



Nierówność wymierna

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Infografika
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela

Nierówność wymierna

Źródło: dostępny w internecie: pixabay.com, domena publiczna.

Założmy że firma zaczęła produkować rowery, które zamierza sprzedać. Przewidywany zysk ze sprzedaży rowerów można przedstawić za pomocą funkcji:

$f(x) = \frac{x^2 - 900}{x}$, gdzie x to liczba sprzedanych rowerów.



Oczywiście właściciel firmy chce wiedzieć ile rowerów musi sprzedać, aby zysk był większy niż zero. Zatem musi rozwiązać nierówność wymierną:

$$\frac{x^2-900}{x} > 0.$$

W tym materiale nauczymy się rozwiązywać nierówności wymierne typu: $\frac{W_1(x)}{W_2(x)} > 0$, $\frac{W_1(x)}{W_2(x)} \geq 0$, $\frac{W_1(x)}{W_2(x)} < 0$, $\frac{W_1(x)}{W_2(x)} \leq 0$, gdzie W_1, W_2 są wielomianami i $W_2(x) \neq 0$.

Przypomnij sobie, jak rozwiązuje się równania wymierne typu $\frac{W_1(x)}{W_2(x)} = 0$, gdzie W_1, W_2 są wielomianami i $W_2(x) \neq 0$ oraz nierówności wielomianowe.

Twoje cele

- Rozwiążesz proste nierówności wymierne.
- Rozwiążesz nierówności wymierne kilkoma sposobami.

Przeczytaj

Nierównością wymierną z niewiadomą x nazywamy nierówność, którą można sprowadzić do postaci

$$\frac{W_1(x)}{W_2(x)} > 0 \text{ lub } \frac{W_1(x)}{W_2(x)} \geq 0 \text{ lub } \frac{W_1(x)}{W_2(x)} < 0 \text{ lub } \frac{W_1(x)}{W_2(x)} \leq 0,$$

gdzie W_1, W_2 są wielomianami, przy czym W_2 jest wielomianem co najmniej pierwszego stopnia i $W_2(x) \neq 0$.

Przykłady nierówności wymiernych:

- $\frac{2}{x} > 0$, gdzie $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$,
- $\frac{2x-10}{x^2+10x+25} \leq 0$, gdzie $D = \mathbb{R} \setminus \{-5\}$,
- $\frac{-3(x-5)^5(2-4x)^3(2x-6)^7}{(x-1)^2(x+5)^{10}} \geq 0$, gdzie $D = \mathbb{R} \setminus \{-5; 1\}$,
- $\frac{x-2}{3x-6} \geq 2$, gdzie $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$,
- $\frac{x+3}{x+1} < \frac{x-13}{x^2-4x-5} - \frac{8}{x-5}$, gdzie $D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 5\}$.

Nierówność wymierną rozwiązujemy najczęściej doprowadzając ją do postaci wielomianowej, przy wyznaczonej [dziedzinie nierówności wymiernej](#).

Twierdzenie: o równoważności nierówności

1. $\frac{W_1(x)}{W_2(x)} > 0 \Leftrightarrow W_1(x) \cdot W_2(x) > 0 \wedge W_2(x) \neq 0$,
2. $\frac{W_1(x)}{W_2(x)} < 0 \Leftrightarrow W_1(x) \cdot W_2(x) < 0 \wedge W_2(x) \neq 0$,
3. $\frac{W_1(x)}{W_2(x)} \geq 0 \Leftrightarrow W_1(x) \cdot W_2(x) \geq 0 \wedge W_2(x) \neq 0$,
4. $\frac{W_1(x)}{W_2(x)} \leq 0 \Leftrightarrow W_1(x) \cdot W_2(x) \leq 0 \wedge W_2(x) \neq 0$.

Zatem przy rozwiązywaniu nierówności wymiernych, często będziemy korzystać z powyższego twierdzenia.

Ważne!

Czy nierówność

$$\frac{x-1}{x} > 0$$

możemy obustronnie pomnożyć przez x ?

Oczywiście, że nie!

Zauważmy, że wyrażenie x występujące w mianowniku nie ma określonego znaku. Wyrażenie nie jest zawsze dodatnie, bądź ujemne.

