



Dyskusja liczby rozwiązań równania kwadratowego zupełnego z parametrem

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Galeria zdjęć interaktywnych](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Dyskusja liczby rozwiązań równania kwadratowego zupełnego z parametrem

Źródło: dostępny w internecie: pixabay.com, domena publiczna.

Parametry w równaniach stosujemy w celu uogólnienia zadania i jego rozwiązania.

Parametry w matematyce najczęściej oznacza się początkowymi literami alfabetu (a , b) lub literami m , n , p , s . Końcowe litery alfabetu często używane są jako zmienne, choć nie jest to regułą.

W tym materiale zajmiemy się dyskusją liczby rozwiązań równania kwadratowego zupełnego z parametrem. Zwrócimy szczególną uwagę na założenia związane ze współczynnikiem występującym przy najwyższej potędze niewiadomej. Jeżeli współczynnik przy x^2 będzie równy zero, wówczas otrzymamy równanie liniowe.

Twoje cele

- Zbadasz liczbę rozwiązań równania w zależności od parametru występującego w równaniu.
- Znajdziesz wszystkie takie wartości rzeczywiste parametru, aby rozwiązania równania spełniały określony warunek.

Przeczytaj

Równanie kwadratowe zupełne – jest to równanie postaci:

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

gdzie:

a, b i c – są dowolnymi liczbami rzeczywistymi różnymi od zera.

Liczba rozwiązań równania kwadratowego zupełnego jest uzależniona od znaku wyróżnika trójmianu kwadratowego, zwanego deltą.

Twierdzenie: Liczba rozwiązań równania kwadratowego

Rozważmy równanie kwadratowe $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$.

1. Jeżeli $\Delta > 0$, to równanie ma dwa pierwiastki:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

2. Jeżeli $\Delta = 0$, to równanie ma jeden pierwiastek, nazwany podwójnym pierwiastkiem:

$$x_0 = \frac{-b}{2a}.$$

3. Jeżeli $\Delta < 0$, to równanie nie ma pierwiastków.

Dlatego w rozwiązywaniu zadań dotyczących analizy liczby rozwiązań równania rozpatrujemy znak wyróżnika trójmianu kwadratowego.

Aby pierwiastki **równania kwadratowego zupełnego** były określonego znaku, dodajemy jeszcze warunki związane ze wzorami Viète'a.

Równanie kwadratowe ma dwa pierwiastki **jednakowych znaków** wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są następujące warunki:

$$\begin{cases} 1. \Delta \geq 0 \\ 2. x_1 \cdot x_2 > 0 \end{cases}$$

Równanie kwadratowe ma dwa pierwiastki **różnych znaków** wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są następujące warunki:

$$\begin{cases} 1. \Delta > 0 \\ 2. x_1 \cdot x_2 < 0 \end{cases}$$

Równanie kwadratowe ma dwa różne pierwiastki **ujemne** wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są warunki:

$$\begin{cases} 2. \Delta > 0 \\ 3. x_1 \cdot x_2 > 0 \\ 4. x_1 + x_2 < 0 \end{cases}$$

Równanie kwadratowe ma dwa różne pierwiastki **dodatnie** wtedy i tylko wtedy gdy, spełnione są warunki:

$$\begin{cases} 2. \Delta > 0 \\ 3. x_1 \cdot x_2 > 0 \\ 4. x_1 + x_2 > 0 \end{cases}$$

Przykład 1

Wyznamy takie wartości parametru m , dla których równanie kwadratowe $(m - 2)x^2 + 2mx + (m + 3) = 0$ ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste.

Rozwiązanie

Najpierw ustalimy, dla jakich wartości parametru m równanie jest kwadratowe.

Aby równanie było kwadratowe: $m - 2 \neq 0 \Rightarrow m \neq 2$.

Aby równanie miało dwa różne pierwiastki rzeczywiste $\Delta > 0$.

Wyznamy wyróżnik trójkianu:

$$\Delta = (2m)^2 - 4 \cdot (m - 2)(m + 3) = 4m^2 - 4 \cdot (m^2 + 3m - 2m - 6) =$$

Zatem:

$$= 4m^2 - 4m^2 - 4m + 24 = -4m + 24$$

$$-4m + 24 > 0$$

$$-4m > -24$$

$$m < 6$$

Czyli $\begin{cases} m \in \mathbb{R} \setminus \{2\} \\ m \in (-\infty, 6) \end{cases}$.

Zatem, aby równanie miało dwa różne pierwiastki rzeczywiste, musi zachodzić warunek $m \in (-\infty, 2) \cup (2, 6)$.

