

Pola figur podobnych

Przykłady figur podobnych i zależności między ich polami, a współczynnikiem skali podobieństwa. Prezentacja multimedialna obliczania pola powierzchni figury podobnej w danej skali.

Przykłady na sposób rozwiązywania zadań wykorzystujących zależności między polami figur podobnych.

Zadania wykorzystujące zależności pomiędzy polami figur podobnych. Zadania o zróżnicowanym stopniu trudności, w tym interaktywne.

Obliczanie pól figur podobnych, zależności pomiędzy odcinkami w figurach podobnych. Ćwiczenia, w tym interaktywne.

Pola figur podobnych

Stosunek pól figur podobnych

Stosunek odpowiednich odcinków figur podobnych jest równy skali podobieństwa.

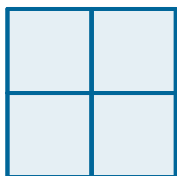
Zastanowimy się teraz, jaka jest zależność między polami takich figur.

Przykład 1

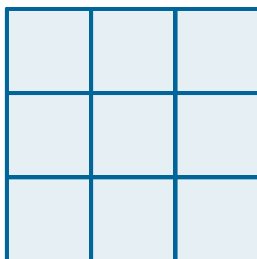
Przyjmijmy, że pole niebieskiego kwadratu jest równe 1. Kwadrat ten jest podobny do każdego z pozostałych kwadratów. Pod rysunkami zapisana jest skala podobieństwa danego kwadratu do kwadratu niebieskiego. Zapisane są też pola tych figur. Co zauważasz?



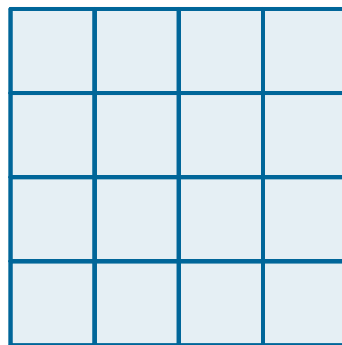
$P = 1$



$k = 2$
 $P = 4$



$k = 3$
 $P = 9$



$k = 4$
 $P = 16$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Odpowiedź: Pole każdego z narysowanych kwadratów jest iloczynem pola najmniejszego kwadratu i kwadratu skali podobieństwa.

Przykład 2

Pola figur podobnych



etap 1 z 10



Na rysunku obok widzimy kwadrat.

Przyjmijmy, że długość boku tego kwadratu wynosi 1.

Jakie jest jego pole?



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/b/P15nVAEye>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Przykład 3

Przyprostokątne trójkąta prostokątnego mają długości 4 dm i 6 dm. Każdą z przyprostokątnych zmniejszamy dwukrotnie. Oblicz stosunek pola pomniejszonego trójkąta do pola danego trójkąta.

Każdy z boków trójkąta zmniejszono dwukrotnie. Zatem skala podobieństwa trójkąta otrzymanego do trójkąta danego jest równa $\frac{1}{2}$. Wynika z tego, że przyprostokątne trójkąta pomniejszonego mają długości 2 dm i 3 dm.

Oznaczmy:

- P – pole danego trójkąta,
- P_1 – pole trójkąta pomniejszonego.

$$P = \frac{4 \cdot 6}{2} = 12$$

$$P = 12 \text{ dm}^2$$

$$P_1 = \frac{2 \cdot 3}{2} = 3$$

$$P_1 = 3 \text{ dm}^2$$

$$\frac{P_1}{P} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}.$$

Stosunek pól tych trójkątów jest równy $\frac{1}{4}$, czyli jest równy kwadratowi skali podobieństwa.

Przykład 4

Prostokątna kartka w notesie ma wymiary 10 cm i 8 cm. Kartka w książce ma wymiary 30 cm i 24 cm. Ile razy pole powierzchni kartki w książce jest większe od pola powierzchni kartki w notesie?