Natomiast, jeśli zadanie brzmi:

- Rozwiąż nierówność $\frac{x-1}{x} > 0$ dla $x \in (0; +\infty)$.

Wówczas możemy nierówność pomnożyć obustronnie przez x , bo $x > 0$.

Stąd

$$\frac{x-1}{x} > 0 \mid \cdot x$$

Uwaga nie zmieniamy zwrotu nierówności, ponieważ wyrażenie x jest dodatnie, czyli

$$x - 1 > 0,$$

$$x > 1.$$

Uwzględnijmy założenie:

$$[x \in (1; +\infty) \wedge x \in (0; +\infty)] \Leftrightarrow x \in (1; +\infty).$$

Zbiorem rozwiązań nierówności $\frac{x-1}{x} > 0$ w tym przypadku jest zbiór $(1; +\infty)$.

- Rozwiąż nierówność $\frac{x-1}{x} > 0$ dla $x \in (-\infty; 0)$.

Wówczas możemy nierówność pomnożyć obustronnie przez x , bo $x < 0$.

Stąd

$$\frac{x-1}{x} > 0 \mid \cdot x$$

Uwaga! – zmieniamy zwrot nierówności, ponieważ wyrażenie x jest ujemne, czyli

$$x - 1 < 0,$$

$$x < 1.$$

Uwzględnijmy założenie:

$$[x \in (-\infty; 1) \wedge x \in (-\infty; 0)] \Leftrightarrow x \in (-\infty; 0).$$

Zbiorem rozwiązań nierówności $\frac{x-1}{x} > 0$ w tym przypadku jest zbiór $(-\infty; 0)$.

Przykład 1

Rozwiążemy nierówność $\frac{2}{x} \geq 0$.

Na początku rozwiązywania nierówności wymiernej musimy podać założenia.

Założenie: $x \neq 0$ (mianownik nie może przyjmować wartości równej zero), czyli $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

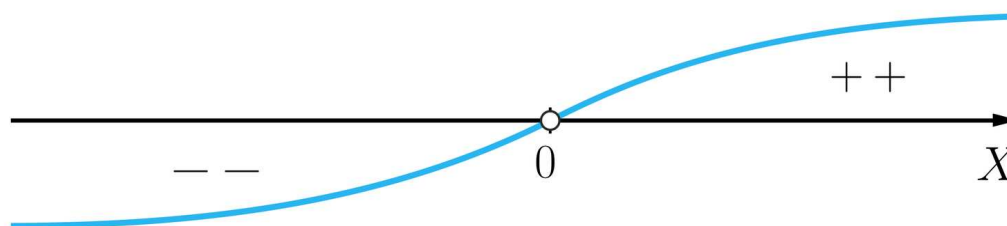
Korzystamy z równoważności:

$$\frac{W_1(x)}{W_2(x)} \geq 0 \Leftrightarrow W_1(x) \cdot W_2(x) \geq 0 \wedge W_2(x) \neq 0.$$

$$\frac{2}{x} \geq 0 \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } 2x \geq 0 \text{ i } x \neq 0.$$

Wówczas $x \geq 0$ i $x \neq 0$.

Uwzględniając założenia podajemy rozwiązanie nierówności wymiernej.



Odpowiedź: Zbiorem rozwiązań nierówności $\frac{2}{x} \geq 0$ jest zbiór $(0; +\infty)$.

Kolejną nierówność rozwiążemy na dwa sposoby.

Przykład 2

Rozwiążemy następującą nierówność $\frac{2x-4}{5x+5} < -2$.

Zawsze na początku rozwiązywania zadania musimy podać założenia, czyli $x \neq -1$.

