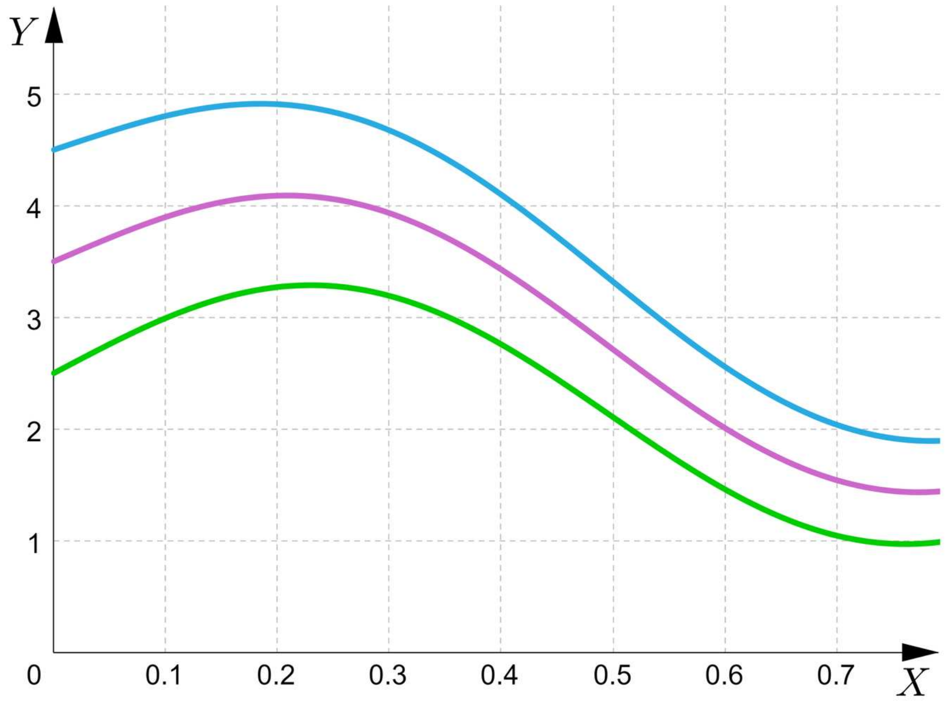
Różne rodzaje asymptot

Źródło: Tom Barrett, dostępny w internecie: https://unsplash.com/.

Czasami zachowanie skomplikowanych procesów fizycznych, chemicznych czy biologicznych jest na tyle trudne do zrozumienia, że potrzebujemy dokonać pewnych uproszczeń. Przykładem może być problem długoterminowej analizy liczebności kilku gatunków ryb oceanicznych, przedstawiony poniżej.



Wykres liczebności trzech gatunków ryb oceanicznych

Na osi poziomej przedstawiono lata, a na pionowej miliony sztuk na kilometr kwadratowy powierzchni oceanu. Wydaje się, że zachowanie wszystkich gatunków jest podobne i powinno być przewidywalne, trudno jednak zrozumieć, co się będzie w dalszych latach działo z tymi liczebnościami, nawet gdy założymy, że warunki środowiskowe nie ulegną zmianie.

Niezwykle ważnym narzędziem w analizie zachowania przebiegu funkcji i ich wykresów są asymptoty – pionowe, poziome i ukośne – ale wszystkie te typy asymptot mają jedną wspólną cechę – są liniami prostymi. W tym materiale przedstawimy przykłady nie tylko asymptot prostoliniowych, ale również pokażemy wykresy funkcji, które mają asymptoty krzywoliniowe. Ta część materiału wykracza poza zagadnienia podstawy programowej.

Twoje cele

- Wyznaczysz równania asymptot pionowych i poziomych wybranych wykresów funkcji.
- Wyznaczysz równania asymptot krzywoliniowych wybranych wykresów funkcji.
- Uzasadnisz, że prosta jest asymptotą ukośną wykresu funkcji.
- Uzasadnisz, że krzywa jest asymptotą krzywoliniową funkcji.
- Podasz przykłady funkcji, których wykresy posiadają dany typ asymptoty.