Zauważmy, że prostokąty, w kształcie których są kartki, są podobne. Skala podobieństwa prostokąta w kształcie którego jest kartka w książce do prostokąta, w kształcie którego jest kartka w notesie, jest równa

$$\frac{30}{10} = \frac{24}{8} = 3.$$

Obliczamy stosunek pól tych prostokątów.

$$\frac{30 \text{ cm} \cdot 24 \text{ cm}}{10 \text{ cm} \cdot 8 \text{ cm}} = 9.$$

Stosunek pól powierzchni kartek jest równy 9, czyli jest równy kwadratowi skali podobieństwa.

Na podstawie powyższych przykładów możemy wnioskować, że jeśli figura F jest podobna do figury G w skali k , to stosunek pól tych figur jest równy k^2 .

Sprawdźmy nasze przypuszczenia jeszcze na kilku przykładach.

Ważne!

Stosunek pól figur podobnych jest równy kwadratowi skali podobieństwa.

Przykład 5

Pięciokąt M jest podobny do pięciokąta K w skali 1 : 8. Pole pięciokąta M jest równe 2. Oblicz pole pięciokąta K .

Korzystamy z tego, że stosunek pól wielokątów podobnych jest równy kwadratowi skali podobieństwa. Stąd

$$\frac{2}{P} = \left(\frac{1}{8}\right)^2$$

$$\frac{2}{P} = \frac{1}{64}$$

$$P = 128.$$

Pole pięciokąta K jest równe 128.

Przykład 6

Jedną z największych atrakcji turystycznych Gdańska jest Bazylika Mariacka, na której znajduje się największy w Polsce zegar. Został on zbudowany w 1637 r.

Pole powierzchni tarczy tego zegara jest równe około 16 m^2 . Pole powierzchni tarczy zegarka na rękę jest równe około 16 cm^2 . Określ skalę podobieństwa tych tarcz.

Zapisujemy oba pola w tej samej jednostce pola.

$$16 \text{ m}^2 = (16 \cdot 100 \cdot 100) \text{ cm}^2 = 160\,000 \text{ cm}^2$$

Dzielimy pole powierzchni większej tarczy przez pole powierzchni mniejszej tarczy. Obliczamy w ten sposób kwadrat skali podobieństwa tarcz.

$$k^2 = \frac{160000}{16} = 10000.$$

Obliczamy teraz skalę podobieństwa.

$$k = \sqrt{10000} = 100.$$

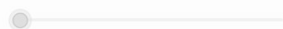
Skala podobieństwa tarczy gdańskiego zegara do tarczy zegarka na rękę wynosi 100.

Przykład 7

Skala a pola kwadratów

Dane są dwa kwadraty narysowane w pewnej skali.

Zmień skalę.



1:1 1:2 1:3 1:4 1:5

Obserwuj zmianę pola zielonego kwadratu.

Jaki jest stosunek pól w zależności od skali?

1 : ?



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/b/P15nVAEye>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

