



Cechy podobieństwa trójkątów

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Film edukacyjny](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Cechy podobieństwa trójkątów

Źródło: Kelly Sikkema, dostępny w internecie: <https://unsplash.com/>.

Niekiedy, obserwując dwie lub więcej rzeczy, jesteśmy skłonni o nich powiedzieć, że są podobne. O dwóch jednojajowych bliźniakach z pewnością powiemy, że są podobni, a niekiedy nawet nazwiemy ich identycznymi. Nazywając obiekty podobnymi mamy zwykle na myśli jakąś cechę tych obiektów; w przypadku dwóch osób może to być ich wygląd zewnętrzny, ale może to być też jakaś cecha charakteru. W matematyce pojęcie podobny jest używane do określenia pewnych cech figur geometrycznych. Dwie figury nazywamy podobnymi, gdy mają ten sam kształt. Oczywiście nie jest to ścisła definicja figur podobnych, ale określenie to dość dobrze oddaje pojęcie figur podobnych.

W tym materiale zajmiemy się podobieństwem najprostszych wielokątów, czy podobieństwem trójkątów.

Twoje cele

- Poznasz cechy podobieństwa trójkątów.
- Będiesz układał odpowiednią proporcję, aby wyznaczyć długości brakujących boków trójkątów podobnych.
- Wykorzystasz poznane cechy do sprawdzania, czy dane trójkąty są podobne.
- Zastosujesz trójkąty podobne do przeprowadzania dowodów geometrycznych.

Przeczytaj

Na początek podamy definicję podobieństwa.

Definicja: Podobieństwo o skali s

Podobieństwem o skali $s > 0$ nazywamy takie przekształcenie P płaszczyzny na tę samą płaszczyznę (mówimy wówczas o podobieństwie płaszczyzny) lub przestrzeni na tę samą przestrzeń (mówimy wówczas o podobieństwie przestrzeni), w którym

$$|A'B'| = s \cdot |AB|,$$

gdzie:

A i B – są dwoma dowolnymi punktami,

A' i B' – obrazami tych punktów w przekształceniu P .

Wtedy definicja figur podobnych mogłaby być sformułowana następująco:

Definicja: Figury podobne

Figury nazywamy podobnymi wtedy, gdy jedna z nich jest obrazem drugiej w pewnym podobieństwie. Relację podobieństwa figur oznaczamy symbolem „ $\sim$ ”. Zatem fakt, że figura f jest podobna do figury g możemy zapisać krótko

$$f \sim g$$

Skalę $s > 0$ tego podobieństwa nazywamy wtedy skalą podobieństwa figury f do figury g

Przykładami figur podobnych są:

- dowolne dwa odcinki,
- dowolne dwa okręgi,
- dowolne dwa wielokąty foremne o tej samej liczbie boków (trójkąty równoboczne, kwadraty, pięciokąty foremne, itd.)

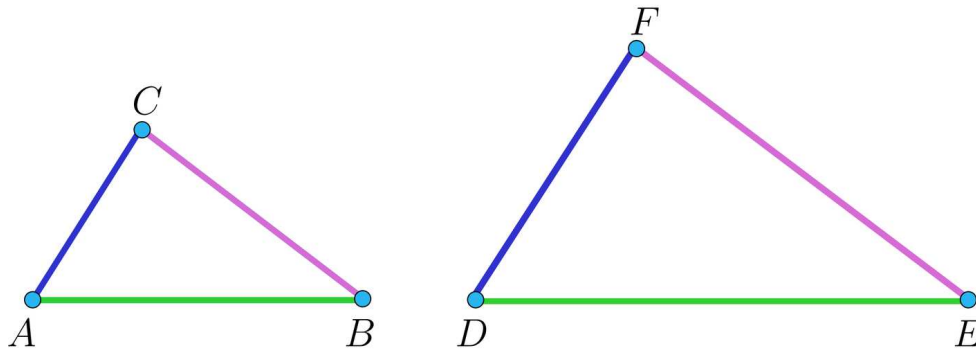
Podana definicja nie daje nam jednak dobrego narzędzia do badania podobieństwa figur. Ponieważ każdy wielokąt można poddać tzn. **triangulacji**, czyli podzielić ten wielokąt na trójkąty (można to zrobić zawsze tak, żeby wszystkie wierzchołkami tych trójkątów były wierzchołkami tego wielokąta – o tym orzeka twierdzenie o triangulacji wielokąta), więc trójkąty możemy traktować jak „cegiełki”, z których zbudowane są wielokąty. Z tego powodu wystarczy umieć rozstrzygać, czy dane trójkąty są podobne.