Przeczytaj

Asymptoty prostoliniowe

Asymptotą wykresu funkcji jest krzywa, do której wykres funkcji zbliża się nieskończenie blisko. Zazwyczaj rozważa się trzy podstawowe rodzaje asymptot – pionowe, poziome i ukośne.

Definicja: Asymptota pionowa

Prostą $x = c$ nazywamy asymptotą pionową wykresu funkcji f, gdy granica tej funkcji w punkcie $x = c$ jest nieskończona

$$\lim_{x \to c} f(x) = \pm\infty$$

Przykład 1

Wyznaczymy równanie asymptoty pionowej wykresu funkcji $f(x) = \frac{2x}{(x-3)^2}$.

Rozwiązanie

Dziedziną funkcji jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych oprócz $x = 3$, zatem tylko prosta $x = 3$ może być asymptotą pionową tej funkcji.

Zauważmy, że

$\lim_{x \to 3} \frac{2x}{(x-3)^2} = \left[\frac{6}{0^+}\right] = \infty$

Oznacza to, zgodnie z powyższą definicją, że prosta $x = 3$ jest asymptotą pionową wykresu funkcji $y = \frac{2x}{(x-3)^2}$.

Definicja: Asymptota pozioma

Prostą $y = b$ nazywamy asymptotą poziomą wykresu funkcji f, gdy granica tej funkcji w nieskończoności jest skończona i równa b,

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = b$$

Przykład 2

Wyznaczymy równanie asymptoty poziomej wykresu funkcji $y = \frac{2x}{(x-3)^2}$.

Rozwiązanie

Zauważmy, że:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x}{(x-3)^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x}{x^2-6x+9} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2\cdot\frac{2}{x}}{x^2\cdot\left(1-\frac{6}{x}+\frac{9}{x^2}\right)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{2}{x}}{1-\frac{6}{x}+\frac{9}{x^2}} = \frac{0}{1} = 0,$$

czyli prosta $y = 0$ jest asymptotą poziomą wykresu funkcji $y = \frac{2x}{(x-3)^2}$.

Definicja: Asymptota ukośna

Prostą $y = ax + b$ nazywamy asymptotą ukośną wykresu funkcji f, gdy granica w nieskończoności różnicy tej funkcji oraz funkcji $y = ax + b$ jest równa 0,

$$\lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$$

Zauważmy od razu, że pojęcie asymptoty ukośnej jest uogólnieniem pojęcia asymptoty poziomej: jeżeli wykres funkcji posiada asymptotę ukośną $y = ax + b$ i wartość parametru a jest równa zero, to oznacza to, że posiada asymptotę poziomą o równaniu $y = b$.

Przykład 3

Uzasadnimy, że prosta o równaniu $y = 2x + 12$ jest asymptotą ukośną wykresu funkcji $f(x) = \frac{2x^3}{(x-3)^2}$.