Przykład 2

Ustalimy liczbę pierwiastków równania $zx^2 - 4x - 1 = 0$ w zależności od parametru z .

Rozwiązanie

1. Jeżeli $z = 0$ równanie jest liniowe. Obliczymy teraz rozwiązanie tego równania.

$$0 \cdot x^2 - 4x - 1 = 0$$

$$-4x = 1$$

$$x = -\frac{1}{4}$$

Czyli dla $z = 0$ równanie liniowe ma jedno rozwiązanie.

2. Jeżeli $z \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ równanie jest kwadratowe.

$$zx^2 - 4x - 1 = 0$$

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot z \cdot (-1) = 16 + 4z.$$

1. Aby równanie kwadratowe miało dwa rozwiązania $\Delta > 0$.

$$16 + 4z > 0$$

$$4z > -16$$

$$z > -4$$

$$z \in (-4, 0) \cup (0, \infty).$$

2. Aby równanie kwadratowe miało jedno rozwiązanie $\Delta = 0$, czyli $z = -4$.

3. Aby równanie kwadratowe nie posiadało rozwiązań $\Delta < 0$, czyli $z < -4$.

$$z \in (-\infty, -4).$$

Odpowiedź:

Równanie $zx^2 - 4x - 1 = 0$ ma:

- dwa rozwiązania dla $z \in (-4, 0) \cup (0, \infty)$,
- jedno rozwiązanie dla $z \in \{-4, 0\}$,
- nie posiada rozwiązań dla $z \in (-\infty, -4)$.

Przykład 3

Obliczymy, dla jakich wartości parametru m równanie $(m + 3)x^2 + 2x + (m - 2) = 0$ ma dokładnie jedno rozwiązanie.

Rozwiązanie

1. Dla $m + 3 = 0$, czyli $m = -3$, równanie jest liniowe.

$$2x + (-3 - 2) = 0$$

$$2x - 5 = 0$$

$$2x = 5$$

$$x = \frac{5}{2}$$

Równanie ma dokładnie jedno rozwiązanie.

2. Jeżeli $m \neq -3$, to otrzymujemy równanie kwadratowe, które ma jedno rozwiązanie, jeżeli $\Delta = 0$.

$$(m+3)x^2 + 2x + (m-2) = 0$$

$$\Delta = 4 - 4 \cdot (m+3)(m-2) = 4 - 4 \cdot (m^2 - 2m + 3m - 6) = \\ = 4 - 4m^2 - 4m + 24 = -4m^2 - 4m + 28$$

$$\Delta = 0 \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy: } -4m^2 - 4m + 28 = 0 \mid : (-4)$$

$$m^2 + m - 7 = 0$$

$$\Delta_m = 1 - 4 \cdot (-7) = 29 \Rightarrow \sqrt{\Delta_m} = \sqrt{29}$$

$$m_1 = \frac{-1 - \sqrt{29}}{2}$$

$$m_2 = \frac{-1 + \sqrt{29}}{2}$$

$$\text{Równanie ma jedno rozwiązanie dla } m \in \left\{ -3, \frac{-1 - \sqrt{29}}{2}, \frac{-1 + \sqrt{29}}{2} \right\}.$$

Przykład 4

Wyznamy takie wartości parametru m , dla których suma odwrotności dwóch pierwiastków równania $mx^2 + (m-1)x + 3 = 0$ jest równa 1.

Rozwiązanie

Równanie musi spełniać warunki:

$$1. a \neq 0$$

$$2. \Delta \geq 0$$

$$3. \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 1$$

$$1. a \neq 0 \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } m \neq 0$$

$$2. \Delta = (m-1)^2 - 4 \cdot m \cdot 3 = m^2 - 2m + 1 - 12m = m^2 - 14m + 1 \\ m^2 - 14m + 1 \geq 0$$

$$\Delta_m = (-14)^2 - 4 \cdot 1 = 196 - 4 = 192$$

$$\sqrt{\Delta_m} = 8\sqrt{3}$$

$$m_1 = \frac{14 - 8\sqrt{3}}{2} = 7 - 4\sqrt{3}$$

$$m_2 = \frac{14 + 8\sqrt{3}}{2} = 7 + 4\sqrt{3}$$

$$m \in \left(-\infty, 7 - 4\sqrt{3} \right) \cup \left(7 + 4\sqrt{3}, \infty \right).$$

$$3. \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_2 + x_1}{x_1 \cdot x_2} = \frac{\frac{-b}{a}}{\frac{c}{a}} = -\frac{b}{c}$$

$$\frac{-(m-1)}{3} = 1$$

$$m - 1 = -3$$

$$m = -2.$$

Uwzględniając rozwiązane warunków (1), (2) i (3) otrzymujemy: dla $m = -2$ suma odwrotności pierwiastków równania jest równa 1.