Wniosek o tym, że dwa trójkąty są podobne możemy wyciągnąć z każdego z następujących trzech warunków, zwanych cechami podobieństwa trójkątów:

Twierdzenie: Cecha „bok – bok – bok” podobieństwa trójkątów

Jeżeli długości trzech boków jednego trójkąta są proporcjonalne do długości odpowiednich trzech boków drugiego trójkąta, to te trójkąty są podobne.

Przyjmując oznaczenia jak na rysunku



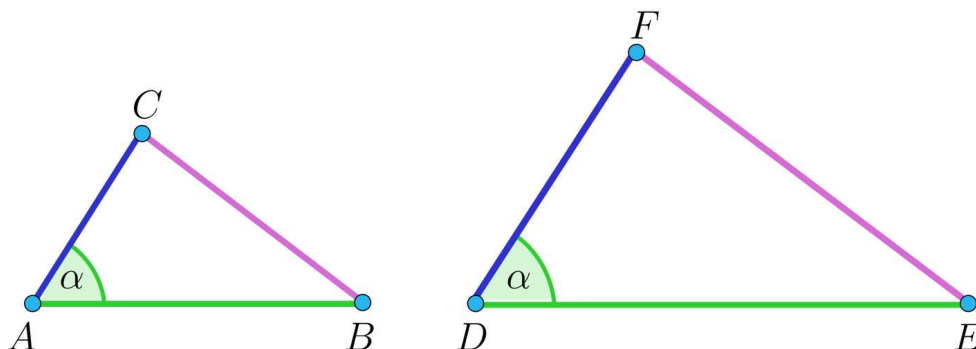
Możemy to twierdzenie zapisać w postaci:

Jeżeli $\frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|BC|}{|EF|} = \frac{|CA|}{|FD|}$, to $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

Twierdzenie: Cecha „bok – kąt – bok” podobieństwa trójkątów

Jeżeli długości dwóch boków trójkąta są proporcjonalne do długości odpowiednich dwóch boków drugiego trójkąta i kąty między tymi bokami w obu trójkątach są równe, to te trójkąty są podobne.

Przyjmując oznaczenia jak na rysunku



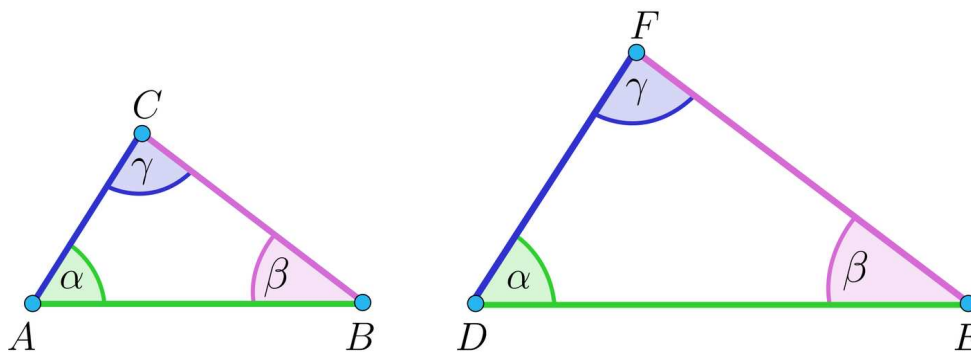
Możemy to twierdzenie zapisać w postaci:

Jeżeli $\frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|CA|}{|FD|}$ i $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle EDF|$, to $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

Twierdzenie: Cecha „kąt – kąt – kąt” podobieństwa trójkątów

Jeżeli trzy kąty jednego trójkąta są równe odpowiednim trzem kątom drugiego trójkąta, to te trójkąty są podobne.

Przyjmując oznaczenia jak na rysunku



Możemy to twierdzenie zapisać w postaci:

Jeżeli $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle EDF|$ i $|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle DEF|$ i $|\sphericalangle BCA| = |\sphericalangle DFE|$, to $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

Przykład 1

Rozstrzygnij, czy trójkąt o bokach długości 12, 18, 24 jest podobny do trójkąta o bokach długości 14, 21, 28.

Rozwiązanie

Stosunek długości najkrótszych boków tych trójkątów jest równy $\frac{12}{14} = \frac{6}{7}$.

Stosunek długości najdłuższych boków jest równy $\frac{24}{28} = \frac{6}{7}$, a stosunek długości pozostałych boków jest równy $\frac{18}{21} = \frac{6}{7}$.

Wszystkie trzy stosunki są równe, więc z cechy bbb wynika, że te trójkąty są podobne.