Rozwiązanie

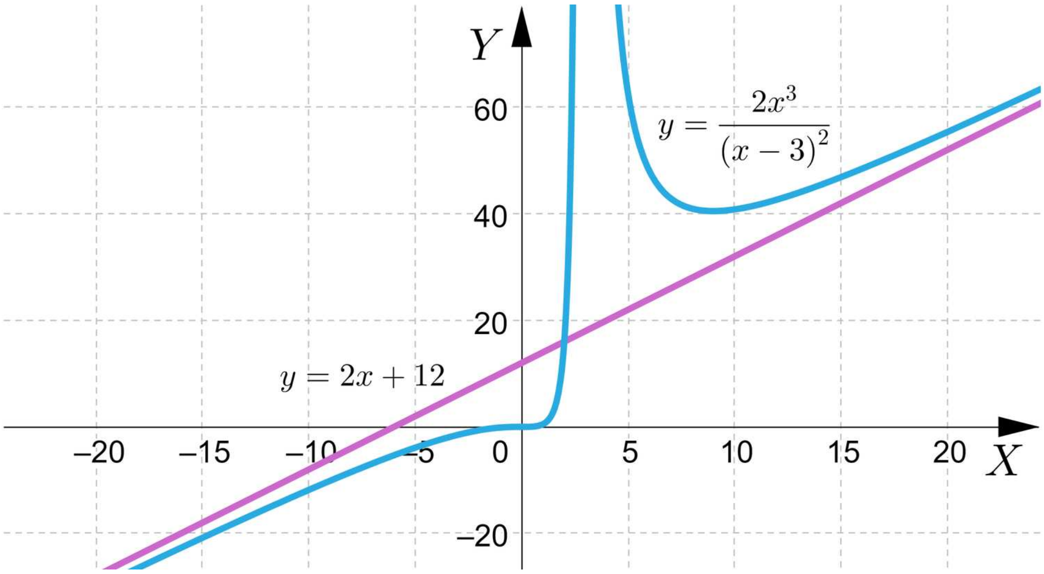
Zauważmy, że:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \left[\frac{2x^3}{(x-3)^2} - (2x+12)\right] = \lim_{x\to\pm\infty} \left[\frac{2x^3-(2x+12)(x-3)^2}{(x-3)^2}\right] =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \left[\frac{2x^3-(2x+12)(x^2-6x+9)}{x^2-6x+9}\right] = \lim_{x\to\pm\infty} \left[\frac{2x^3-2x^3+12x^2-18x-12x^2+72x-108}{x^2-6x+9}\right] =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \left[\frac{54x-108}{x^2-6x+9}\right] = 0$$

Zatem prosta $y = 2x + 12$ jest asymptotą ukośną wykresu funkcji $f(x) = \frac{2x^3}{(x-3)^2}$.



Wykres funkcji $f(x) = \frac{2x^3}{(x-3)^2}$ oraz jej asymptoty ukośnej $y = 2x + 12$

Asymptota krzywoliniowa

Podobnie do asymptoty ukośnej, możemy zdefiniować pojęcie asymptoty krzywoliniowej.

Definicja: Asymptota krzywoliniowa

Wykres funkcji $y = g(x)$ nazywamy asymptotą krzywoliniową wykresu funkcji $y = f(x)$, gdy:

$$\lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - g(x)) = 0$$

W szczególnym przypadku, gdy funkcja g jest funkcją liniową, asymptota krzywoliniowa jest asymptotą ukośną.

Przykład 4

Pokażemy, że parabola $g(x) = 2x^2 - 1$ jest asymptotą krzywoliniową wykresu funkcji $f(x) = \frac{2x^3+2x^2-x+2}{x+1}$.

Rozwiązanie

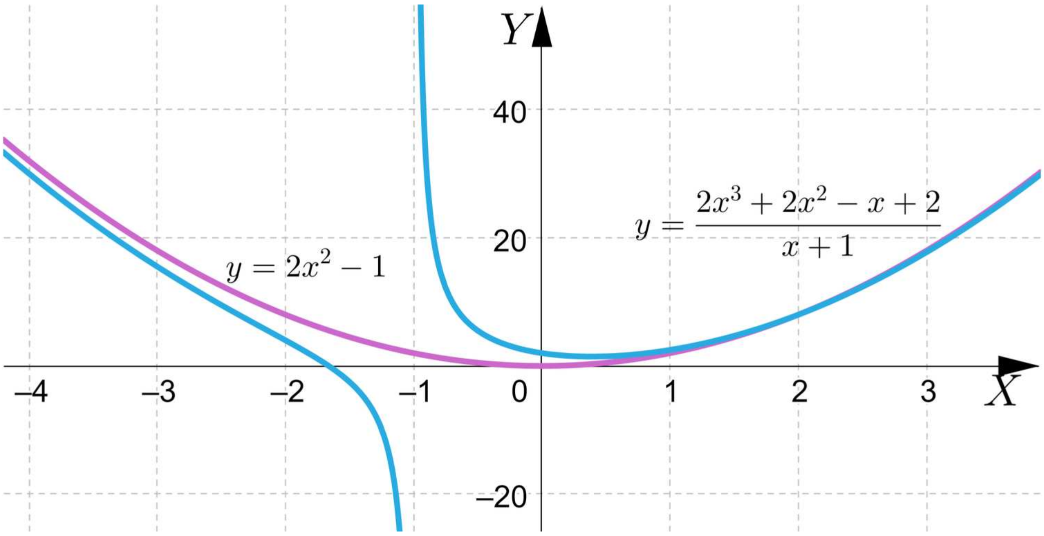
Zgodnie z definicją musimy sprawdzić wartość granicy $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x) - g(x))$:

$$\lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - g(x)) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{2x^3+2x^2-x+2}{x+1} - \left(2x^2 - 1\right)\right) =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{2x^3+2x^2-x+2}{x+1} - \frac{2x^3+2x^2-x-1}{x+1}\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{3}{x+1} = 0.$$

Pokazaliśmy zatem, że rzeczywiście parabola $y = 2x^2 - 1$ jest asymptotą krzywoliniową wykresu funkcji $f(x) = \frac{2x^3+2x^2-x+2}{x+1}$.

Jak widzimy na rysunku, dla wartości argumentów bliskich zeru wykres funkcji $y = f(x)$ w niczym nie przypomina paraboli, posiada nawet asymptotę pionową $x = -1$. Gdy jednak wartości argumentów x rosną, wykresy funkcji f i g zaczynają się do siebie znacząco zbliżać, by w nieskończoności zbliżyć się do siebie nieskończenie blisko.



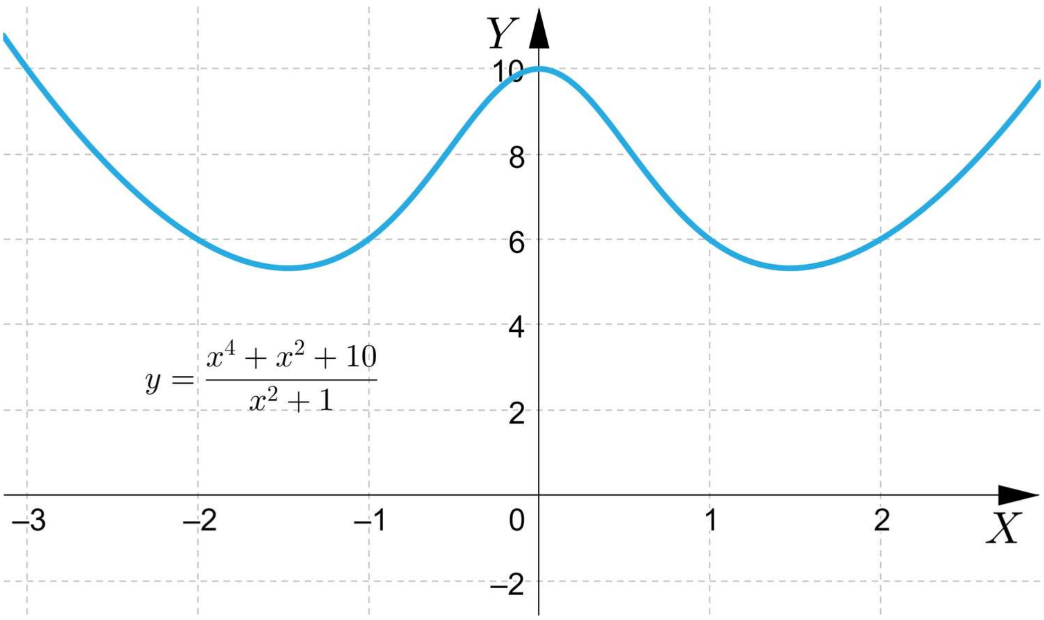
Wykres funkcji $f(x) = \frac{2x^3+2x^2-x+2}{x+1}$ oraz jej asymptoty krzywoliniowej $y = 2x^2 - 1$

Przykład 5

Wyznaczymy równanie asymptoty krzywoliniowej wykresu funkcji $f(x) = \frac{x^4+x^2+10}{x^2+1}$.

