



Wartości funkcji trygonometrycznych dla kąta 45°

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Galeria zdjęć interaktywnych](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Wartości funkcji trygonometrycznych dla kąta 45°

Źródło: Chris Ashe, dostępny w internecie: www.unsplash.com.

Już w starożytności korzystano z własności szczególnych trójkątów. W Egipcie Faraonów tak zwany trójkąt egipski, czyli trójkąt o bokach 3, 4, 5, pozwalał budowniczym i architektom wyznaczać kąt prosty bez znajomości twierdzenia Pitagorasa, czy innych bardziej zaawansowanych metod.

Czasy starożytne już dawno minęły, lecz trójkąty o specjalnych własnościach, nadal znajdują zastosowanie.

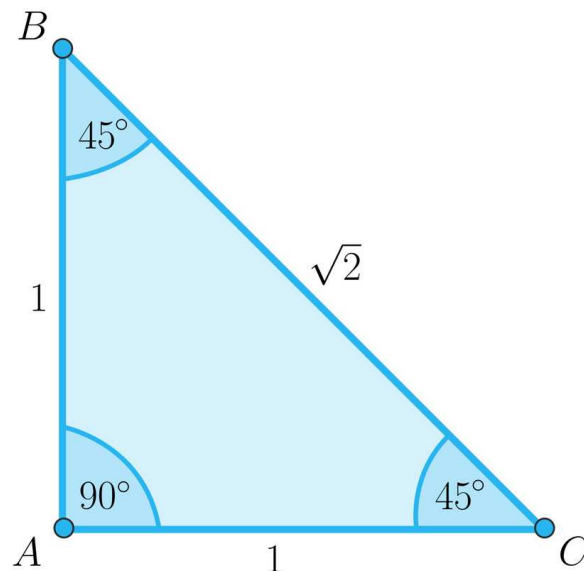
W tej lekcji przyjrzymy się trójkątowi równoramiennemu prostokątnemu i wartościom funkcji trygonometrycznych dla kąta 45° .

Twoje cele

- Poznasz wartości funkcji trygonometrycznych dla kąta 45° .
- Wykorzystasz wartości funkcji trygonometrycznych kąta 45° w obliczaniu pól i obwodów figur na płaszczyźnie.

Przeczytaj

Zacznijmy od przeanalizowania poniższego rysunku.



Przedstawiony został równoramienny i prostokątny trójkąt ABC . Ramiona w takim trójkącie stanowią jednocześnie jego przyprostokątne i są równej długości. Ponadto, kąty $\sphericalangle ABC$ i $\sphericalangle BCA$ są sobie równe i wynoszą 45° . Obliczymy wartości wszystkich funkcji trygonometrycznych dla kąta $\sphericalangle ABC$.

Aby policzyć sinus kąta $\sphericalangle ABC$, dzielimy długość przyprostokątnej leżącej naprzeciw badanego kąta przez długość przeciwprostokątnej:

$$\sin 45^\circ = \frac{|AC|}{|BC|} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Aby obliczyć cosinus kąta $\sphericalangle ABC$, obliczamy stosunek długości przyprostokątnej leżącej przy badanym kącie i przeciwprostokątnej:

$$\cos 45^\circ = \frac{|AB|}{|BC|} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

W celu znalezienia wartości tangensa kąta $\sphericalangle ABC$, dzielimy długość przyprostokątnej leżącej naprzeciwko badanego kąta przez długość odcinka stanowiącego przyprostokątną leżącą przy badanym kącie:

$$\operatorname{tg} 45^\circ = \frac{|AC|}{|AB|} = \frac{1}{1} = 1$$

Twierdzenie: O wartościach funkcji trygonometrycznych dla kąta 45°

Funkcje trygonometryczne dla kąta 45° przyjmują następujące wartości:

- $\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$;
- $\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$;
- $\operatorname{tg} 45^\circ = 1$.

Umiemy już obliczać wartości funkcji trygonometrycznych kąta 45° .

