wartości potęg o wykładniku całkowitym ujemnym,
- stosuje własności działań na potęgach o wykładnikach całkowitych ujemnych.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona klasa;
- mapa myśli;
- dyskusja.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

1. Uczniowie zapoznają się z treściami zapisanymi w sekcji „Przeczytaj”.

Faza wstępna:

1. Nauczyciel inicjuje rozmowę wprowadzającą w temat: „Potęga o wykładniku całkowitym ujemnym”.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel czyta polecenie nr 1 w sekcji „Animacja” - „Przeanalizuj informacje zawarte w animacji” - prosi uczniów, aby zapoznali się z materiałem. Uczniowie zapisują ewentualne wątpliwości i niezrozumiałe aspekty, które zostały w nim przedstawione - nauczyciel tłumaczy je na forum klasy.
2. Uczniowie wykonują wspólnie ćwiczenia nr 1-2 z sekcji „Sprawdź się”. Nauczyciel sprawdza poprawność wykonanych ćwiczeń, omawiając je wraz z uczniami.
3. W następnym kroku uczniowie wykonują w grupach ćwiczenia numer 3, 4 i 5. Następnie wybrana grupa prezentuje swoje rozwiązania. Nauczyciel w razie potrzeby uzupełnia informacje.
4. Uczniowie realizują indywidualnie ćwiczenia 6-8 z sekcji „Sprawdź się”. Po ich wykonaniu nauczyciel omawia najlepsze rozwiązania zastosowane przez uczniów.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.

Praca domowa:

1. Zadanie dla kolegi/koleżanki. Uczniowie dobierają się w pary i opracowują zadania analogiczne do ćwiczeń 7 i 8 z sekcji „Sprawdź się”. Następnie przesyłają je do siebie mailem, rozwiązują i na następnej lekcji porównują wyniki.

Materiały pomocnicze:

- Działania na potęgach o wykładniku całkowitym

Wskazówki metodyczne:

- Medium w sekcji „Animacja” można wykorzystać na lekcji jako podsumowanie i utrwalenie wiedzy w temacie „Potęga o wykładniku całkowitym ujemnym”.