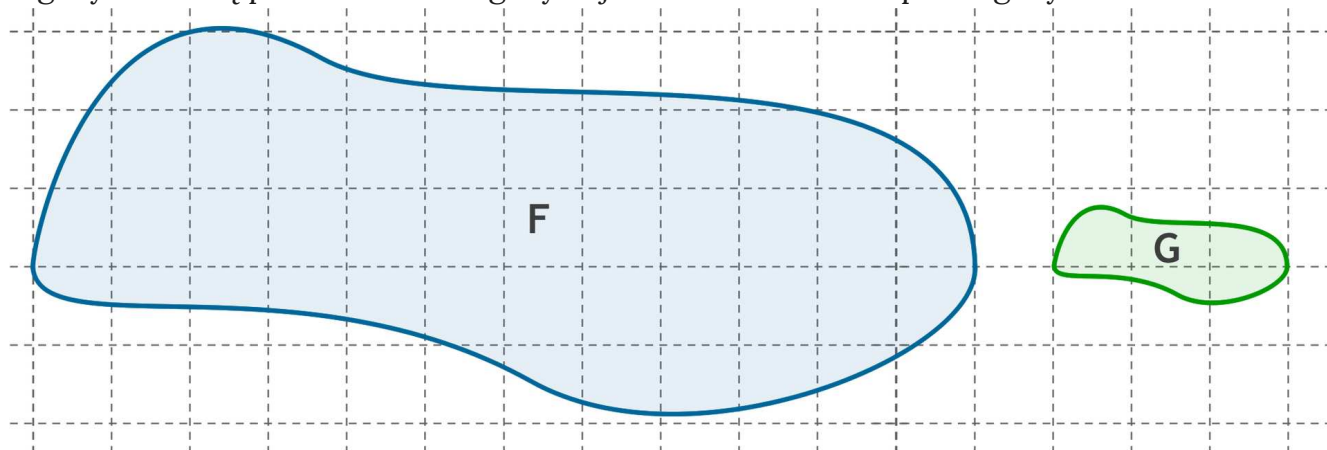
Obliczanie pól podobnych

Zauważmy, że jeżeli figura F jest podobna do figury G w skali k , pole figury F jest równe P , a pole figury G jest równe P_1 , to $P = k^2 \cdot P_1$ oraz $P_1 = \frac{1}{k^2} \cdot P$.

Wykorzystamy teraz podane równości w zadaniach.

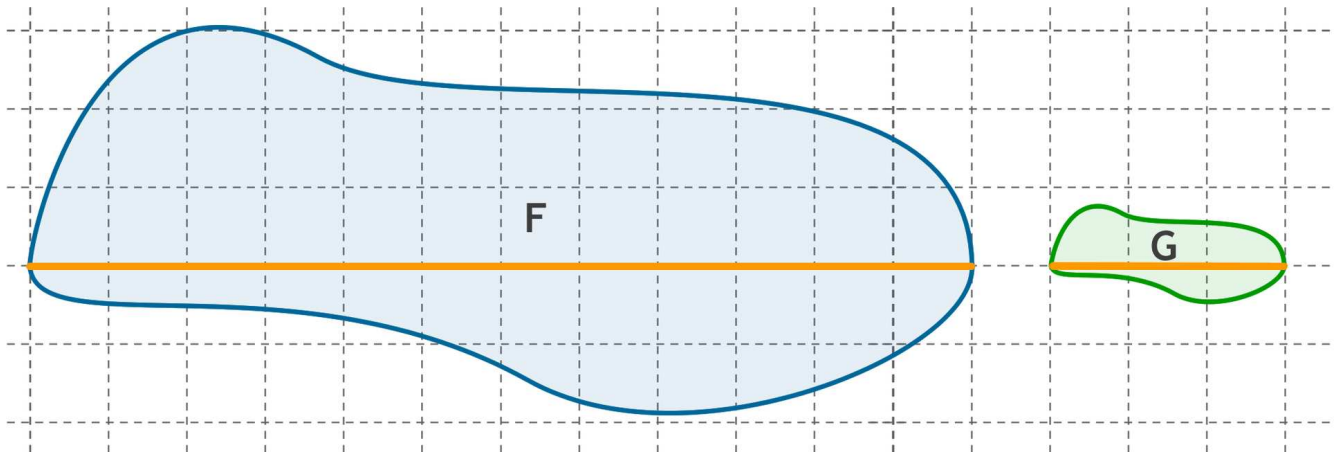
Przykład 8

Figury F i G są podobne. Pole figury G jest równe 7. Oblicz pole figury F .



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Określamy najpierw skalę podobieństwa figur. W tym celu zaznaczamy w obu figurach odpowiadające sobie odcinki. Skala podobieństwa figury F do figury G jest równa stosunkowi długości tych odcinków.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Jeżeli przyjmiemy, że długość małej kratki jest równa a , to

$$k = \frac{12a}{3a} = 4.$$

Zatem $P_F = k^2 \cdot P_G$, gdzie

P_F – pole figury F

P_G – pole figury G .

Stąd

$$P_F = 4^2 \cdot 7 = 16 \cdot 7 = 112.$$

Pole figury F jest równe 112.

Przykład 9

Pole rombu F jest równe 125. Romb ten jest podobny do rombu G , którego przekątne mają długości 2 i 5. Znajdź sumę długości przekątnych rombu F .

Oznaczmy:

- P_F – pole rombu F ,
- P_G – pole rombu G ,
- k – skala podobieństwa rombu F do rombu G .