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}.$$

- **I sposób rozwiązania nierówności wymiernej:**

Sprowadzamy nierówność do postaci $\frac{W_1(x)}{W_2(x)} < 0$.

$$\frac{2x-4}{5x+5} + 2 < 0, \text{ skąd}$$

$$\frac{2x-4}{5x+5} + \frac{2(5x+5)}{5x+5} < 0, \text{ zatem}$$

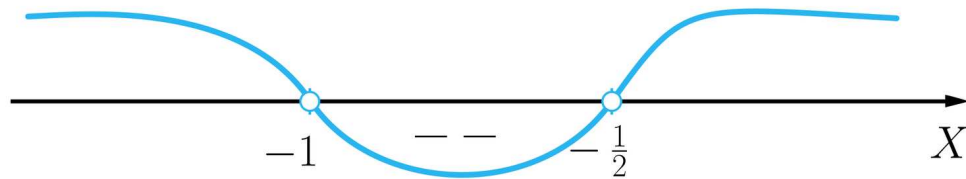
$$\frac{12x+6}{5x+5} < 0.$$

Zapisujemy nierówność w postaci równoważnej nierówności iloczynowej

$$(12x + 6)(5x + 5) < 0 \wedge x \neq -1,$$

$$60\left(x + \frac{1}{2}\right)(x + 1) < 0 \wedge x \neq -1.$$

Odczytujemy miejsca zerowe wielomianu $W(x) = 60\left(x + \frac{1}{2}\right)(x + 1)$ oraz uwzględniając dziedzinę, szkicujemy jego wykres.



$$W(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \left(-1; -\frac{1}{2}\right)$$

Uwzględniamy dziedzinę $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, która w tym wypadku nie wpływa na rozwiązanie. Zatem zbiorem rozwiązań nierówności $\frac{2x-4}{5x+5} < -2$ jest zbiór $\left(-1; -\frac{1}{2}\right)$.

• II sposób rozwiązania nierówności wymiernej:

Zauważmy, że wielomian $5x + 5$ występujący w mianowniku przyjmuje wartości dodatnie, jak i ujemne. Zatem nie możemy nierówności pomnożyć obustronnie przez $5x + 5$. Pomnożmy obie strony nierówności przez wyrażenie $(5x + 5)^2$. Wówczas, przy przyjętych założeniach, zwrot nierówności nie ulegnie zmianie, bo $(5x + 5)^2 > 0$.

$$\frac{2x-4}{5x+5} < -2 \quad | \cdot (5x + 5)^2$$

$$\frac{2x-4}{5x+5} \cdot (5x + 5)^2 < -2 \cdot (5x + 5)^2,$$

$$(2x - 4)(5x + 5) < -2 \cdot (5x + 5)^2,$$

$$(2x - 4)(5x + 5) + 2 \cdot (5x + 5)^2 < 0.$$

Wyłączamy wspólny czynnik przed nawias

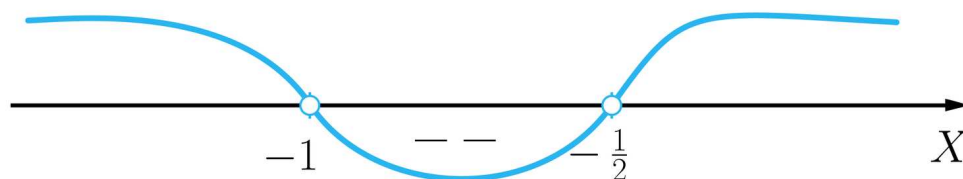
$$(5x + 5)[2x - 4 + 2(5x + 5)] < 0,$$

$$(5x + 5)[2x - 4 + 10x + 10] < 0,$$

$$(12x + 6)(5x + 5) < 0,$$

$$60\left(x + \frac{1}{2}\right)(x + 1) < 0.$$

Następnie postępujemy analogicznie jak powyżej, czyli wielomian $W(x) = 60(x + \frac{1}{2})(x + 1)$ ma dwa pierwiastki jednokrotne: (-1) , $(-\frac{1}{2})$.



$$W(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-1; -\frac{1}{2})$$

Uwzględniamy dziedzinę $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, która w tym wypadku nie wpływa na rozwiązanie. Zatem zbiorem rozwiązań nierówności $\frac{2x-4}{5x+5} < -2$ jest zbiór $(-1; -\frac{1}{2})$.

Ważne!

Zwróćmy uwagę na to, że przy rozwiązywaniu nierówności wymiernej drugim sposobem, nie możemy mnożyć obustronnie nierówności przez mianownik wyrażenia wymiernego, jeśli nie wiemy jaki on ma znak, czy ujemny czy dodatni. Jeśli znak mianownika byłby ujemny, to po pomnożeniu nierówności przez ten mianownik, musielibyśmy zmienić zwrot nierówności.