Przykład 5

Wyznamy wartości parametru p , dla których równanie $(1 - p)x^2 - 2px + p + 3 = 0$ ma dwa różne pierwiastki ujemne.

Rozwiązanie

Równanie ma dwa różne pierwiastki ujemne wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są warunki:

$$\begin{cases} 1. a \neq 0 \\ 2. \Delta > 0 \\ 3. x_1 \cdot x_2 > 0 \\ 4. x_1 + x_2 < 0 \end{cases}.$$

$$\begin{aligned} 1. a &= 1 - p \\ 1 - p &\neq 0 \\ p &\neq 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \Delta &= (-2p)^2 - 4 \cdot (1 - p)(p + 3) = 4p^2 - 4 \cdot (p + 3 - p^2 - 3p) = \\ &= 4p^2 + 8p - 12 + 4p^2 = 8p^2 + 8p - 12 \end{aligned}$$

$$\Delta > 0 \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy: } 8p^2 + 8p - 12 > 0$$

$$2p^2 + 2p - 3 > 0$$

$$\Delta_p = 4 - 4 \cdot 2 \cdot (-3) = 4 + 24 = 28$$

$$\sqrt{\Delta_p} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$$

$$p_1 = \frac{-2-2\sqrt{7}}{4} = \frac{-1-\sqrt{7}}{2}$$

$$p_2 = \frac{-2+2\sqrt{7}}{4} = \frac{-1+\sqrt{7}}{2}$$

$$p \in \left(-\infty, \frac{-1-\sqrt{7}}{2}\right) \cup \left(\frac{-1+\sqrt{7}}{2}, \infty\right).$$

$$3. x_1 \cdot x_2 > 0$$

$$\frac{p+3}{1-p} > 0 \mid \cdot (1-p)^2, p \neq 1$$

$$(p+3)(1-p) > 0$$

$$p = -3 \vee p = 1$$

$$p \in (-3, 1).$$

$$4. x_1 + x_2 < 0$$

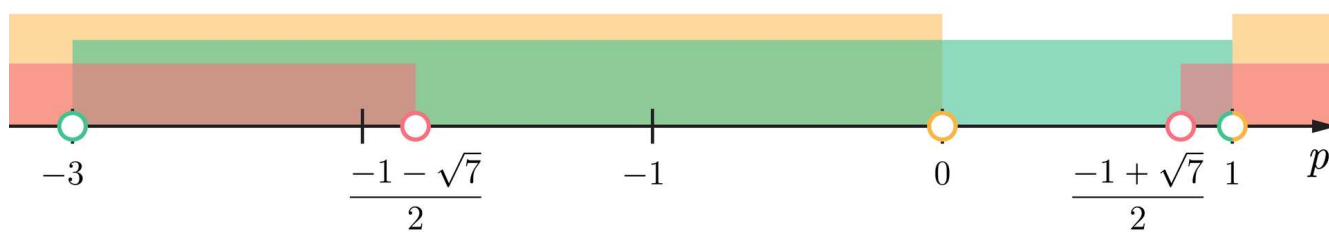
$$\frac{2p}{1-p} < 0 \mid \cdot (1-p)^2$$

$$2p(1-p) < 0$$

$$p = 0 \text{ lub } p = 1$$

$$p \in (-\infty, 0) \cup (1, \infty).$$

Znajdujemy część wspólną zbioru rozwiązań (1), (2), (3), (4).



Ostatecznie: $p \in \left(-3, \frac{-1-\sqrt{7}}{2}\right)$.

Słownik

równanie kwadratowe zupełne

równanie postaci:

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

gdzie:

a, b i c – są dowolnymi liczbami rzeczywistymi różnymi od zera

Galeria zdjęć interaktywnych

Polecenie 1

Zapoznaj się z galerią zdjęć interaktywnych i przeanalizuj przedstawiony w niej sposób przeprowadzenia dyskusji istnienia i liczby rozwiązań równania kwadratowego w zależności od parametru k oraz pokazującą wzór i wykres funkcji $f(k)$ przyporządkowującej parametrowi k liczbę rozwiązań równania.

Polecenie 2

Dla jakich wartości parametru k równanie $(k^2 - 1)x^2 + (2k - 1)x + 1 = 0$ ma dwa różne rozwiązania?