Rozwiązanie

Zauważmy, że dla małych wartości argumentu x, czyli dla x bliskich zeru, trudno jest wnioskować o postaci asymptoty krzywoliniowej:



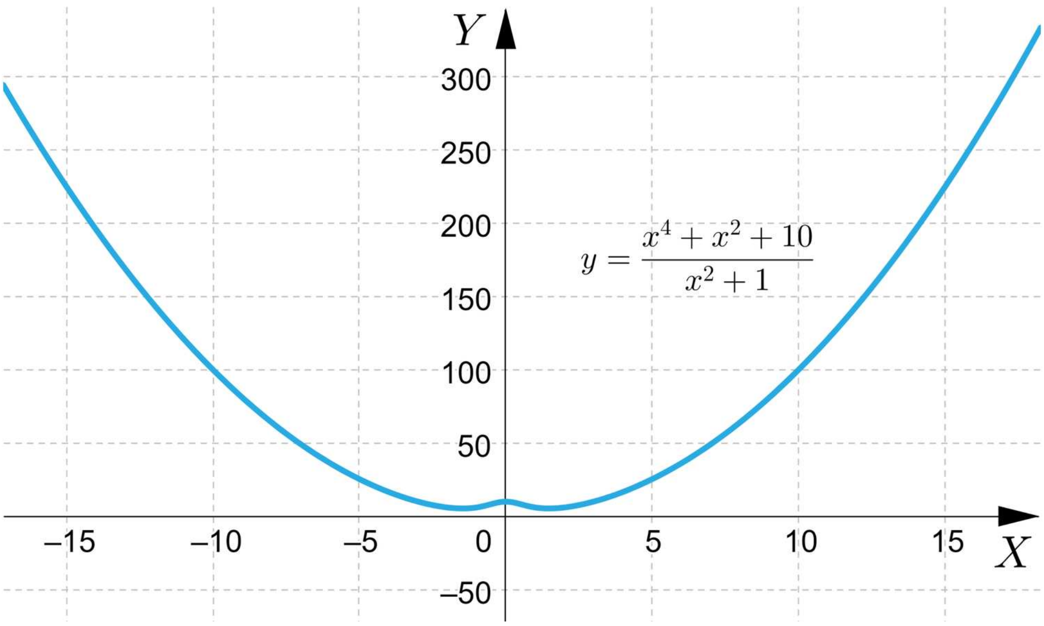
Wykres funkcji $f(x) = \frac{x^4+x^2+10}{x^2+1}$ dla małych wartości argumentu

W celu wyznaczenia asymptoty krzywoliniowej musimy przeanalizować zachowanie wykresu funkcji dla dużych wartości argumentu x.

Na początek uprośćmy postać funkcji f. Mamy:

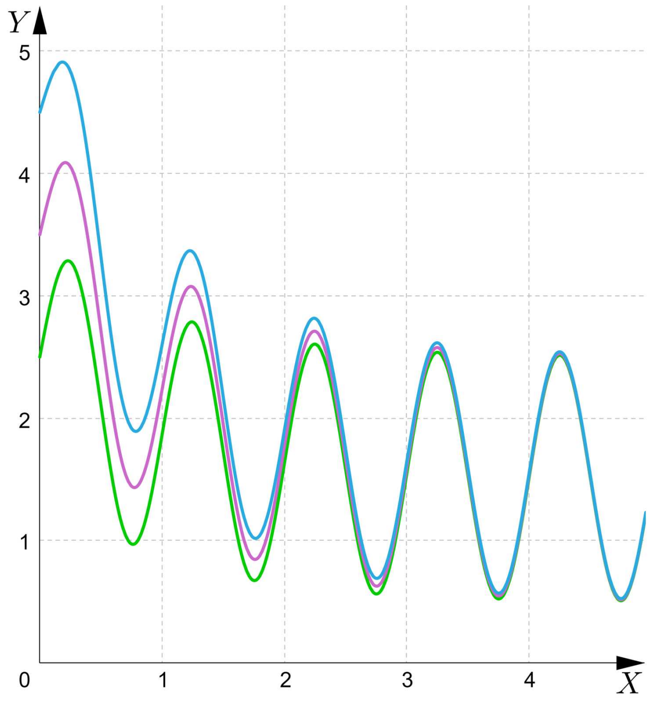
$f(x) = \frac{x^4+x^2+10}{x^2+1} = \frac{x^2\cdot(x^2+1)+10}{x^2+1} = x^2 + \frac{10}{x^2+1}$.