Skala podobieństwa pierwszego z nich do drugiego jest równa $\frac{6}{7}$, natomiast skala podobieństwa drugiego z nich do pierwszego jest równa $\frac{7}{6}$.

Przykład 2

Długości boków trójkąta ABC są równe: 45, 39 i 12. W trójkącie KLM dane są: $|KL| = 8$, $|KM| = 30$, $\cos(\sphericalangle MKL) = 0,6$. Rozstrzygnij, czy te trójkąty są podobne.

Rozwiązanie

Obliczymy najpierw długość boku LM trójkąta KLM .

Z twierdzenia cosinusów otrzymujemy

$$\begin{aligned} |LM|^2 &= |KL|^2 + |KM|^2 - 2 \cdot |KL| \cdot |KM| \cdot \cos|\sphericalangle MKL| \text{ czyli} \\ |LM|^2 &= 8^2 + 30^2 - 2 \cdot 8 \cdot 30 \cdot 0,6 = 676. \end{aligned}$$

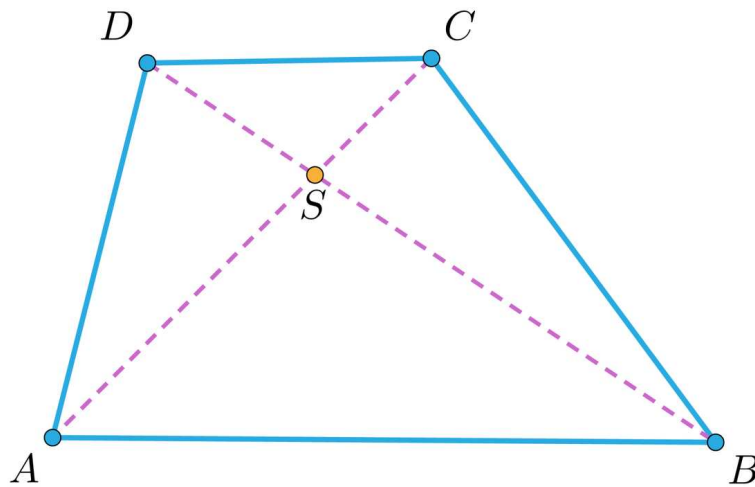
$$\text{Stąd } |LM| = \sqrt{676} = 26.$$

Teraz, mając już długości wszystkich boków obu trójkątów możemy obliczyć stosunki długości odpowiednich boków.

Ponieważ $\frac{45}{30} = \frac{39}{26} = \frac{12}{8} (= \frac{3}{2})$, więc z cechy *bbb* wnioskujemy, że trójkąty ABC i KLM są podobne.

Przykład 3

Przekątne AC i BD trapezu $ABCD$ o podstawach AB i CD przecinają się w punkcie S .



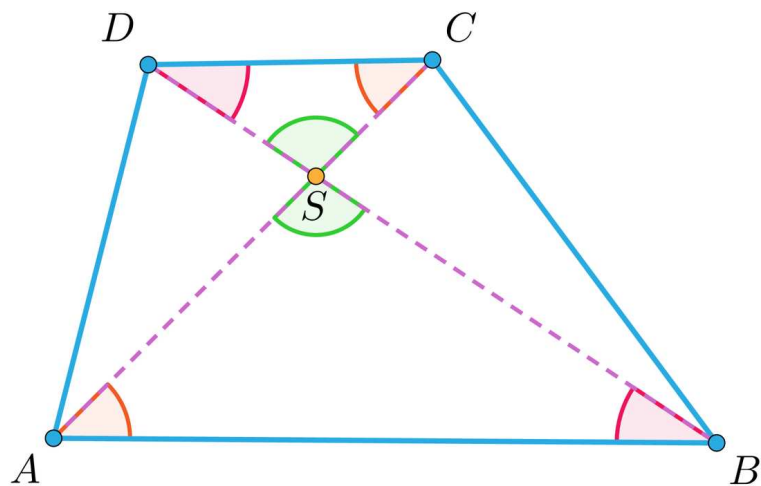
Uzasadnij, że trójkąty ABS i CDS są podobne.

Rozwiązanie

Kąty BAS i DCS są naprzemianległe oraz kąty ABS i CDS są naprzemianległe.

Proste AB i CD są równoległe, gdyż czworokąt $ABCD$ jest trapezem, więc z twierdzenia o kątach naprzemianległych wynika, że $|\sphericalangle BAS| = |\sphericalangle DCS|$ oraz $|\sphericalangle ABS| = |\sphericalangle CDS|$.

