Wzór Herona

Wzór Herona

Źródło: Ryan Geller on Unsplash, domena publiczna.

Heron z Aleksandrii, zwany też Heronem Mechanikiem, żył ok. I wieku n.e. Zajmował się geodezją, optyką, hydrostatyką. Opisał urządzenia poruszane siłą powietrza lub pary wodnej. Wynalazł m.in. mechanizm, dzięki któremu automatycznie otwierały się drzwi świątyni, gdy zapalano ogień na ołtarzu. Jego najważniejsze osiągnięciami w zakresie matematyki to: wzór na pole trójkąta, przybliżone obliczenia pierwiastków kwadratowych i sześciennych oraz wzory na objętość i pole wielu figur geometrycznych.

Twoje cele

- Udowodnisz wzór Herona.
- Zastosujesz wzór Herona do obliczania pola trójkąta.
- Określisz pole trójkąta różnymi sposobami.
- Znajdziesz wysokość trójkąta o bokach danej długości.

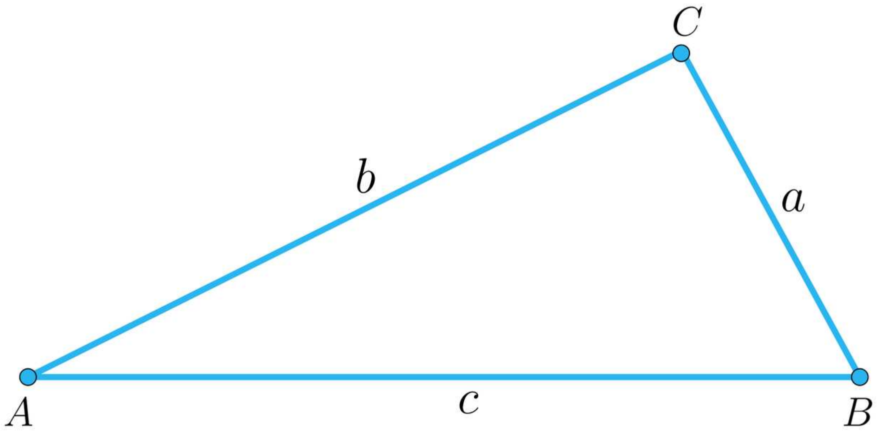
Przeczytaj

Wzór Herona pozwala obliczyć pole trójkąta, gdy znane są długości jego boków.

Wzór ten ma duże znaczenie praktyczne, pozwala obliczyć pole trójkąta bez znajomości jego wysokości. Jest to bardzo przydatne przy wyznaczaniu pola powierzchni gruntów.

Wzór Herona:

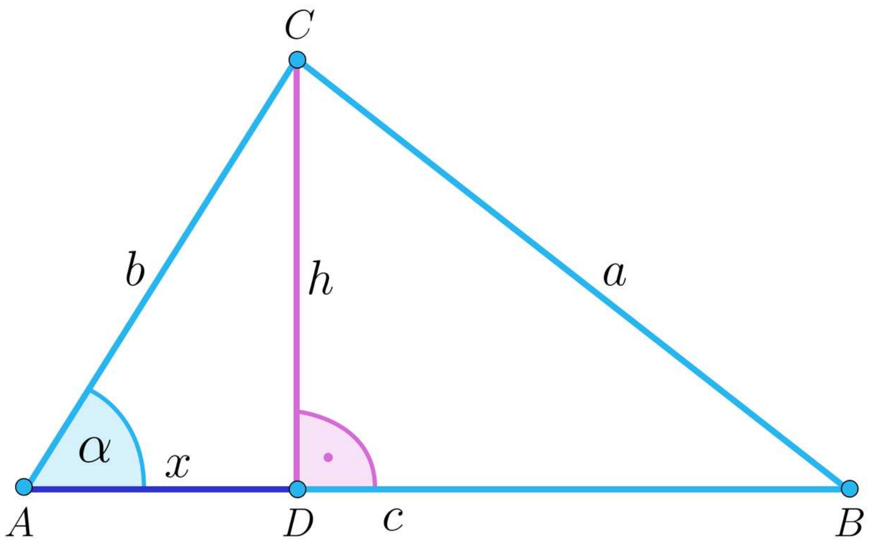
$$P = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$



gdzie:
a, b, c – długości boków trójkąta, $2p = a + b + c$, P - pole trójkąta.

