



Funkcja homograficzna

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Galeria zdjęć interaktywnych](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Funkcja homograficzna

Źródło: Martin Sanchez, dostępny w internecie: <https://unsplash.com/>.

Znasz już wykres i własności funkcji liniowej, kwadratowej, wielomianowej. W tym materiale poznasz własności funkcji homograficznej.

Twoje cele

- Podasz definicję funkcji homograficznej.
- Rozpoznasz funkcje homograficzne.
- Wyznaczysz dziedzinę funkcji homograficznej.
- Narysujesz wykres funkcji homograficznej.
- Przekształcisz wzór funkcji homograficznej z postaci ogólnej do postaci kanonicznej.
- Wyznaczysz równania osi symetrii wykresu funkcji homograficznej oraz współrzędne środka symetrii wykresu.

Przeczytaj

Już wiesz

Funkcją homograficzną nazywamy **funkcję wymierną**

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$$

gdzie:

$$c \neq 0 \text{ i } ad - cb \neq 0.$$

Dziedziną funkcji homograficznej jest zbiór $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}$.

Powyższy wzór to postać ogólna funkcji homograficznej.

Postać kanoniczna funkcji homograficznej:

$$f(x) = \frac{r}{x-p} + q$$

Wykresem każdej funkcji homograficznej jest **hiperbola**. Wykres funkcji $f(x) = \frac{r}{x-p} + q$, $r \neq 0$, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{p\}$ powstaje w wyniku przesunięcia wykresu funkcji $g(x) = \frac{r}{x}$ o wektor $[p, q]$.

Asymptotami wykresu funkcji $f(x) = \frac{r}{x-p} + q$ są proste o równaniach:

$x = p$ – asymptota pionowa

$y = q$ – asymptota pozioma

Zauważmy, że funkcja nie jest określona dla $x = p$ i właśnie prosta o równaniu $x = p$ jest asymptotą pionową. Podobnie funkcja nie przyjmuje wartości $y = q$ i prosta $y = q$ jest asymptotą poziomą.

Przykład 1

Zastanowimy się, czy poniższe funkcje wymierne są przykładami funkcji homograficznych:

1. $f(x) = \frac{-10}{x}$

2. $f(x) = \frac{4x}{x+3}$

3. $f(x) = \frac{-2x+7}{-5x}$

4. $f(x) = \frac{4x+13}{-7x+8}$

Rozwiązanie:

Aby sprawdzić, czy podane funkcje wymierne są przykładami funkcji homograficznych musimy odczytać wartości współczynników i sprawdzić warunki zapisane w definicji.

1. Tak, ponieważ $c = 1 \neq 0$ i $0 \cdot 0 - 1 \cdot (-10) \neq 0$.
2. Tak, ponieważ $c = 1 \neq 0$ i $4 \cdot 3 - 1 \cdot 0 \neq 0$.
3. Tak, ponieważ $c = -5 \neq 0$ i $-2 \cdot 0 - (-5) \cdot 7 \neq 0$.
4. Tak, ponieważ $c = -7 \neq 0$ i $4 \cdot 8 - (-7) \cdot 13 \neq 0$.

Przykład 2

Pokażemy, dlaczego poniższe przykłady funkcji wymiernych **nie są** przykładami funkcji homograficznych:

1. $f(x) = \frac{-6x+2}{3}$
2. $f(x) = \frac{5x+15}{x+3}$

Rozwiązanie:

1. Nie jest to funkcja homograficzna, ponieważ $c = 0$
2. Nie jest to funkcja homograficzna, ponieważ $5 \cdot 3 - 1 \cdot 15 = 0$

Przykład 3

Wyznamy dziedziny podanych funkcji homograficznych:

1. $f(x) = \frac{-5}{x}$
2. $f(x) = \frac{2x}{x+5}$
3. $f(x) = \frac{-2x-2}{-x+2}$
4. $f(x) = \frac{3x+1}{-2x+8}$

Rozwiązanie:

1. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
2. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-5\}$
3. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$
4. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{4\}$

Przykład 4

Przekształćmy wzór funkcji $f(x) = \frac{-x+5}{x-3}$ do postaci kanonicznej oraz narysujemy wykres tej funkcji.