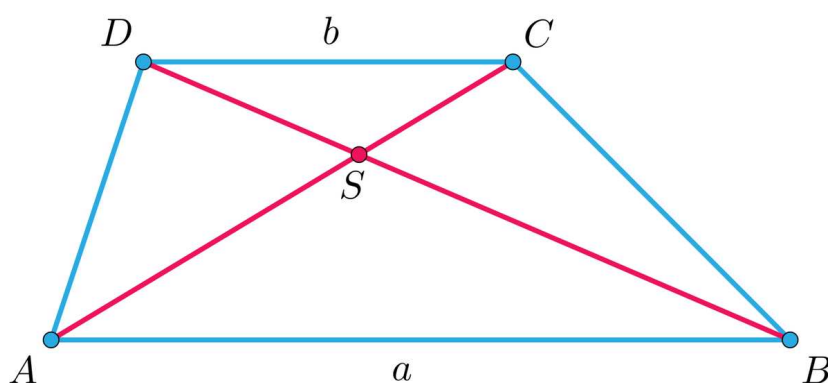
Kąty ASB i CSD są wierzchołkowe, więc $|\sphericalangle ASB| = |\sphericalangle CSD|$.



Zatem z cechy *kkk* wynika, że trójkąty ABS i CDS są podobne.

Przykład 4

Przekątne AC i BD trapezu $ABCD$, którego podstawy AB i CD mają długości $|AB| = a$ i $|CD| = b$, przecinają się w punkcie S .



Wykaż, że stosunek pola trójkąta ABS do pola trapezu $ABCD$ jest równy $\left(\frac{a}{a+b}\right)^2$.

Dowód

Krok 1

Uzasadnij, że stosunek pola trójkąta ADS do pola trójkąta CDS jest równy $\frac{|AS|}{|CS|}$, czyli

$$\frac{P_{ADS}}{P_{CDS}} = \frac{|AS|}{|CS|}.$$

Uzasadnienie Kroku 1

Trójkąty ADS i CDS mają wspólną wysokość opuszczoną z wierzchołka D . Oznaczając tę wysokość literą h otrzymujemy

$$\frac{P_{ADS}}{P_{CDS}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot |AS| \cdot h}{\frac{1}{2} \cdot |CS| \cdot h} = \frac{|AS|}{|CS|}.$$

Krok 2

Uzasadnij, że prawdziwa jest równość $\frac{P_{ADS}}{P_{CDS}} = \frac{P_{ABS}}{P_{CBS}}$.

Uzasadnienie Kroku 2

Z własności, której prawdziwość uzasadniliśmy w kroku 1. wynika, że $\frac{P_{ADS}}{P_{CDS}} = \frac{||AS||}{||CS||}$ i $\frac{P_{ABS}}{P_{CBS}} = \frac{||AS||}{||CS||}$.

Stąd wynika równość $\frac{P_{ADS}}{P_{CDS}} = \frac{P_{ABS}}{P_{CBS}}$.

Krok 3

Uzasadnij, że trójkąty ABS i CDS są podobne.

Uzasadnienie Kroku 3

Proste AB i CD są równoległe. Kąty BAS i DCS są naprzemianległe oraz kąty ABS i CDS są naprzemianległe, więc $|\angle BAS| = |\angle DCS|$ oraz $|\angle ABS| = |\angle CDS|$.

Kąty ASB i CSD są wierzchołkowe, więc $|\angle ASB| = |\angle CSD|$.

Zatem z cechy kkk wynika, że trójkąty ABS i CDS są podobne.

Krok 4

Uzasadnij, że $\frac{P_{ABS}}{P_{CDS}} = \left(\frac{a}{b}\right)^2$.

Uzasadnienie Kroku 4

Trójkąty ABS i CDS są podobne, a skala ich tego podobieństwa jest równa stosunkowi odpowiednich długości w tych trójkątach, więc jest równa $\frac{||AB||}{||CD||} = \frac{a}{b}$.

Stosunek pól figur podobnych jest równy kwadratowi skali podobieństwa tych figur, więc

$$\frac{P_{ABS}}{P_{CDS}} = \left(\frac{a}{b}\right)^2.$$

Krok 5

Uzasadnij, że $P_{ADS} = P_{CBS}$.

Uzasadnienie Kroku 5

Kąty ASD i BSC są wierzchołkowe, więc $|\angle ASD| = |\angle BSC|$. Oznaczmy miarę tych kątów przez φ .