Przykład 3

Rozwiążemy nierówność $\frac{x^2-81}{x+9} \leq 0$.

Podajmy założenie: $x + 9 \neq 0$, czyli $x \neq -9$.

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-9\}.$$

Korzystając ze wzoru skróconego mnożenia $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ otrzymujemy

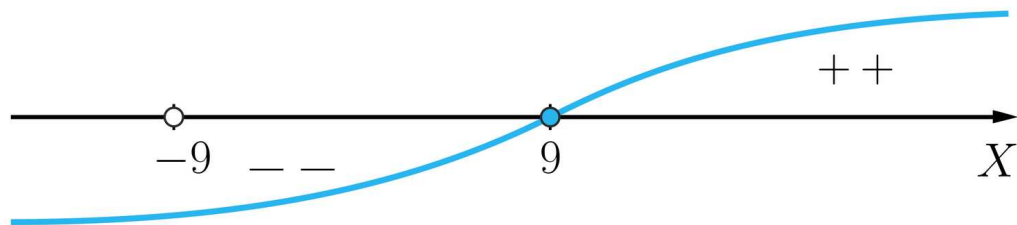
$$\frac{(x+9)(x-9)}{x+9} \leq 0.$$

Po skróceniu wyrażenia przez $x + 9$ mamy

$$x - 9 \leq 0,$$

$$x \leq 9 \text{ i } x \neq -9.$$

Uwzględniając dziedzinę szkicujemy wykres.



Odpowiedź: Zbiorem rozwiązań nierówności $\frac{x^2-81}{x+9} \leq 0$ jest zbiór $(-\infty; -9) \cup (-9; 9]$.

Ważne!

Rozwiązując nierówność wymierną, pamiętajmy o wyznaczeniu dziedziny.

Algorytm rozwiązywania nierówności wymiernych

I sposób:

1. Wyznaczamy **dziedzinę nierówności wymiernej**.
2. Sprowadzamy nierówność do postaci ogólnej - przenosimy wszystkie wyrażenia na jedną stronę nierówności.
3. Wykonujemy wskazane działania.
4. Nierówność wymierną rozwiązujemy doprowadzając ją do równoważnej postaci wielomianowej przy wyznaczonej **dziedzinie nierówności wymiernej** (zastępujemy iloraz iloczynem z uwzględnieniem założeń).
5. Wyznaczamy **pierwiastki wielomianu** oraz szkicujemy wykres.
6. Z wykresu odczytujemy zbiór rozwiązań danej nierówności.
7. Wyznaczamy rozwiązanie nierówności wymiernej uwzględniając dziedzinę.

II sposób:

1. Wyznaczamy **dziedzinę nierówności wymiernej**.
2. Mnożymy obustronnie nierówność przez kwadrat mianownika lub przez inne wyrażenia, których znak jest jednoznacznie określony.
3. Wykonujemy wskazane działania.
4. Wyznaczamy pierwiastki wielomianu oraz szkicujemy wykres.
5. Z wykresu odczytujemy zbiór rozwiązań danej nierówności.
6. Wyznaczamy rozwiązanie nierówności wymiernej uwzględniając dziedzinę.

Słownik

dziedzina nierówności wymiernej

dziedziną nierówności wymiernej są wszystkie liczby rzeczywiste za wyjątkiem pierwiastków wielomianu $W_2(x)$ znajdującego się w mianowniku danego wyrażenia $\frac{W_1(x)}{W_2(x)}$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{x : W_2(x) = 0\}$$

pierwiastek wielomianu

pierwiastkiem wielomianu $W(x)$ nazywamy liczbę rzeczywistą a , dla której $W(a) = 0$

Infografika

Polecenie 1

Zapoznaj się z przykładem przedstawionym w infografice, a następnie wykonaj polecenie 2 i 3.

Polecenie 2

Rozwiąż nierówność wymierną $\frac{x-6}{2x+6} \leq 1$ dwoma sposobami.

Polecenie 3

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Ćwiczenie 2



Ćwiczenie 3



Ćwiczenie 4



Ćwiczenie 5



Ćwiczenie 6

Rozwiąż nierówność: $\frac{x^2-9}{x-3} \geq 0$.