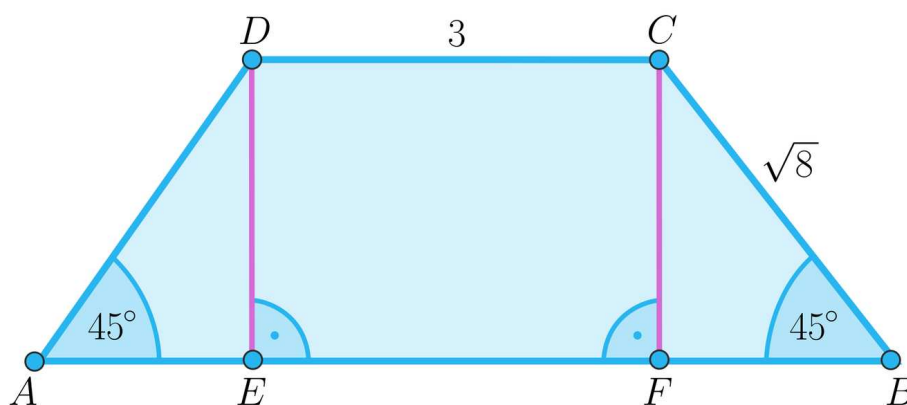
Nasuającym się teraz pytaniem jest: „*Jak możemy tę wiedzę wykorzystać?*”

Znajomość powyższych wartości znajduje swoje zastosowania w sytuacjach, które wymagają wyznaczenia długości boków trójkąta równoramiennego prostokątnego, a dysponujemy długością tylko jednego boku. Możemy wykorzystać tę wiedzę także w innych figurach niż trójkąty. W niektórych sytuacjach jesteśmy w stanie wyodrębnić trójkąt równoramienny prostokątny, dzieląc bardziej złożoną figurę na prostsze składowe.

Prostym przykładem takiej figury może być trapez o pewnych szczególnych własnościach. Gdy ramię trapezu tworzy z podstawą kąt ostry 45° , owo ramię, wysokość trapezu i fragment podstawy tworzą pożądaną przez nas trójkąt. Rozważymy teraz sytuację, gdy możemy policzyć pole trapezu mając dane zaledwie dwa boki.

Przykład 1

Obliczmy pole trapezu równoramiennego $ABCD$ przedstawionego na poniższym rysunku.



Zauważmy, że punkty FBC tworzą trójkąt równoramienny prostokątny, gdzie odcinek CF jest wysokością trapezu.

Znamy długość przeciwprostokątnej, zatem korzystając z wartości sinusa 45° możemy znaleźć wysokość.

Oznaczając długość odcinka CF przez h mamy:

$$\sin 45^\circ = \frac{h}{\sqrt{8}}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{h}{2\sqrt{2}}$$

Mnożąc stronami równość przez $2\sqrt{2}$ otrzymujemy wartość h :

$$h = \frac{2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Zatem wysokość trapezu $ABCD$ wynosi $h = 2$.

Aby obliczyć żądane pole powierzchni, brakuje nam jeszcze informacji o długości dolnej podstawy.

Możemy zauważyć, że odcinek $|FB| = |CF| = 2$.

Ponadto odcinek $|AD| = \sqrt{8}$, gdyż trapez $ABCD$ jest równoramienny.

W identyczny sposób jak dla trójkąta FBC , możemy policzyć długości boków trójkąta AED .

Stąd otrzymamy, że odcinek AE ma również długość $|AE| = 2$.

Długość odcinka EF też jest nam znana, albowiem $|EF| = |CD| = 3$.

Wynika to z faktu, że $EFCD$ jest prostokątem.

Zatem długość dolnej podstawy wynosi $|AB| = 2 + 3 + 2 = 7$.