Z podobieństwa trójkątów ABS i CDS , co wykazaliśmy w kroku 3., wynika, że

$$\frac{||AS||}{||BS||} = \frac{||CS||}{||DS||}. \text{ Stąd } ||AS|| \cdot ||DS|| = ||BS|| \cdot ||CS||.$$

Mnożąc obie strony tej równości przez $\frac{1}{2} \sin \varphi$ otrzymujemy równość $\frac{1}{2} \cdot ||AS|| \cdot ||DS|| \cdot \sin \varphi = \frac{1}{2} \cdot ||BS|| \cdot ||CS|| \cdot \sin \varphi$.

Stąd i ze wzoru na pole trójkąta z sinusem otrzymujemy $P_{ADS} = P_{CBS}$.

Krok 6

Uzasadnij, że $P_{ADS} = \frac{b}{a} \cdot P_{ABS}$.

Uzasadnienie Kroku 6

Z równości $\frac{P_{ADS}}{P_{CDS}} = \frac{P_{ABS}}{P_{CBS}}$ i $P_{ADS} = P_{CBS}$ wykazanych w krokach 2. i 5. otrzymujemy kolejno

$$P_{ADS} \cdot P_{CBS} = P_{CDS} \cdot P_{ABS},$$

$$(P_{ADS})^2 = P_{CDS} \cdot P_{ABS}.$$

Stąd i z równości $\frac{P_{ABS}}{P_{CDS}} = \left(\frac{a}{b}\right)^2$, której prawdziwość wykazaliśmy w kroku 4. wynika, że $(P_{ADS})^2 = \left(\frac{b}{a}\right)^2 \cdot P_{ABS} \cdot P_{ABS} = \left(\frac{b}{a} \cdot P_{ABS}\right)^2$, skąd dostajemy $P_{ADS} = \frac{b}{a} \cdot P_{ABS}$.

Krok 7

Uzasadnij, że $\frac{P_{ABS}}{P_{ABCD}} = \left(\frac{a}{a+b}\right)^2$.

Uzasadnienie Kroku 7

$$\begin{aligned} \frac{P_{ABS}}{P_{ABCD}} &= \frac{P_{ABS}}{P_{ABS}+P_{ADS}+P_{CBS}+P_{CDS}} = \frac{P_{ABS}}{P_{ABS}+2P_{ADS}+P_{CDS}} = \\ &= \frac{P_{ABS}}{P_{ABS}+2\left(\frac{b}{a} \cdot P_{ABS}\right)+\left(\frac{b}{a}\right)^2 \cdot P_{ABS}} = \frac{P_{ABS}}{P_{ABS}\left(1+2 \cdot \frac{b}{a}+\left(\frac{b}{a}\right)^2\right)} = \\ &= \frac{1}{1+2 \cdot \frac{b}{a}+\left(\frac{b}{a}\right)^2} = \frac{1}{\left(1+\frac{b}{a}\right)^2} = \frac{1^2}{\left(\frac{a+b}{a}\right)^2} = \left(\frac{1}{\frac{a+b}{a}}\right)^2 = \left(\frac{a}{a+b}\right)^2 \end{aligned}$$

Słownik

skala podobieństwa figur

jeżeli figura g jest obrazem figury f w podobieństwie o skali $s > 0$, to liczbę s nazywamy skalą podobieństwa tych figur (dokładniej skalą podobieństwa figury g do figury f)

Film edukacyjny

Polecenie 1

Zapoznaj się z poniższym filmem edukacyjnym, aby utrwalić swoją wiedzę o trójkątach podobnych.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D9byaFl2r>

Film nawiązujący do treści lekcji dotyczącej podobieństw trójkątów.

Polecenie 2

Kacper wyszedł z domu na spacer kierując się na azymut 20° . Szedł przez 20 minut. Następnie ruszył 30° na południe od kierunku wchodniego. Szedł 50 minut. Wrócił do domu najkrótszą drogą. Przez cały czas poruszał się z niezmienną prędkością. Wiktoria ruszyła 60° na zachód od kierunku północnego. Szła 10 minut. Następnie obróciła się o 100° w lewo i szła przez 25 minut, wróciła do domu najkrótszą drogą. Całą drogę szła z niezmienną prędkością. Zastanówmy się, czy drogi, które przebyli Kacper i Wiktoria tworzą trójkąty podobne.