Wyprowadzenie wzoru Herona

Dany jest dowolny trójkąt ABC:



$|AB| = c$,

$|BC| = a,$

$|AC| = b,$

$|AD| = x,$

$|CD| = h.$

Wykorzystamy wzór na pole trójkąta postaci:

$$P = \frac{1}{2}c \cdot h.$$

Trójkąt ADC jest prostokątny, zatem:

$$\frac{x}{b} = \cos \alpha,$$

$$x = b \cdot \cos \alpha.$$

Z twierdzenia Pitagorasa:

$$x^2 + h^2 = b^2,$$

$$h^2 = b^2 - x^2,$$

$$P = \frac{1}{2}c \cdot h,$$

$$2P = c \cdot h,$$

$$4P^2 = c^2h^2.$$

Podstawiając $h^2 = b^2 - x^2$ do wzoru $4P^2 = c^2h^2$ otrzymujemy:

$$4P^2 = c^2\left(b^2 - x^2\right) = c^2b^2 - c^2x^2.$$

Z twierdzenia cosinusów, dla trójkąta ABC:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha.$$

Ponieważ $x = b \cdot \cos \alpha$, to:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2cx,$$

$$2cx = b^2 + c^2 - a^2.$$

Podnosimy obie strony tego wyrażenia do kwadratu:

$$4c^2x^2 = \left(b^2 + c^2 - a^2\right)^2,$$

$$4P^2 = c^2b^2 - c^2x^2.$$

Mnożąc stronami przez 4 otrzymujemy:

$$16P^2 = 4c^2b^2 - 4c^2x^2.$$

Podstawiając:

$$4c^2x^2 = \left(b^2 + c^2 - a^2\right)^2,$$

otrzymujemy:

$$16P^2 = 4c^2b^2 - \left(b^2 + c^2 - a^2\right)^2.$$

Zapiszmy prawą stronę tej równości w postaci różnicy kwadratów:

$$4c^2b^2 - \left(b^2 + c^2 - a^2\right)^2 = (2cb)^2 - \left(b^2 + c^2 - a^2\right)^2.$$

Korzystając ze wzoru skróconego mnożenia na różnicę kwadratów otrzymujemy:

$$(2cb)^2 - \left(b^2 + c^2 - a^2\right)^2 = \left(2cb - \left(b^2 + c^2 - a^2\right)\right)\left(2cb + \left(b^2 + c^2 - a^2\right)\right).$$

Po podstawieniu:

$$16P^2 = \left(2cb - \left(b^2 + c^2 - a^2\right)\right)\left(2cb + \left(b^2 + c^2 - a^2\right)\right).$$

Pierwsze wyrażenie po prawej stronie zapiszemy jako:

$$2cb - \left(b^2 + c^2 - a^2\right) = 2cb - b^2 - c^2 + a^2 =$$

$$= a^2 - \left(b^2 - 2cb + c^2\right) = a^2 - (b - c)^2.$$

Drugie wyrażenie po prawej stronie zapiszemy jako:

$$2cb + \left(b^2 + c^2 - a^2\right) = 2cb + b^2 + c^2 - a^2 =$$

$$= \left(b^2 + 2bc + c^2\right) - a^2 = (b + c)^2 - a^2.$$

Otrzymujemy zatem:

$$16P^2 = \left(a^2 - (b - c)^2\right)\left((b + c)^2 - a^2\right).$$

Przekształcamy do postaci:

$$a^2 - (b - c)^2 = (a - (b - c))(a + (b - c)) = (a - b + c)(a + b - c),$$

$$(b + c)^2 - a^2 = ((b + c) - a)((b + c) + a) = (b + c - a)(b + c + a).$$

Otrzymujemy:

$$16P^2 = (a-b+c)(a+b-c)(b+c-a)(b+c+a).$$

Ponieważ $2p = a+b+c$, zapisujemy wyrażenia w nawiasach następująco:

$$(a-b+c) = a+b+c-2b = 2p-2b = 2(p-b),$$

$$(a+b-c) = a+b+c-2c = 2p-2c = 2(p-c),$$

$$(b+c-a) = a+b+c-2a = 2p-2a = 2(p-a).$$

Po podstawieniu otrzymujemy:

$$16P^2 = 2(p-b)\cdot 2(p-c)\cdot 2(p-a)\cdot 2p,$$

$$16P^2 = 16p(p-a)(p-b)(p-c),$$

$$P^2 = p(p-a)(p-b)(p-c).$$

Otrzymujemy ostateczny wzór:

$$P = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Przy wyprowadzeniu wzoru skorzystaliśmy ze wzorów skróconego mnożenia:

$$v^2 - z^2 = (v-z)(v+z),$$

$$(v-z)^2 = v^2 - 2vz + z^2,$$

$$(v+z)^2 = v^2 + 2vz + z^2.$$

Przykład 1

Obliczmy pole trójkąta, którego boki mają długości 6, 8, 12.

Rozwiązanie:

Oznaczmy:

$a = 6, b = 8, c = 12.$

Otrzymujemy:

$a + b + c = 2p,$

$6 + 8 + 12 = 26,$

$2p = 26$, stąd $p = 13$.

Podstawiamy do wzoru: $P = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$

$P = \sqrt{13(13-6)(13-8)(13-12)} = \sqrt{13 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 1} = \sqrt{455}.$

Odpowiedź:

Pole trójkąta wynosi $\sqrt{455}$.

Przykład 2

Obliczymy długość promienia okręgu wpisanego w trójkąt o bokach długości $a = 15$, $b = 17$ i $c = 20$.

Rozwiązanie:

Skorzystamy ze wzoru: $P = p \cdot r$, gdzie:

$P = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ – pole trójkąta,

p – połowa obwodu trójkąta, r – długość promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt.

Obliczymy najpierw obwód tego trójkąta:

$2p = 15 + 17 + 20,$

$2p = 52,$

$p = 26.$

Wyznaczamy pole trójkąta:

$P = \sqrt{26(26-15)(26-17)(26-20)} = \sqrt{26 \cdot 11 \cdot 9 \cdot 6} = 6\sqrt{429}.$

Obliczamy długość promienia okręgu:

$r = \frac{P}{p}$, zatem: $r = \frac{6\sqrt{429}}{26} = \frac{3\sqrt{429}}{13}$.

Przykład 3

Obliczymy długość promienia okręgu opisanego na trójkącie o bokach długości $a = 8$, $b = 12$ i $c = 16$.

Rozwiązanie:

Skorzystamy ze wzoru: $P = \frac{abc}{4R}$, gdzie: $P = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

$P = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ – pole trójkąta,

p – połowa obwodu trójkąta,

R – długość promienia okręgu opisanego na tym trójkącie.

Obliczymy najpierw obwód tego trójkąta:

$2p = 8 + 12 + 16,$

$2p = 36,$

$p = 18.$

Wyznaczamy pole trójkąta:

$P = \sqrt{18(18-8)(18-12)(18-16)} = \sqrt{18 \cdot 10 \cdot 6 \cdot 2} = 12\sqrt{15}.$

Obliczamy długość promienia:

$R = \frac{abc}{4P}$, zatem: $R = \frac{8 \cdot 12 \cdot 16}{4 \cdot 12\sqrt{15}} = \frac{32\sqrt{15}}{15}.$

Przykład 4

Długości boków trójkąta tworzą 3-wyrazowy ciąg arytmetyczny o różnicy 7. Suma dwóch skrajnych wyrazów tego ciągu jest o 16 większa od wyrazu środkowego. Obliczymy pole trójkąta.

Rozwiązanie:

Oznaczymy wyrazy ciągu przez: a, $a + 7$, $a + 14$.

Z warunków zadania: $a + a + 14 = a + 7 + 16$, zatem: $a = 9$.

Boki trójkąta mają zatem długości: $a = 9$, $b = 16$, $c = 23$.