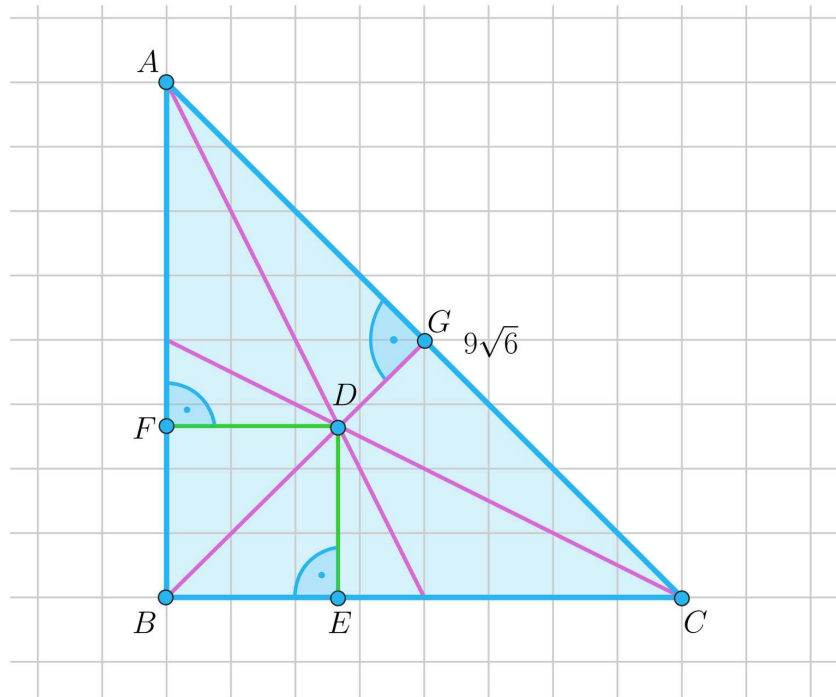
Korzystając ze wzoru na pole trapezu, uzyskujemy końcowy wynik

$$P = \frac{(3+7) \cdot 2}{2} = 10.$$

W bardziej złożonych zadaniach pojawia się konieczność rozbicia trójkąta na mniejsze trójkąty prostokątne, w których znajomość funkcji trygonometrycznych pozwoli nam wyznaczyć niezbędne długości odcinków.

Przykład 2

W trójkącie prostokątnym równoramiennym ABC długość przeciwprostokątnej wynosi $c = 9\sqrt{6}$. Środkowe tego trójkąta przecinają się w punkcie D , z którego poprowadzono odcinki padające pod kątem prostym na przyprostokątne. Oblicz pole utworzonego w ten sposób kwadratu (na rysunku jest to kwadrat $BEDF$).



Zauważmy, że w przypadku trójkąta prostokątnego równoramiennego wysokość poprowadzona z kąta prostego pokrywa się ze środkową trójkąta.

W związku z tym wysokość h poprowadzona z wierzchołka kąta prostego dzieli ten trójkąt na dwa trójkąty o kątach 45° , 45° , 90° .

Otrzymane w ten sposób trójkąty ABG i BCG są przystające, zaś krótszy bok każdego z nich ma długość równą połowie długości przeciwprostokątnej trójkąta ABC , tj.

$$h = \frac{9\sqrt{6}}{2}.$$

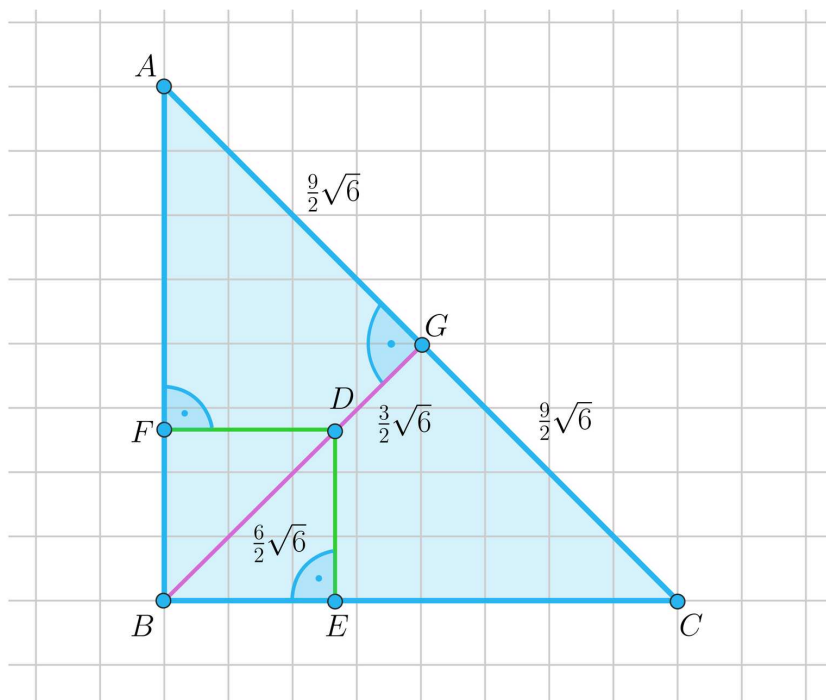
Następnie przypomnijmy, że punkt przecięcia środkowych w każdym trójkącie dzieli te środkowe w stosunku $2 : 1$, gdzie krótszy odcinek łączy środek ciężkości ze środkiem boku.