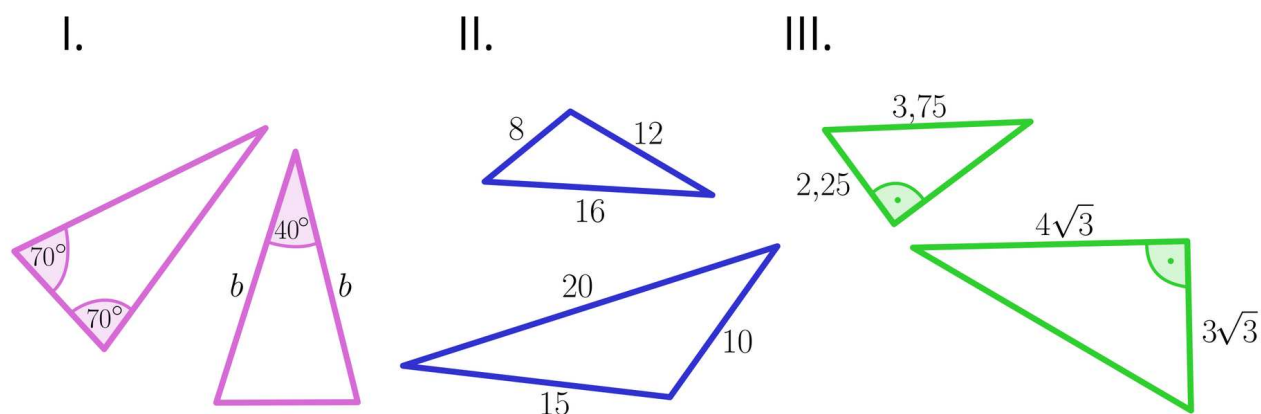
Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Na każdym z rysunków I, II i III przedstawiono parę trójkątów.



Na którym rysunku przedstawione trójkąty są podobne? Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐ Tylko na I i III.

☐ Tylko na II i III.

☐ Tylko na I.

☐ Na I, II i III.

Ćwiczenie 2



Przeciągnij poprawną odpowiedź.

Liczby $\sqrt{125}$, $\sqrt{180}$, $\sqrt{245}$ są długościami boków trójkąta ABC . Trójkątem podobnym do trójkąta ABC jest trójkąt o bokach długości .

25, 36, 49

125, 180, 245

$\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$

5, 6, 7

Ćwiczenie 3



Zaznacz poprawną odpowiedź. Dane są trójkąty: ABC o bokach długości 4, 6 i 8; trójkąt DEF o bokach 6, 9 i 12 oraz trójkąt KLM o bokach 9, 12 i 14. Wynika stąd, że:

☐ $\triangle DEF \sim \triangle KLM$.

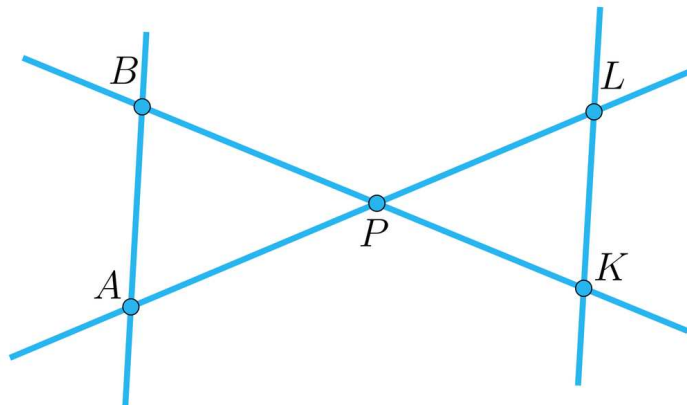
☐ $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

☐ $\triangle ABC \sim \triangle KLM$.

Ćwiczenie 4



Prosta AB jest równoległa do prostej KL oraz $|AB| = 3$, $|KL| = 7$ i $|BK| = 9$ jak na rysunku poniżej.



Zaznacz poprawną odpowiedź. Długość odcinka BP jest równa:

☐ 3.

☐ 7.