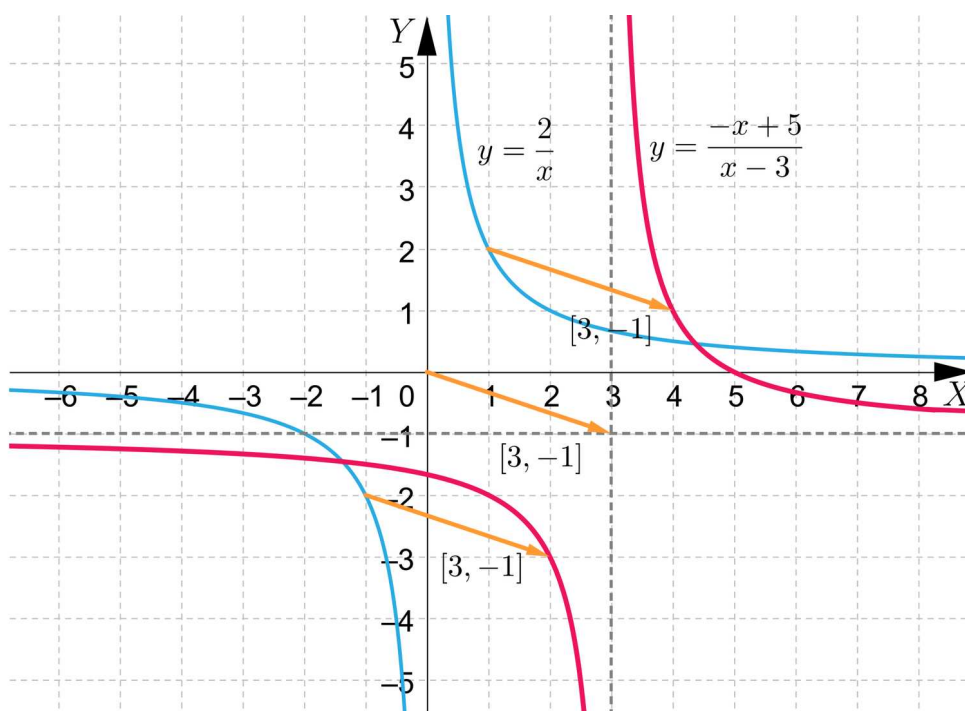
Rozwiązanie:

Postać kanoniczna:

$$f(x) = \frac{-x+5}{x-3} = \frac{-(x-3)+2}{x-3} = -1 + \frac{2}{x-3}$$

zatem, najpierw należy narysować wykres funkcji $g(x) = \frac{2}{x}$, a następnie przesunąć o wektor $[3, -1]$.

Wykres funkcji:



Przykład 5

Wyznamy wszystkie punkty o obu współrzędnych całkowitych należące do wykresu funkcji homograficznej $f(x) = \frac{4x-6}{x-1}$.

Rozwiązanie:

Przekształćmy wzór funkcji $f(x) = \frac{4x-6}{x-1}$ do postaci kanonicznej:

$$f(x) = \frac{4x-6}{x-1} = \frac{4(x-1)-2}{x-1} = 4 - \frac{2}{x-1}$$

Ponieważ 4 jest liczbą całkowitą, wartość funkcji $f(x)$ będzie liczbą całkowitą, jeśli wyrażenie $\frac{2}{x-1}$ będzie liczbą całkowitą. Zatem $x-1$ musi być dzielnikiem liczby 2, czyli:

$$x - 1 = 2$$

lub

$$x - 1 = 1$$

lub

$$x - 1 = -2$$

lub

$$x - 1 = -1,$$

zatem $x \in \{-1, 0, 2, 3\}$.

Odpowiedź:

Punkty o obu współrzędnych całkowitych należące do wykresu funkcji f , to:
 $(-1, 5), (0, 6), (2, 2), (3, 3)$.