Punkt przecięcia środkowych w trójkącie nazywany jest zwykle **środkiem ciężkości trójkąta**.

Zatem punkt D dzieli wysokość BG na dwa odcinki o długościach:

$$|DG| = \frac{3}{2}\sqrt{6} \text{ i } |BD| = \frac{6}{2}\sqrt{6} = 3\sqrt{6}$$

Sytuację tę obrazuje poniższy rysunek (dla czytelności nie zaznaczono na nim środkowych wychodzących z wierzchołków A i C).



Znamy więc długość odcinka BD , wiemy też, że kąty $\sphericalangle BED$ i $\sphericalangle BFD$ są proste (wynika to z treści zadania).

Ponadto, kąty $\sphericalangle GBC$ i $\sphericalangle ABG$ mają po 45° .

Wykorzystamy funkcję sinus.

$$\sin 45^\circ = \frac{|DE|}{|BD|}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{|DE|}{3\sqrt{6}}$$

$$\frac{\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{6}}{2} = |DE|$$

$$|DE| = \frac{3\sqrt{12}}{2} = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$$

Znamy więc długość boku kwadratu $BEDF$. Jego pole wynosi zatem

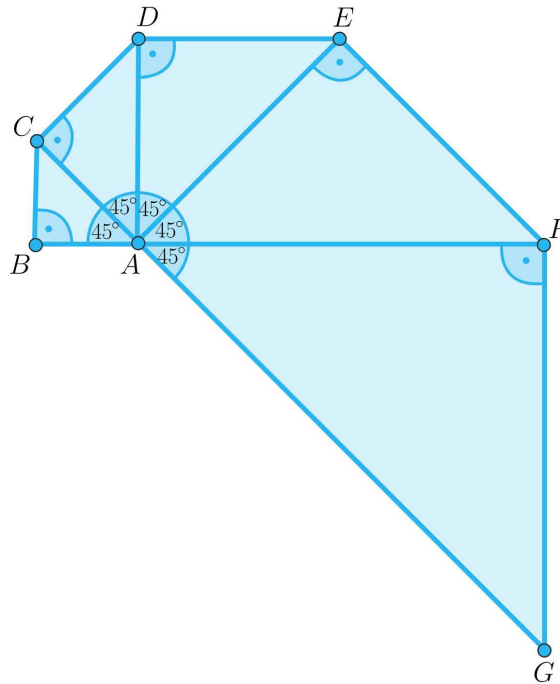
$$P = \left(3\sqrt{3}\right)^2 = 9 \cdot 3 = 27.$$

Czasami w zadaniu musimy skorzystać z funkcji trygonometrycznych kąta 45° wielokrotnie by osiągnąć zamierzony cel. Dobrze ilustruje to następujący przykład.

Przykład 3

Bardzo prosty szkic muszli amonitu uzyskano poprzez narysowanie trójkąta prostokątnego równoramiennego ABC , a następnie narysowaniu czterech trójkątów do niego podobnych. Każdy kolejny trójkąt dorysowywano w taki sposób, że

przeciwprostokątna poprzedniego trójkąta stawała się przyprostokątną dla kolejnego z nich. Otrzymany rysunek widoczny jest poniżej.



Pole tego szkicu wynosi $P = 217 \text{ cm}^2$. Jaką długość ma odcinek AB ? Oblicz obwód tego wielokąta.

Dla ułatwienia oznaczmy długość odcinka AB przez a .

Wówczas pole powierzchni trójkąta ABC wynosi $P_{ABC} = \frac{a^2}{2}$, zaś

$$|CD| = |AC| = \frac{a}{\sin 45^\circ} = \frac{a}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = a\sqrt{2}.$$

Zauważmy, że korzystając z tej samej wartości funkcji sinus jesteśmy w stanie wyznaczyć długości wszystkich pozostałych odcinków na tym rysunku:

- $|DE| = |AD| = |AC| \cdot \sqrt{2} = 2a$;
- $|EF| = |AE| = |AD| \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{2}a$;
- $|AF| = |FG| = |AE| \cdot \sqrt{2} = 4a$;
- $|AG| = |AF| \cdot \sqrt{2} = 4\sqrt{2}a$.