Wtedy

$$P_F = k^2 \cdot P_G$$

$$125 = k^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 5$$

$$k^2 = 25$$

$$k = \sqrt{25} = 5$$

bo

$$k > 0.$$

Skala podobieństwa rombów jest równa 5. Oznacza to, że każda z przekątnych rombu F jest 5 razy dłuższa od odpowiedniej przekątnej rombu G .

Zatem długości przekątnych rombu F są równe 10 i 25.

Suma długości tych przekątnych jest równa 35.

Przykład 10

Dwa wielokąty są podobne. Obwód pierwszego z nich jest równy 12, a pole 14. Obwód drugiego wielokąta jest równy 2. Oblicz pole drugiego wielokąta.

Obliczamy skalę k podobieństwa wielokątów.

$$k = \frac{12}{2} = 6.$$

Obliczamy pole P_2 drugiego wielokąta.

$$P_2 = \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot 14$$

$$P_2 = \frac{14}{36} = \frac{7}{18}.$$

Pole drugiego wielokąta jest równe $\frac{7}{18}$.

Przykład 11

Skala podobieństwa dwóch kwadratów jest równa 0,5. Oblicz długość boku mniejszego kwadratu, jeżeli różnica pól tych kwadratów wynosi 27.

Niech P oznacza pole mniejszego kwadratu. Wtedy pole większego kwadratu P_W to

$$P_W = \left(\frac{1}{0,5}\right)^2 \cdot P.$$

Zatem

$$P_W = \left(\frac{1}{\frac{1}{2}}\right)^2 \cdot P = 2^2 \cdot P = 4P.$$

Korzystamy z tego, że różnica pól tych kwadratów jest równa 27 i wyznaczamy pole mniejszego kwadratu i długość a jego boku.

$$P_W - P = 27$$

$$4P - P = 27$$

$$3P = 27$$

$$P = 9$$

$$a^2 = 9$$

$$a = 3$$

bo

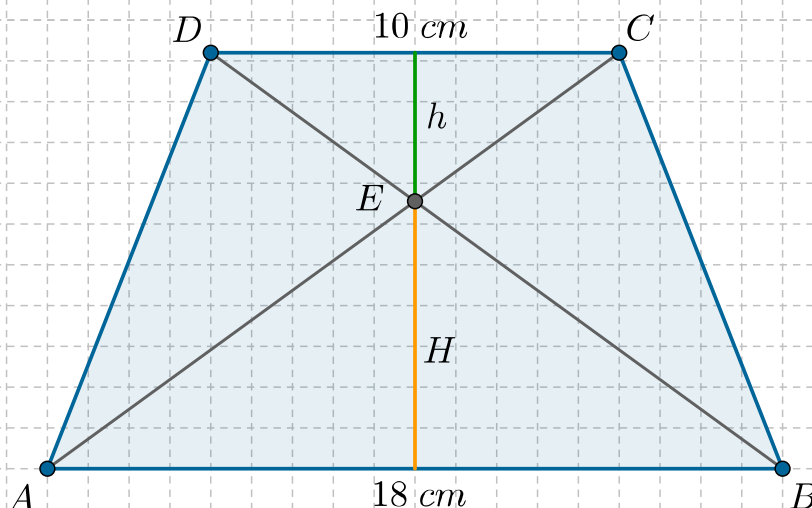
$$a > 0.$$

Długość boku mniejszego kwadratu jest równa 3.

Przykład 12

Podstawy trapezu równoramiennego $ABCD$ mają długości 10 cm i 18 cm.

Przekątne trapezu przecinają się w punkcie E . Wysokość trójkąta DEC jest równa 4 cm. Oblicz pole trapezu.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Zauważmy, że trójkąty AEB i DEC mają równe kąty: kąty AEB i DEC to kąty wierzchołkowe, mają więc równe miary, kąty EDC i EBA to kąty naprzemianległe przy prostych równoległych, podobnie kąty EAB i DCA . Na podstawie cechy kkk stwierdzamy, że trójkąty AEB i DEC są podobne.