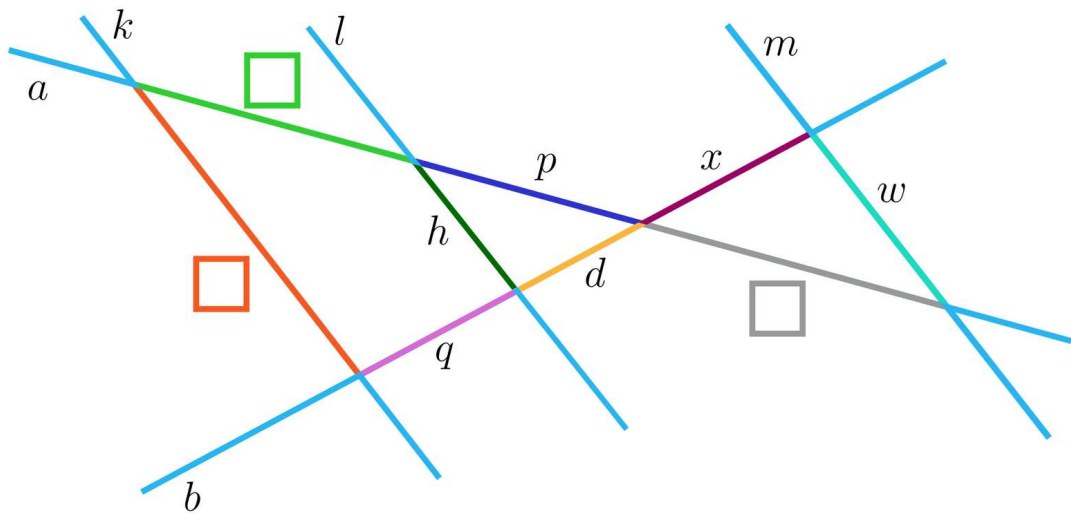
☐ 2, 7.

☐ 6, 3.

Ćwiczenie 5



Proste a i b zostały przecięte prostymi równoległymi k , l i m jak na rysunku poniżej.



Prawdziwe są proporcje: $\frac{p}{d} = \frac{p+z}{d+q}$, $\frac{d}{x} = \frac{p}{f}$, $\frac{h}{s} = \frac{d}{d+q}$.

Uzupełnij każdą z proporcji tak, żeby była prawdziwa, przeciągając brakującą zmienną w proporcji do prawej kolumny tabeli.

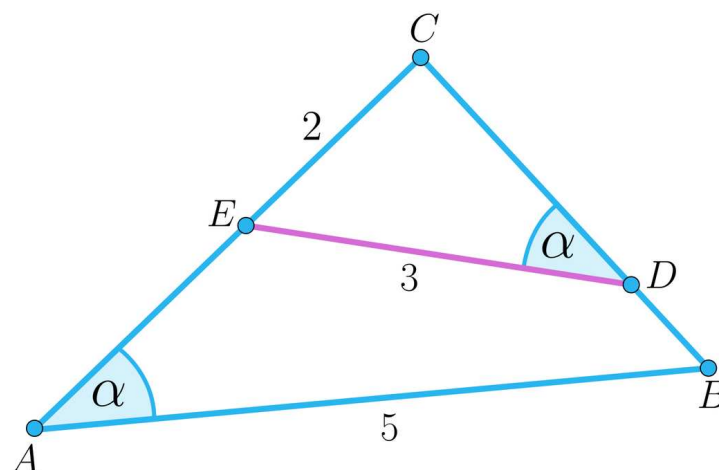
$\frac{q}{z} = \frac{q+d}{z+\square}$, $\frac{p}{f} = \frac{h}{\square}$, $\frac{f}{z+p} = \frac{w}{\square}$, $\frac{w}{x} = \frac{\square}{q+d}$, d, z, f, y, q, h, x, g

Proporcja		Brakująca zmienna w proporcji
$\frac{q}{z} = \frac{q+d}{z+\square}$		
$\frac{p}{f} = \frac{h}{\square}$		
$\frac{f}{z+p} = \frac{w}{\square}$		
$\frac{w}{x} = \frac{\square}{q+d}$		

Ćwiczenie 6



Długość boku AB trójkąta ABC jest równa 5. Na bokach BC i AC tego trójkąta leżą punkty odpowiednio D i E takie, że $|DE| = 3$, $|CE| = 2$ i $|\angle BAC| = |\angle EDC| = \alpha$, jak na rysunku.

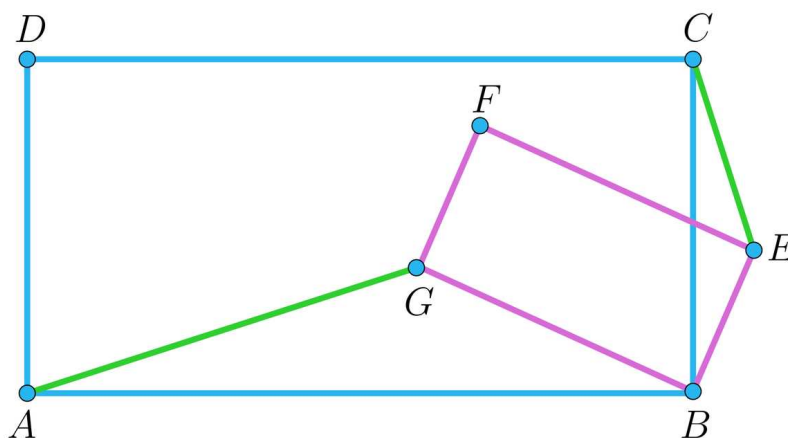


Oblicz długość boku BC trójkąta ABC .