Rozważany przez nas wielokąt jest podzielony na trójkąty, których pola w łatwy sposób jesteśmy w stanie obliczyć.

Mamy bowiem:

- $P_{ACD} = \frac{|CD| \cdot |AC|}{2} = \frac{2a^2}{2} = a^2$;
- $P_{ADE} = \frac{|DE| \cdot |AD|}{2} = \frac{2 \cdot 2a^2}{2} = 2a^2$;

- $P_{AEF} = \frac{|EF| \cdot |AE|}{2} = 4a^2$;
- $P_{AFG} = \frac{|FG| \cdot |AF|}{2} = 8a^2$.

Łączne pole powierzchni całego rozważanego wielokąta wynosi zatem:

$$P = P_{ABC} + P_{ACD} + P_{ADE} + P_{AEF} + P_{AFG} = 15\frac{1}{2}a^2.$$

Podstawiając znaną nam wartość P otrzymujemy proste równanie kwadratowe, z którego jesteśmy w stanie wyliczyć długość boku AB .

$$217 \text{ cm}^2 = \frac{31a^2}{2},$$

$$\frac{434}{31} \text{ cm}^2 = a^2,$$

$$a^2 = 14 \text{ cm}^2,$$

$$a = \sqrt{14} \text{ cm} \vee a = -\sqrt{14} \text{ cm}.$$

Oczywiście długość boku trójkąta nie może być liczbą ujemną, więc

$$|AB| = \sqrt{14} \text{ cm}.$$

Obwód rozważanego wielokąta otrzymamy sumując odpowiednie długości boków rozpatrywanych w zadaniu trójkątów.

Mamy zatem

$$\begin{aligned} l &= |AB| + |BC| + |CD| + |DE| + |EF| + |FG| + |AG| = \\ &= a + a + a\sqrt{2} + 2a + 2\sqrt{2}a + 4a + 4\sqrt{2}a = \\ &= 8a + 7\sqrt{2}a = (8\sqrt{14} + 7\sqrt{28}) \text{ cm}. \end{aligned}$$

Ostatecznie obwód tego wielokąta wynosi $8\sqrt{14} + 14\sqrt{7} \text{ cm}$, zaś długość boku AB to $\sqrt{14} \text{ cm}$.

Słownik

funkcje trygonometryczne

funkcje wyrażające między innymi stosunki między długościami boków trójkąta prostokątnego względem miar jego kątów wewnętrznych; podstawowymi funkcjami trygonometrycznymi są sinus, cosinus, tangens i cotangens

środkowa trójkąta

odcinek łączący wierzchołek trójkąta ze środkiem przeciwległego boku; każdy trójkąt ma trzy środkowe, odpowiadające poszczególnym jego wierzchołkom

środek ciężkości trójkąta

punkt, w którym przecinają się wszystkie trzy środkowe trójkąta (inną jego nazwą jest barycentrum); punkt ten dzieli każdą ze środkowych na dwie części, przy czym odcinek łączący barycentrum z wierzchołkiem jest dwukrotnie dłuższy od odcinka łączącego środek ciężkości trójkąta ze środkiem boku

Galeria zdjęć interaktywnych

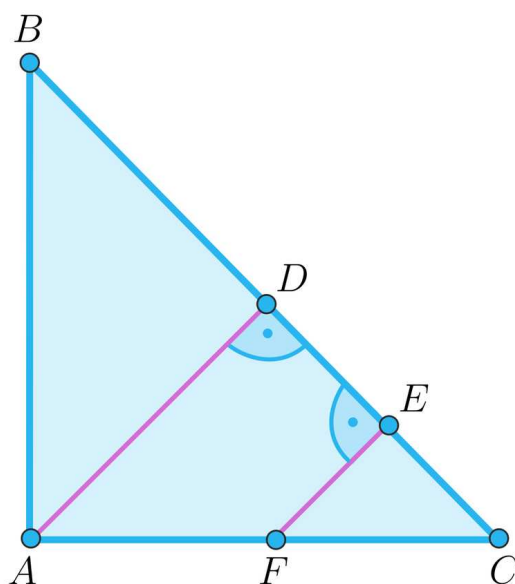
Polecenie 1

Zapoznaj się z galerią zdjęć interaktywnych. Spróbuj najpierw samodzielnie rozwiązywać zamieszczone tam zdania, a dopiero następnie porównaj swoje rozwiązanie z przedstawionym w medium.