Ćwiczenie 7

Rozwiąż nierówność: $\frac{5}{x-2} > 2$.



Ćwiczenie 8

Funkcja $f(x) = \frac{6x+a}{5x+10}$ przyjmuje wartości dodatnie dla wszystkich argumentów ze zbioru $(-\infty; -2) \cup (3; +\infty)$. Wyznacz wartość współczynnika a .



Ćwiczenie 9

Wykaż, że jeśli liczby a, b, c są dodatnie, to $a + b + c + \frac{ab+bc+ac}{abc} \geq 6$.



Dla nauczyciela

Autor: Monika Dudek

Przedmiot: Matematyka

Temat: Nierówność wymierna

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

III. Równania i nierówności.

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

2) rozwiązuje równania i nierówności wymierne nie trudniejsze niż

$$\frac{x+1}{x(x-1)} + \frac{1}{x+1} \geq \frac{2x}{(x-1)(x+1)}.$$

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- rozwiązuje proste nierówności wymierne;
- wykorzystuje pojęcie ułamka algebraicznego jednej zmiennej przekształcając wyrażenia algebraiczne;
- doprowadza nierówność wymierną do równoważnej nierówności wielomianowej przy wyznaczonej dziedzinie nierówności wymiernej.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja;
- metoda tekstu przewodniego.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

- Uczniowie przed lekcją przypominają sobie sposoby rozwiązywania równań wymiernych, nierówności wielomianowych, wyznaczania dziedziny ułamka algebraicznego, skracania i rozszerzania ułamków algebraicznych.

Faza wstępna:

1. Nauczyciel podaje uczniom temat - „Nierówność wymierna”, wskazuje cele zajęć oraz ustala z nimi kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel dzieli uczniów na 3-osobowe lub 4-osobowe grupy. Uczniowie w grupach zapoznają się z informacjami w sekcji „Przeczytaj”. Analizują przedstawione definicje, twierdzenie, przykłady i notują pytania. Następnie przedstawiają pytania na forum klasy. Odpowiadają na nie uczniowie z innych grup. Nauczyciel wyjaśnia ewentualne wątpliwości.
2. Uczniowie indywidualnie analizują materiał przedstawiony w Infografice. Nauczyciel wyjaśnia ewentualne wątpliwości, które pojawiły się po zapoznaniu się z materiałem.
3. Uczniowie wykonują w grupach polecenie nr 2 oraz 3 z sekcji „Infografika”. Uczniowie w poleceniu 2 rozwiązują nierówność wymierną na dwa sposoby.
4. Nauczyciel sprawdza poprawność zadań. W razie wątpliwości udziela odpowiedzi na zadane przez uczniów pytania.
5. Następnie uczniowie w grupach rozwiązują krzyżówkę z sekcji „Sprawdź się”. Grupa, która poprawnie rozwiąże krzyżówkę jako pierwsza, wygrywa, a nauczyciel może

nagrodzić uczniów ocenami za aktywność. Rozwiązania są prezentowane na forum klasy i omawiane krok po kroku.

6. Uczniowie realizują indywidualnie ćwiczenia nr 3-9 z sekcji „Sprawdź się”. Po ich wykonaniu nauczyciel omawia najlepsze rozwiązania zastosowane przez uczniów.

Faza podsumowująca:

- Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
- Nauczyciel ponownie odczytuje temat lekcji: „Nierówność wymierna” i inicjuje krótką rozmowę na temat zrealizowanych celów (czego uczniowie się nauczyli).
- Na koniec prosi chętnego ucznia o podsumowanie i – jeśli to potrzebne – uzupełnia informacje.

Praca domowa:

- Uczniowie rozwiązują ćwiczenia 1-2 z sekcji „Sprawdź się”.

Materiały pomocnicze:

- [Wyrażenia wymierne. Równania wymierne](#)
- [Rozwiązywanie równań wymiernych](#)
- [Nierówności wielomianowe](#)

Wskazówki metodyczne:

Infografikę można wykorzystać na lekcji podsumowującej przed sprawdzianem z funkcji wymiernej lub w trakcie lekcji „Zbiór rozwiązań nierówności wymiernej”.

Infografikę można wykorzystać na zajęciach poświęconych rozwiązywaniu nierówności.