Przykład 6

Wyznamy równania osi symetrii oraz współrzędne środka symetrii wykresu funkcji $f(x) = \frac{3x+4}{x+2}$.

Rozwiązanie:

Przekształcimy wzór funkcji $f(x) = \frac{3x+4}{x+2}$ do postaci kanonicznej:

$$f(x) = \frac{3x+4}{x+2} = \frac{3(x+2)-2}{x+2} = 3 - \frac{2}{x+2}$$

Wykres funkcji $f(x) = \frac{3x+4}{x+2}$ powstaje w wyniku przesunięcia wykresu funkcji $g(x) = -\frac{2}{x}$ o wektor $[-2, 3]$.

Wykres funkcji $g(x) = -\frac{2}{x}$ posiada osie symetrii o równaniach: $y = x$ oraz $y = -x$.

Wraz z przesunięciem wykresu funkcji, przesuwają się również jego osie symetrii, czyli osie symetrii wykresu funkcji f mają wzory:

$$y = (x + 2) + 3 = x + 5$$

$$y = -(x + 2) + 3 = -x + 1$$

Środek symetrii jest punktem przecięcia się asymptot wykresu funkcji, czyli ma współrzędne $(-2, 3)$.

Odpowiedź:

Równania osi symetrii:

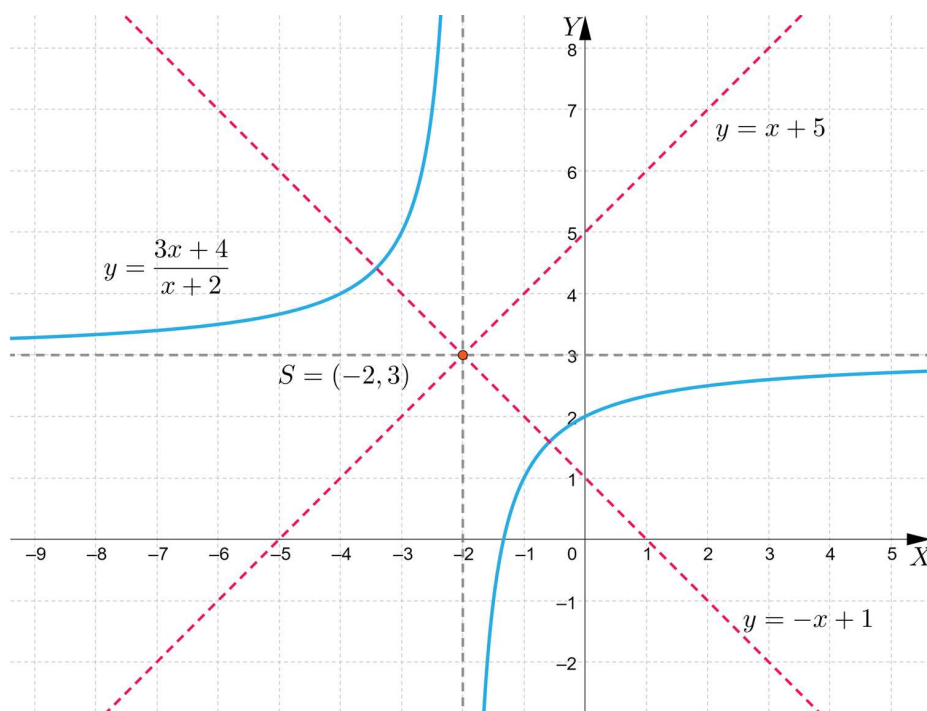
$$y = x + 5$$

$$y = -x + 1$$

Współrzędne środka symetrii:

$$S = (-2, 3)$$

Poniższy rysunek przedstawia wykres funkcji $f(x) = \frac{3x+4}{x+2}$ oraz środek symetrii i osie symetrii wykresu.



Przykład 7

Udowodnimy, że funkcja $f(x) = \frac{2x-1}{x-1}$, $x \neq 1$ jest malejąca w zbiorze $(-\infty, 1)$.