Polecenie 2

Wzorując się na przedstawionym w galerii zdjęć interaktywnych rozumowaniu, rozwiąż następujące zadanie:

Odcinek AD stanowi środkową trójkąta prostokątnego równoramiennego ABC poprowadzoną z wierzchołka A kąta prostego. Punkt F dzieli bok AC na dwie równe części. Poprowadzono z niego odcinek FE łączący go z przeciwprostokątną, równoległy do AD . Pole otrzymanego w ten sposób trapezu prostokątnego $ADEF$ wynosi 12.



Oblicz pole trójkąta ABC .

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Uzupełnij tekst poprzez przeciągnięcie poprawnych odpowiedzi.

Wartości $\sin 45^\circ$ i $\cos 45^\circ$ są i wynoszą .

Wartość tg wynosi 1.

Pozwalają one obliczać długości różnorodnych odcinków – przykładowo, przekątną kwadratu o boku długości ma długość $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

Z kolei wysokość trójkąta prostokątnego równoramiennego, poprowadzono na przeciwprostokątną, w którym ramię ma długość 2 cm wynosi .

przeciwnie

$\frac{\sqrt{2}}{4}$

$\frac{\sqrt{2}}{2}$

90°

1

$\sqrt{2}$

równe

odwrotnie

$\frac{1}{2}$

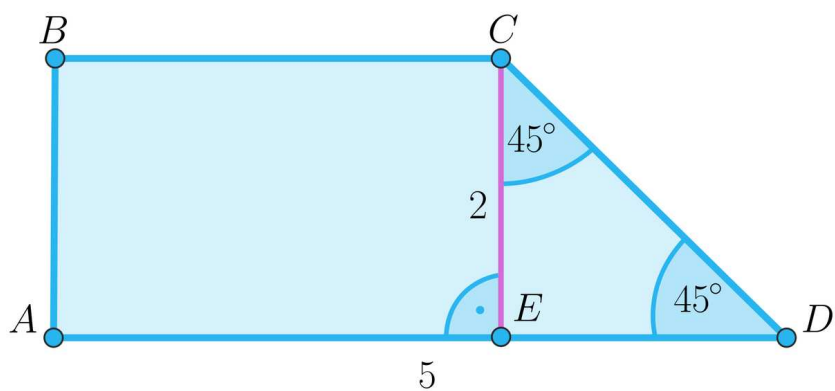
45°

$\frac{2\sqrt{2}}{2}$

Ćwiczenie 2



Na podstawie załączonego rysunku zaznacz poprawną odpowiedź.



Jakie jest pole powierzchni trapezu $ABCD$, jeśli wiadomo, że $|AD| = 5$ i $|CE| = 2$?