Ćwiczenie 7



Na rysunku przedstawione są dwa prostokąty $ABCD$ i $BEFG$ o wspólnym wierzchołku B . Bok AB prostokąta $ABCD$ jest 2 razy dłuższy od jego boku AD , a bok BG prostokąta $BEFG$ jest 2 razy dłuższy od jego boku BE .

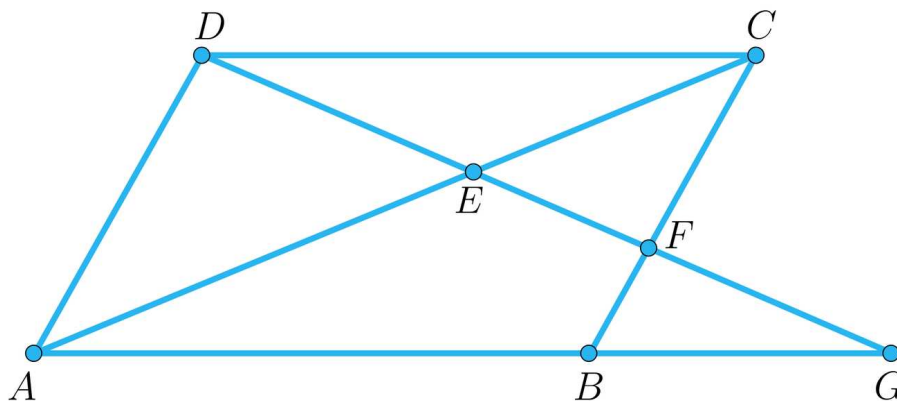


Udowodnij, że $|AG| = 2 \cdot |EC|$.

Ćwiczenie 8



Dany jest równoległobok $ABCD$. Prosta przechodząca przez wierzchołek D przecina przekątną AC tego równoległoboku w punkcie E , bok BC w punkcie F i przedłużenie boku AB w punkcie G jak na rysunku poniżej.



Wykaż, że $|DE|^2 = |EF| \cdot |EG|$.

Dla nauczyciela

Autor: Henryk Dąbrowski

Przedmiot: Matematyka

Temat: Cechy podobieństwa trójkątów

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

VIII. Planimetria.

Zakres podstawowy. Uczeń:

8) korzysta z cech podobieństwa trójkątów;

12) przeprowadza dowody geometryczne.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe

Cele operacyjne:

Uczeń:

- zna cechy podobieństwa
- układa proporcje, aby wyznaczyć długości brakujących boków trójkątów podobnych
- wykorzystuje poznane cechy do sprawdzania, czy dane trójkąty są podobne

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja
- rozmowa nauczająca z wykorzystaniem ćwiczeń interaktywnych

Formy pracy:

- praca indywidualna
- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każda para uczniów miała do dyspozycji komputer; lekcję tę można przeprowadzić, mając do dyspozycji jeden komputer z rzutnikiem multimedialnym

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

- Nauczyciel rysuje na tablicy kilka trójkątów różnej wielkości, dwa spośród nich są proporcjonalne. Pyta uczniów, które ich zdaniem są podobne.

Faza realizacyjna:

- Nauczyciel, z pomocą uczniów, wskazuje cechy podobieństwa trójkątów
- Nauczyciel, z pomocą uczniów, rozwiązuje Przykład 1
- Nauczyciel pokazuje uczniom dowód z Przykładu 4
- Uczniowie zapoznają się z filmem edukacyjnym
- Uczniowie pracując w grupach analizują Przykłady 2 i 3. Wybrani uczniowie referują rozwiązania.

Faza podsumowująca:

- Nauczyciel prosi wybranych uczniów o przedstawienie najważniejszych elementów, jakie były omawiane w trakcie lekcji.

Praca domowa:

Nauczyciel poleca, aby uczniowie wykonali w domu ćwiczenia interaktywne, które nie zostały wykonane w czasie zajęć.

Materiały pomocnicze:

- [Cechy podobieństwa trójkątów](#)

Wskazówki metodyczne:

Nauczyciel może wykorzystać medium w sekcji „Film edukacyjny” do pracy przed lekcją. Uczniowie zapoznają się z jego treścią i przygotowują do pracy na zajęciach w ten sposób, żeby móc samodzielnie pracować podczas lekcji.