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Zaznacz wszystkie poprawne odpowiedzi. Równanie $(z^2 - 4)x^2 - 2zx + z^2 - 1 = 0$ nie jest równaniem kwadratowym dla

☐ $z = -2$

☐ $z = -1$

☐ $z = 2$

☐ $z = 1$

Ćwiczenie 2



Przeciągnij w wyznaczone miejsce odpowiedni znak nierówności.

Aby równanie kwadratowe $mx^2 + (m - 2)x + 3 = 0$ miało co najmniej jedno rozwiązanie:

m $8 - 2\sqrt{15}$ lub m $8 + 2\sqrt{15}$

$\geq$ $<$ $=$ $\leq$ $>$

Ćwiczenie 3



Ćwiczenie 4



Zaznacz wszystkie poprawne liczby. Równanie $(z^2 - 9)x^2 - 2\sqrt{3}zx - 1 = 0$ ma dokładnie jedno rozwiązanie dla parametru z równego:

☐ 3☐ 1☐ -3☐ -1☐ $-\frac{3}{2}$ ☐ $\frac{3}{2}$

Ćwiczenie 5



Ćwiczenie 6



Zaznacz poprawną odpowiedź. Równanie $px^2 + 2x - 4 = 0$ ma dwa różne rozwiązania dla:

☐ $p \in (-\infty, -\frac{1}{4})$ ☐ $p \in (-\frac{1}{4}, 0) \cup (0, \infty)$ ☐ $p \in (0, \infty)$ ☐ $p \in (-\frac{1}{4}, \infty)$

Ćwiczenie 7



Dla jakich wartości parametru p równanie $(p^2 - 4)x^2 + 3x + 1 = 0$ ma dwa różne pierwiastki dodatnie? Połącz warunek z rozwiązaniem.

$$a \neq 0$$

$$p \in (-\infty, -2) \cup (2, \infty)$$

$$\Delta > 0$$

$$p \in \left(-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$$

$$x_1 \cdot x_2 > 0$$

$$p \in (-2, 2)$$

$$x_1 + x_2 > 0$$

$$p \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$$

Ćwiczenie 8



Dla jakich wartości parametru m równanie $|x^2 - 4| = m^2 + 2$ ma dwa różne rozwiązania?

Dla nauczyciela

Autor: Jolanta Schilling

Przedmiot: Matematyka

Temat: Dyskusja liczby rozwiązań równania kwadratowego zupełnego z parametrem

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

III. Równania i nierówności. Zakres rozszerzony.

Uczeń:

5) analizuje równania i nierówności liniowe z parametrami oraz równania i nierówności kwadratowe z parametrami, w szczególności wyznacza liczbę rozwiązań w zależności od parametrów, podaje warunki, przy których rozwiązania mają żądaną własność, i wyznacza rozwiązania w zależności od parametrów.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje w zakresie wielojęzyczności
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- bada liczbę rozwiązań równania w zależności od parametru występującego w równaniu
- przeprowadza rozumowania związane z analizą równania kwadratowego zupełnego z parametrem
- formułuje wnioski i uzasadnia ich poprawność

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- śnieżna kula
- dyskusja
- rozmowa nauczająca z wykorzystaniem animacji

Formy pracy:

- praca indywidualna
- praca w parach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami i dostępem do Internetu, słuchawki
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć oraz wspólnie z uczniami ustala kryteria sukcesu.
2. Uczniowie przypominają sobie w grupach wiadomości i umiejętności związane ze sposobami rozwiązywania równań kwadratowych.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie pracują w grupach metodą śnieżnej kuli. Najpierw wymieniają się między sobą wiadomościami dotyczącymi sposobów rozwiązań równania kwadratowego zupełnego, które przypomnieli w domu. Następnie łączą się w grupy 4 osobowe omawiają przykłady z sekcji „Przeczytaj”.
2. Uczniowie oglądają galerię zdjęć interaktywnych i analizują dyskutując liczbę rozwiązań równania kwadratowego zupełnego z parametrem.
3. Uczniowie w parach wykonują ćwiczenia interaktywne wskazane przez nauczyciela. Wspólnie omawiają odpowiedzi.

Faza podsumowująca:

1. Jako podsumowanie nauczyciel zadaje uczniom pytania dotyczące ćwiczeń interaktywnych.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, udzielając im tym samym informacji zwrotnej.

Praca domowa:

Uczniowie rozwiązują Przykład 2 umieszczony pod galerią zdjęć interaktywnych.

Materiały pomocnicze:

[Równanie kwadratowe](#)

Wskazówki metodyczne:

Przykłady zawarte w galerii zdjęć interaktywnych uczniowie mogą potraktować jako materiał powtórzeniowy. Galeria zdjęć interaktywnych może posłużyć jako przykład zastosowania wykresu funkcji.