Skala podobieństwa k tych trójkątów jest równa stosunkowi długości ich podstaw.

$$k = \frac{18}{10} = \frac{9}{5}.$$

Stosunek wysokości tych trójkątów jest równy skali podobieństwa.

$$\frac{H}{h} = k$$

$$\frac{H}{4} = \frac{9}{5}$$

$$5H = 36 : 5$$

$$H = 7,2\text{ cm}.$$

Wysokość trapezu jest równa sumie wysokości trójkątów AEB i DEC .

$$H + h = 7,2 + 4$$

$$H + h = 11,2 \text{ cm.}$$

Obliczamy pole trapezu.

$$P = \frac{1}{2} \cdot (18 + 10) \cdot 11,2$$

$$P = \frac{1}{2} \cdot 28 \cdot 11,2$$

$$P = 14 \cdot 11,2$$

$$P = 156,8 \text{ cm}^2.$$

Pole trapezu jest równe $156,8 \text{ cm}^2$.

Przykład 13

Jezioro Śniardwy to największe jezioro w Polsce. Powierzchnia tego jeziora jest równa około $113,4 \text{ km}^2$. Na mapie powierzchnia ta jest równa $0,126 \text{ cm}^2$. W jakiej skali wykonana jest mapa?

Zapisujemy najpierw powierzchnię jeziora w cm^2 .

$$1 \text{ km} = 1000 \text{ m} = 1000 \cdot 100 \text{ cm} = 100000 \text{ cm} = 10^5 \text{ cm}$$

$$1 \text{ km}^2 = 10^5 \cdot 10^5 \text{ cm}^2 = 10^{10} \text{ cm}^2$$

$$113,4 \text{ km}^2 = 113,4 \cdot 10^{10} \text{ cm}^2.$$

Obliczamy kwadrat skali podobieństwa figury, w kształcie której jest jezioro na mapie, i figury, w kształcie której jest powierzchnia jeziora w rzeczywistości.

$$k^2 = \frac{0,126}{113,4 \cdot 10^{10}} = \frac{1}{900 \cdot 10^{10}} = \frac{1}{9 \cdot 10^{12}}.$$

Obliczamy skalę podobieństwa tych figur.

$$k = \sqrt{\frac{1}{9000000000000}} = \frac{1}{3000000}.$$

Skala mapy jest równa obliczonej skali podobieństwa.

Mapa wykonana jest więc w skali 1 : 3 000 000.

Ćwiczenie 1



Figura F jest podobna do figury G w skali 1 : 7. Ile wynosi stosunek pola figury G do pola figury F ? Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐ 49 : 1

☐ 7 : 1

☐ 1 : 49

☐ 1 : 7

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 2



Wiadomo, że $A = (-5, 2)$, $B = (1, 2)$, $C = (1, 6)$. Trójkąt ABC jest podobny do trójkąta EFG w skali $2 : 1$. Zaznacz wszystkie zdania prawdziwe.

☐ Pole trójkąta EFG jest dwukrotnie mniejsze od pola trójkąta ABC .

☐ Suma pola trójkąta ABC i pola trójkąta EFG jest równa 15.

☐ Różnica pola trójkąta ABC i pola trójkąta EFG jest mniejsza od 10.

☐ Pole trójkąta ABC jest dwukrotnie mniejsze od pola trójkąta EFG .

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 3



Pole koła zwiększono n -krotnie. Co z tego wynika? Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐ Obwód koła zwiększono dziesięciokrotnie.

☐ Średnicę koła zwiększono dwudziestokrotnie.

☐ Promień koła zwiększono n -krotnie.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 4



Pole powierzchni kwadratowej działki pani A jest 25 razy większe od pola kwadratowej działki pani B . Uzupełnij odpowiedź, wpisując w lukę odpowiednią liczbę.

Odpowiedź: Należy kupić razy więcej siatki na odgrodzenie działki pani A , niż działki pani B .