Rozwiązanie:

Założenie:

$$f(x) = \frac{2x-1}{x-1}, D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}, x_1, x_2 \in (-\infty, 1) \text{ i } x_1 < x_2$$

Teza:

$$f(x_1) > f(x_2)$$

Dowód:

Zbadamy znak różnicy wartości funkcji f dla argumentów $x_1, x_2 \in (-\infty, 1)$:

$$f(x_1) - f(x_2) = \frac{2x_1-1}{x_1-1} - \frac{2x_2-1}{x_2-1} = \frac{(2x_1-1)(x_2-1)}{(x_1-1)(x_2-1)} - \frac{(2x_2-1)(x_1-1)}{(x_1-1)(x_2-1)} =$$

$$= \frac{2x_1x_2-2x_1-x_2+1-2x_1x_2+x_1+2x_2-1}{(x_1-1)(x_2-1)} = \frac{-(x_1-x_2)}{(x_1-1)(x_2-1)} > 0$$

Uzasadnienie:

- $x_1 - x_2 < 0$ z założenia, ponieważ $x_1 < x_2$
- $-(x_1 - x_2) > 0$ ponieważ iloczyn dwóch liczb ujemnych jest liczbą dodatnią
- $x_1 - 1 < 0$ z założenia, ponieważ $x_1 < 1$
- $x_2 - 1 < 0$ z założenia, ponieważ $x_2 < 1$
- $(x_1 - 1)(x_2 - 1) > 0$, ponieważ iloczyn dwóch liczb ujemnych jest liczbą dodatnią
- $\frac{-(x_1-x_2)}{(x_1-1)(x_2-1)} > 0$, ponieważ iloraz dwóch liczb dodatnich jest liczbą dodatnią

Otrzymaliśmy nierówność $f(x_1) - f(x_2) > 0$. Zatem funkcja jest malejąca, ponieważ $f(x_1) > f(x_2)$, co należało udowodnić.

Słownik

funkcja wymierna

funkcja $f(x) = \frac{W_1(x)}{W_2(x)}$, gdzie $W_1(x)$, $W_2(x)$ są wielomian i $W_2(x) \neq 0$

asymptota krzywej

prosta jest asymptotą danej krzywej, jeśli dla punktu oddalającego się nieograniczenie wzdłuż krzywej odległość tego punktu od prostej dąży do zera. Asymptota funkcji to asymptota krzywej stanowiącej wykres funkcji

Galeria zdjęć interaktywnych

Polecenie 1

Zapoznaj się z zadaniem i jego rozwiązaniem zawartym w galerii zdjęć interaktywnych. Na ich podstawie wykonaj polecenie 2 i 3.

Polecenie 2

Funkcja $f(x) = \frac{\frac{1}{3}x+2}{cx+12}$ jest:

funkcją stałą

$c = 0$

funkcją homograficzną

$c = 2$

funkcją liniową

dla $c \in \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$

Polecenie 3

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Wskaż wzory funkcji homograficznych.

☐ $f(x) = \frac{-x+5}{2}$

☐ $f(x) = \frac{x+7}{x-1}$

☐ $f(x) = \frac{2x-6}{x}$

☐ $f(x) = \frac{x+1}{2x+2}$

Ćwiczenie 2



Połącz w pary funkcję homograficzną i jej dziedzinę.

$f(x) = \frac{x+7}{x+1}$

$\mathbb{R} \setminus \{1\}$

$f(x) = \frac{2x-2}{-x-6}$

$\mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$f(x) = \frac{x-2}{2x-12}$

$\mathbb{R} \setminus \{6\}$

$f(x) = \frac{3x-2}{-3x+3}$

$\mathbb{R} \setminus \{-6\}$

Ćwiczenie 3



Postać kanoniczna funkcji $f(x) = \frac{3x-2}{x-2}$ to:

☐ $f(x) = \frac{3}{x-2} + 4$

☐ $f(x) = \frac{-8}{x-2} + 3$

☐ $f(x) = \frac{-4}{x-2} + 3$

☐ $f(x) = \frac{4}{x-2} + 3$

Ćwiczenie 4



Ile punktów, o obu współrzędnych całkowitych, należy do wykresu funkcji $f(x) = \frac{-3x-2}{x+2}$?