Skorzystamy ze wzoru Herona: $P = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

Obliczymy obwód tego trójkąta:

$2p = 9 + 16 + 23,$

$2p = 48,$

$p = 24.$

Wyznaczamy pole trójkąta:

$P = \sqrt{24(24-9)(24-16)(24-23)} = \sqrt{24 \cdot 15 \cdot 8 \cdot 1} = 24\sqrt{5}.$

Słownik

twierdzenie cosinusów

jeżeli a, b, c są długościami boków trójkąta, natomiast α, β, γ odpowiednio miarami kątów leżących naprzeciw tych boków, to:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$

Animacja

Polecenie 1

Zapoznaj się z animacją dotyczącą wzoru Herona. Następnie rozwiąż zadania i sprawdź odpowiedzi.

Film dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DYzhTh5Im

Film nawiązujący do treści materiału dotyczący wykorzystania wzoru Herona.

Polecenie 2

Oblicz pole trójkąta, którego boki mają długości 7, 8, 9.

Polecenie 3

Oblicz pole trójkąta, którego boki mają długości 10, 4, 12. Następnie oblicz długość najdłuższej wysokości tego trójkąta.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

Ćwiczenie 7

Ćwiczenie 8

Dla nauczyciela

Autor: Katarzyna Podfigurna

Przedmiot: Matematyka

Temat: Wzór Herona

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

VII. Trygonometria. Zakres podstawowy.

Uczeń:

6) oblicza kąty trójkąta i długości jego boków przy odpowiednich danych (rozwiązuje trójkąty).

VIII. Planimetria. Zakres podstawowy.

Uczeń:

11) stosuje funkcje trygonometryczne do wyznaczania długości odcinków w figurach płaskich oraz obliczania pól figur;

12) przeprowadza dowody geometryczne.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- udowadnia wzór Herona
- wykorzystuje wzór Herona do wyznaczania pola trójkąta o danych bokach
- wyznacza wysokość trójkąta, korzystając ze wzoru Herona

- analizuje zadania geometryczne oraz wybiera najefektywniejszą metodę prowadzącą do ich rozwiązania

Strategie nauczania:

- konstruktywizm
- konektywizm

Metody i techniki nauczania:

- mapa myśli
- burza mózgów
- analiza przypadku

Formy pracy:

- praca indywidualna
- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu
- projektor multimedialny

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Uczniowie pracując w grupach sporządzają mapę myśli, zawierającą sposoby wyznaczania pola trójkąta.
2. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel podaje wzór Herona - uczniowie metodą burzy mózgów proponują sposoby jego udowodnienia.
2. Uczniowie pracują w grupach - po wybraniu jednej z metod udowodnienia wzoru Herona, próbują udowodnić ten wzór. Jeśli wybrany spsoób zawodzi - metodą analizy przypadku śledzą rozwiązanie zaprezentowane w sekcji Przeczytaj.
3. Grupy prezentują swoje dowody (jeśli są inne niż w sekcji Przeczytaj) lub rozmawiają o tym, dlaczego nie udało im się doprowadzić swoich dowodów do końca.
4. Uczniowie w grupach zapoznają się z przykładami z sekcji Przeczytaj i animacją.
5. Chętny uczeń rozwiązuje zadanie nr 3 z animacji.
6. Nastepnie uczniowie pracują w parach - każda osoba z danej pary na zmianę podaje długości boków trójkąta, a koleżanka/kolega z pary oblicza pole tego trójkąta.

7. Uczniowie wspólnie ustalają algorytm sposobu obliczania pola trójkąta o bokach danej długości.
8. Uczniowie rozwiązują indywidualnie ćwiczenia interaktywne 7-8.
9. Nauczyciel kontroluje pracę uczniów udzielając im wskazówek oraz zwraca uwagę na poprawność zapisów.

Faza podsumowująca:

1. Wybrani uczniowie prezentują rozwiązania ćwiczeń interaktywnych wskazanych przez nauczyciela.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, ocenia aktywność uczniów.

Praca domowa:

Zadaniem uczniów jest rozwiązanie ćwiczeń interaktywnych   1-6.

Materiały pomocnicze:

- Pole trójkąta
- Obliczanie pól i obwodów trójkątów
- Pole trójkąta

Wskazówki metodyczne:

Materiały zawarte w animacji uczniowie mogą wykorzystać przygotowując się do lekcji. Umożliwi im to wystąpienie na zajęciach w roli ekspertów.

Animację można wykorzystać na zajęciach poświęconych wyznaczaniu pól wielokątów.