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 5



Stosunek obwodów dwóch kół jest równy $0,75$. Ile wynosi stosunek pola większego koła do mniejszego? Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐ $16 : 9$

☐ $7 : 5$

☐ $25 : 16$

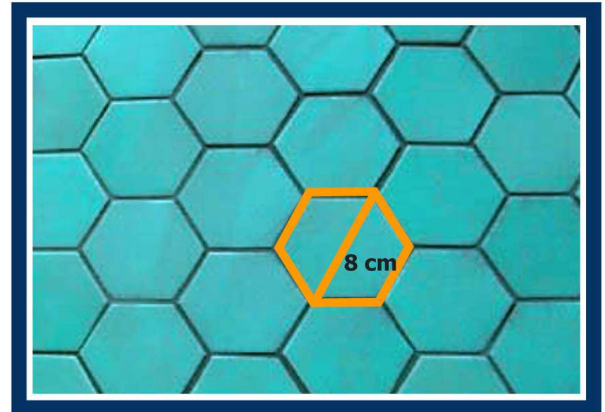
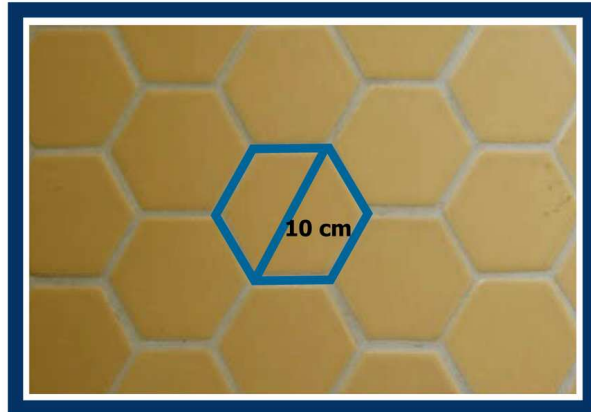
☐ $4 : 3$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 6



Płytki terakoty jest w kształcie sześciokąta foremego. Płytki glazury ma również kształt sześciokąta foremnego.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

W sześciokątach tych dłuższe przekątne są odpowiednio równe 10 cm i 8 cm. Ile razy większe jest pole powierzchni płytki terakoty od pola powierzchni płytki glazury? Zaznacz odpowiedź zawierającą prawidłowe rozwiązanie.

☐ $P_t = \frac{15}{12} P_g$

☐ $P_t = \frac{10}{8} P_g$

☐ $P_t = \frac{25}{16} P_g$

☐ $P_t = \frac{5}{4} P_g$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 7



Trapez $ABCD$ jest podobny do trapezu $EFGH$ w skali 4, 5. Zaznacz wszystkie zdania prawdziwe.

- ☐ Pole trapezu $ABCD$ stanowi $\frac{81}{4}$ pola trapezu $EFGH$.
- ☐ Pole trapezu $ABCD$ jest o $\frac{77}{81}$ większe od pola trapezu $EFGH$.
- ☐ Wysokość trapezu $EFGH$ stanowi $\frac{4}{9}$ wysokości trapezu $ABCD$.
- ☐ Obwód trapezu $ABCD$ jest 4, 5 razy większy od obwodu trapezu $EFGH$.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 8



Trójkąt ABC o bokach długości 15 cm, 17 cm, 8 cm jest podobny do trójkąta EFG . Pole trójkąta EFG jest równe 15 cm^2 . Jaką długość mają boki trójkąta EFG ? Zaznacz odpowiedź zawierającą prawidłowe rozwiązanie.

- ☐ Długości boków trójkąta EFG wynoszą: 22, 5 cm, 12 cm, 25, 5 cm.
- ☐ Długości boków trójkąta EFG wynoszą: 30 cm, 34 cm, 16 cm.
- ☐ Długości boków trójkąta EFG wynoszą: 7, 5 cm, 4 cm, 8, 5 cm.
- ☐ Długości boków trójkąta EFG wynoszą: 15 cm, 17 cm, 8 cm.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 9



Przekątne rombu R są równe 24 cm i 12 cm. Pole rombu W jest równe 64 cm^2 . Jaką długość ma dłuższa przekątna rombu W ? Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐ 16 cm

☐ $10\frac{2}{3}$ cm

☐ 36 cm

☐ 12 cm

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 10



Prostokąt $A'B'C'D'$ jest podobny w skali k do prostokąta $ABCD$, którego pole wynosi 144 cm^2 . Oblicz pole prostokąta $A'B'C'D'$ dla podanej skali. Połącz skalę z odpowiadającą jej wartością pola prostokąta.

$$k = 2$$

$$576 \text{ cm}^2$$

$$k = \frac{1}{4}$$

$$288 \text{ cm}^2$$

$$k = 0,1$$

$$9 \text{ cm}^2$$

$$k = \sqrt{2}$$

$$1,44 \text{ cm}^2$$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 11



Równoległobok $A'B'C'D'$ jest podobny do równoległoboku $ABCD$ w skali $\frac{3}{2}$. Jaki jest stosunek pól tych równoległoboków? Zaznacz wszystkie odpowiedzi zawierające prawidłowe rozwiązania.