☐ 3

☐ nieskończenie wiele

☐ 2

☐ 6

Ćwiczenie 5



Dopasuj równania asymptot wykresów funkcji do ich wzorów.

$$f(x) = \frac{3x-6}{x+1}$$

$x = 3$

$x = -1$

$y = -1$

$y = 3$

$$f(x) = \frac{-x+2}{x-3}$$

Ćwiczenie 6



Środkiem symetrii wykresu funkcji $f(x) = \frac{3x+3}{x+2}$ jest punkt:

☐ $(2, -3)$

☐ $(-2, 3)$

☐ $(-2, -3)$

☐ $(2, 3)$

Ćwiczenie 7



Wyznacz równania osi symetrii wykresu funkcji $f(x) = \frac{-2x+3}{x-1}$.

Ćwiczenie 8



Wykaż, że funkcja $f(x) = \frac{x-2}{x+1}$ jest rosnąca w przedziale $(-\infty, -1)$.

Dla nauczyciela

Autor: Gabriela Pendyk

Przedmiot: Matematyka

Temat: Funkcja homograficzna

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

V. Funkcje. Zakres podstawowy.

Uczeń:

13) posługuje się funkcją $f(x) = \frac{a}{x}$, w tym jej wykresem, do opisu i interpretacji zagadnień związanych z wielkościami odwrotnie proporcjonalnymi, również w zastosowaniach praktycznych;

Zakres rozszerzony.

Uczeń:

3) dowodzi monotoniczności funkcji zadanej wzorem, jak w przykładzie: wykaż, że funkcja $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$ jest monotoniczna w przedziale $(-\infty, -2)$.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- podaje definicję funkcji homograficznej;
- rozróżnia funkcje homograficzne;
- wyznacza dziedzinę funkcji homograficznej;
- rysuje wykres funkcji homograficznej;

- przekształca wzór funkcji homograficznej z postaci ogólnej do postaci kanonicznej;
- wyznacza równania osi symetrii wykresu funkcji homograficznej oraz współrzędne środka symetrii wykresu;
- wyznacza równania asymptot wykresu funkcji homograficznej.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm.

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona klasa;
- dyskusja.

Formy pracy:

- praca w parach;
- praca indywidualna;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu dla uczniów;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji:

Przed lekcją:

- Uczniowie zapoznają się z sekcjami „Wprowadzenie” oraz „Przeczytaj”.

Faza wstępna:

1. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć.
2. Nauczyciel zadaje uczniom pytania dotyczące ich aktualnego stanu wiedzy w zakresie poruszanej tematyki.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie pracują w parach. Każda z par zapoznaje się z galerią zdjęć interaktywnych dotyczących funkcji homograficznej.
2. Uczniowie wspólnie wykonują polecenia.
3. Następnie w grupach 4-osobowych rozwiązują ćwiczenia 1 – 8 z sekcji „Sprawdź się”. Rozwiązania przedstawiają wspólnie podczas rozmowy z całą klasą. Nauczyciel komentuje rozwiązania, pozostali uczniowie zgłaszają ewentualne uwagi.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Nauczyciel prosi wskazanych uczniów o podanie, czego dotyczyła lekcja oraz jakie umiejętności zdobyli podczas lekcji

Praca domowa:

- Uczniowie mają za zadanie przygotować zadania do rozwiązania dla koleżanki lub kolegi z ławki, analogiczne do ćwiczeń 3 i 5 z sekcji „Sprawdź się”. Następnie wymieniają się zadaniami mailowo, rozwiązują i porównują swoje wyniki.

Materiały pomocnicze:

- Wykresy funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$

Wskazówki metodyczne:

- Galerię zdjęć interaktywnych można wykorzystać podczas powtórzenia wiadomości o funkcji wymiernej.