Ponieważ wiemy, że $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{10}{x^2+1} = 0$, więc możemy stwierdzić, że parabola $y = x^2$ jest asymptotą krzywoliniową wykresu funkcji $f(x) = \frac{x^4+x^2+10}{x^2+1}$.



Wykres funkcji $f(x) = \frac{x^4+x^2+10}{x^2+1}$ dla dużych wartości argumentu

Powróćmy do problemu analizy długoterminowego zachowania trzech wybranych populacji ryb oceanicznych. Na poniższym wykresie widzimy wykresy funkcji opisujących wielkości tych populacji w zależności od upływu czasu, mierzonego w latach.



Zachowanie wykresów jest przewidywalne, ale nie przypominają wykresu funkcji liniowej – oscylują w górę i w dół.

Wszystkie trzy wykresy mają tę samą asymptotę krzywoliniową o równaniu $y = \sin(2\pi x) + 1,5$. Czynnik 2π we wzorze sprawia, że okresem tej funkcji jest 1, czyli zachowanie populacji tych ryb podlega corocznym fluktuacjom przewidywalnym w dłuższym okresie czasowym.

Słownik

asymptota pionowa

prosta $x = x_0$, jeżeli granica funkcji dla $x \to x_0$ jest nieskończona ($-\infty$ lub $+\infty$)

asymptota pozioma

prosta $y = y_0$, jeżeli granica funkcji w nieskończoności ($-\infty$ lub $+\infty$) jest skończona i równa y_0

asymptota ukośna

prosta $y = ax + b$, jeżeli w nieskończoności ($-\infty$ lub $+\infty$) granica różnicy $(f(x) - (ax + b))$ jest równa 0

asymptota krzywoliniowa

krzywa $y = g(x)$, jeżeli w nieskończoności ($-\infty$ lub $+\infty$) granica różnicy $(f(x) - g(x))$ jest równa 0

Prezentacja multimedialna

Polecenie 1

Zapoznaj się z prezentacją multimedialną przedstawiającą różne typy asymptot.

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DrZWeSNZg

Polecenie 2

Wykaż, że parabola o równaniu $y = x^2 - 1$ jest asymptotą wykresu funkcji $f(x) = \frac{x^4 - x^2 + 5}{x^2}$.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Uzupełnij zdanie, przeciągając odpowiednią wartość w puste pole.

Asymptotą pionową wykresu funkcji $f(x) = \frac{2x+1}{x+3}$ jest prosta o równaniu: ______.

$x = -1$ $x = -3$ $y = 2$ $x = 3$

Ćwiczenie 2

Która z poniższych prostych jest asymptotą pionową wykresu funkcji $f(x) = x^3$? Zaznacz poprawną odpowiedź.

- $y = 1$
- $y = 2x$
- żadna ze wskazanych
- $y = 2x + 1$

Ćwiczenie 3

Uzupełnij lukę w zdaniu, wpisując odpowiednią liczbę.

Asymptotą poziomą wykresu funkcji $f(x) = \frac{2x+1}{x+3}$ jest prosta $y =$ ______.

Ćwiczenie 4

Jaki jest współczynnik kierunkowy prostej będącej asymptotą ukośną wykresu funkcji $f(x) = \frac{2x^2+1}{x+3}$? Zaznacz poprawną odpowiedź.

- 2
- żadna ze wskazanych liczb
- 3
- 1

Ćwiczenie 5

Uzupełnij zdanie, przeciągając odpowiednią wartość w puste pole.

Asymptotą krzywoliniową wykresu funkcji $f(x) = \frac{12x^6+1}{4x^3+1}$ jest krzywa o równaniu ______.

$y = 12x^3$ | $y = 3x^3 - \frac{3}{4}$ | $y = 12x^6$ | $y = 4x^3$

Ćwiczenie 6

Jakiego typu asymptoty prostoliniowe posiada wykres funkcji $f(x) = \frac{2x^2+1}{x+3}$? Zaznacz poprawne odpowiedzi.