☐ $1\frac{1}{2}$

☐ $2\frac{1}{4}$

☐ $\frac{2}{3}$

☐ $\frac{4}{9}$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 12



Zaznacz wszystkie zdania prawdziwe.

☐ Dowolne dwa sześciokąty foremne o jednakowych polach są podobne.

☐ Dowolne dwa czworokąty o równych polach są podobne.

☐ Dowolne dwa wielokąty podobne mają jednakowe pola.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 13



W trójkącie prostokątnym wysokość poprowadzona z wierzchołka kąta prostego podzieliła przeciwprostokątną długości c na dwa odcinki, z których jeden ma długość x . Oblicz pole tego trójkąta. Zaznacz odpowiedź zawierającą prawidłowe rozwiązanie.

☐ $P = \frac{1}{2} \sqrt{(c-x)^2}$

☐ $P = \frac{c}{2} \sqrt{(c-x)}$

☐ $P = \frac{1}{2} \sqrt{x(c-x)}$

☐ $P = \frac{c}{2} \sqrt{x(c-x)}$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 14



Prostokątną fotografię o wymiarach 12 cm na 18 cm powiększono na kserografie tak, że jej szerokość jest równa 21 cm. Uzupełnij odpowiedź, wpisując w lukę odpowiednią liczbę.

Odpowiedź: Pole powiększonej fotografii wynosi cm².

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 15



Wycinek W koła o promieniu 6 cm ma pole równe 6π cm². Wycinek M koła o promieniu 8 cm ma pole równe $\frac{32}{3}\pi$ cm². Uzupełnij odpowiedź, przeciągając w luki odpowiednie wyrażenia lub kliknij w lukę i wybierz odpowiedź z listy rozwijalnej.

Odpowiedź: Wycinki te do siebie podobne. Zatem ich skala podobieństwa .

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 16



Koło K_1 jest podobne do koła K_2 w skali $k = 3$. Ile wynosi pole koła K_2 , jeśli wiadomo, że wycinkowi koła K_1 o polu 6π odpowiada kąt środkowy o mierze 60° ? Zaznacz odpowiedź zawierającą prawidłowe rozwiązanie.

☐ 8π

☐ 2π

☐ 4π

☐ 9π

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 17



Dwa sześciokąty foremne mają pola równe 36 oraz 18. Oblicz długości boków tych sześciokątów oraz określ skalę podobieństwa promieni okręgów wpisanych w te sześciokąty. Zaznacz odpowiedź zawierającą prawidłowe rozwiązanie.

☐ Długości boków tych sześciokątów to odpowiednio $4\sqrt{2}\sqrt[4]{3}$ i $2\sqrt[4]{2}$. Skala podobieństwa to $k = \sqrt{3}$.

☐ Długości boków tych sześciokątów to odpowiednio $2\sqrt{2}\sqrt[4]{3}$ i $2\sqrt[4]{3}$. Skala podobieństwa to $k = \sqrt{2}$.

☐ Długości boków tych sześciokątów to odpowiednio $2\sqrt{2}\sqrt[4]{3}$ i $2\sqrt[3]{4}$. Skala podobieństwa to $k = \sqrt{2}$.

☐ Długości boków tych sześciokątów to odpowiednio $4\sqrt{3}\sqrt[4]{2}$ i $3\sqrt[2]{3}$. Skala podobieństwa to $k = \sqrt{3}$.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 18

Podstawami trapezu $ABCD$ są odcinki AB i CD . Przekątne tego trapezu przecinają się w punkcie S . Pole trójkąta ASB jest równe 25, pole trójkąta DSC jest równe 9. Ile wynosi pole tego trapezu? Zaznacz odpowiedź zawierającą prawidłowe rozwiązanie.

☐ 56

☐ 34

☐ 64

☐ 136

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.