- pionową
- poziomą
- ukośną
- żadnej

Ćwiczenie 7

Połącz w pary wzory funkcji z informacją o asymptotach ich wykresów.

$f(x) = 3^{x-1}$	wykres funkcji f posiada asymptotę poziomą i pionową
$f(x) = 2 - \frac{1}{x^2}$	wykres funkcji f posiada tylko asymptotę poziomą
$f(x) = \sin x - \frac{1}{x^2+1}$	wykres funkcji f posiada asymptotę pionową i ukośną, ale nie posiada asymptoty poziomej
$f(x) = 2x + \frac{1}{x}$	wykres funkcji f nie posiada asymptot prostoliniowych

Ćwiczenie 8

Dana jest funkcja postaci $f(x) = \frac{x^3-c}{x^2+c}$ z parametrem rzeczywistym c.
Połącz wartości parametru c z odpowiednimi informacjami.

$c = 0$	wykres funkcji f posiada dokładnie jedną asymptotę pionową
$c > 0$	funkcja f jest funkcją liniową
$c < 0$	wykres funkcji f posiada dokładnie dwie asymptoty pionowe
nie ma takiej wartości c	wykres funkcji f nie posiada asymptot pionowych

Dla nauczyciela

Autor: Jarosław Woźniak, Aneta Rogalska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Różne rodzaje asymptot

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

XIII. Optymalizacja i rachunek różniczkowy. Zakres rozszerzony.

Uczeń:

1) oblicza granice funkcji (w tym jednostronne).

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- wyznacza równania asymptot pionowych i poziomych wybranych wykresów funkcji;
- wyznacza równania asymptot krzywoliniowych wybranych wykresów funkcji;
- uzasadnia, że prosta jest asymptotą ukośną wykresu funkcji;
- uzasadnia, że krzywa jest asymptotą krzywoliniową funkcji;
- podaje przykłady funkcji, których wykresy posiadają dany typ asymptoty.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja;

- rozmowa kierowana;
- mapa myśli.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery multimedialne z dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e‑materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel podaje temat zajęć, określa ich cele i kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel wyświetla na tablicy interaktywnej część „Asymptoty prostoliniowe” z sekcji „Przeczytaj” oraz omawia ją na forum klasy. Podaje również definicję asymptoty krzywoliniowej.
2. Uczniowie w 3 – 4 osobowych grupach analizują Przykład 4 i Przykład 5 z sekcji „Przeczytaj”,
3. Nauczyciel przedstawia prezentację multimedialną i omawia z uczniami rodzaje asymptot.
4. Uczniowie w grupach tworzą mapę myśli na temat różnych rodzajów asymptot. W przypadku powstania wątpliwości, nauczyciel wyjaśnia na forum całej klasy napotkany problem. Pod opieką prowadzącego uczniowie porównują wyniki pracy nad mapami myśli i omawiają powstałe różnice.
5. Uczniowie indywidualnie rozwiązują wskazane ćwiczenia z sekcji „Sprawdź się”.

Faza podsumowująca:

1. Po ustalonym czasie nauczyciel sprawdza odpowiedzi uczniów, wyjaśnia pomyłki, omawia poprawne rozwiązania na forum klasy.
2. Wybrany uczeń podsumowuje zajęcia kończąc zdanie: „Po dzisiejszej lekcji umiem...”

Praca domowa:

Uczniowie rozwiązują pozostałe ćwiczenia z sekcji „Sprawdź się” oraz Polecenie 2 z sekcji „Prezentacja multimedialna”.

Materiały pomocnicze:

- Co to jest granica funkcji
- Granice funkcji elementarnych w nieskończoności

Wskazówki metodyczne:

Prezentacja multimedialna może zostać wykorzystana jako materiał powtórzeniowy przed sprawdzianem lub jako uzupełnienie tematów „Asymptota pionowa wykresu funkcji”, „Asymptota pozioma wykresu funkcji”, „Asymptota ukośna wykresu funkcji”.