☐ $\frac{1}{4}$

☐ $4\sqrt{2}$

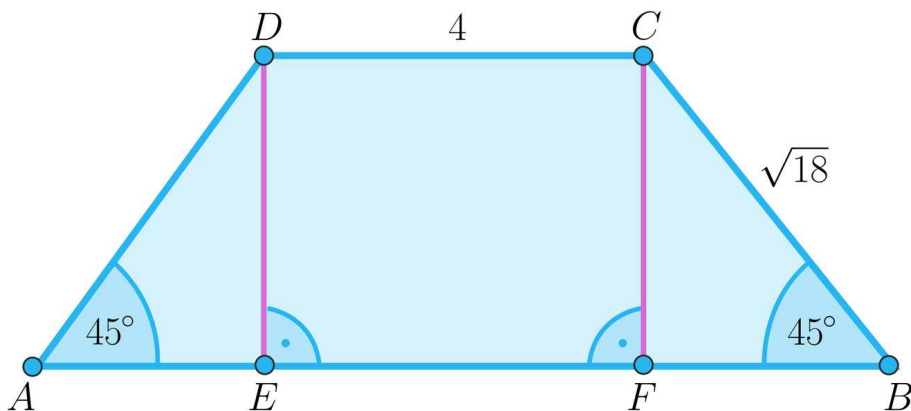
☐ 8

☐ $\sqrt{2}$

Ćwiczenie 3



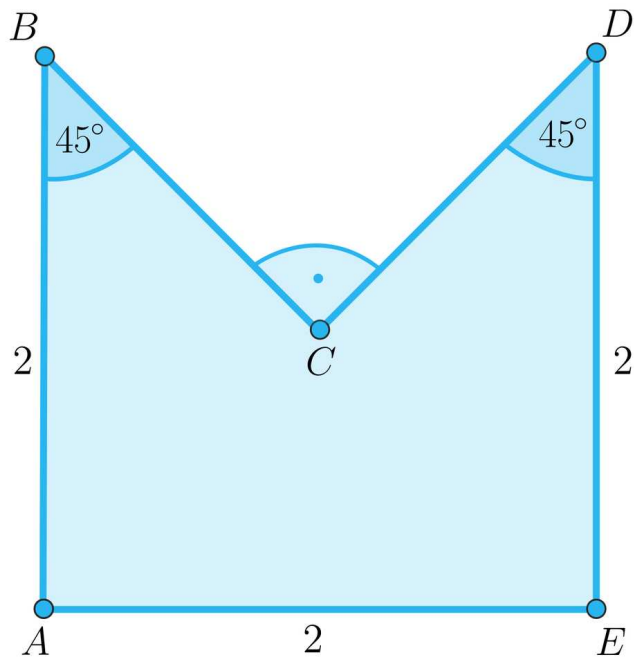
Na podstawie załączonego rysunku oblicz ile wynosi pole poniższego trapezu.



Ćwiczenie 4



Punkt C jest punktem przecięcia się przekątnych kwadratu $ABDE$.



Zaznacz poprawną odpowiedź. Obwód figury przedstawionej na rysunku wynosi:

☐ $8 + 2\sqrt{2}$

☐ 8

☐ $6 + \sqrt{2}$

☐ $6\sqrt{2}$

☐ $6 + 2\sqrt{2}$

☐ $8\sqrt{2}$

☐ $8 + \sqrt{2}$

Ćwiczenie 5



Do zadanego okręgu o środku w punkcie A i promieniu 7 dorysowany został styczny okrąg o promieniu $7 \cdot (\sqrt{2} - 1)$ i środku w punkcie C . Z punktu C poprowadzono styczną do pierwszego okręgu, a punkt styczności oznaczono literą B . Oznaczmy punkt przecięcia tej stycznej i mniejszego okręgu przez E . Oblicz długość odcinka BE .

Ćwiczenie 6



Ćwiczenie 7



Niech ABC będzie prostokątnym trójkątem równoramiennym, o przeciwprostokątnej BC o długości $2\sqrt{6}$. Na jego przyprostokątnych AB i AC zbudowano dwa trójkąty do niego podobne (ABD i ACE) w taki sposób, że ramiona pierwotnej figury stanowiły przeciwprostokątne nowo utworzonych trójkątów. Następnie czynność tę powtórzono, tworząc w analogiczny sposób dodatkowe cztery trójkąty prostokątne równoramienne, których przeciwprostokątne stanowiły przyprostokątne trójkątów ABD i ACE . Wskaż zdania prawdziwe:

☐ Obwód utworzonej w ten sposób figury wynosi $8 + 2\sqrt{6}$.

☐ Obwód utworzonej w ten sposób figury wynosi $(8 + 2\sqrt{2}) \cdot \sqrt{3}$.

☐ Stosunek łącznego pola powierzchni czterech trójkątów dodanych w ostatnim etapie tworzenia tej figury do pola powierzchni jej całości wynosi $1 : 4$.

☐ Pole całej figury wynosi $(56 + 18\sqrt{2})$.

☐ Stosunek łącznego pola powierzchni czterech trójkątów dodanych w ostatnim etapie tworzenia tej figury do pola powierzchni jej całości wynosi $1 : 8$.

☐ Obwód utworzonej w ten sposób figury wynosi $10\sqrt{6}$.

☐ Stosunek łącznego pola powierzchni czterech trójkątów dodanych w ostatnim etapie tworzenia tej figury do pola powierzchni jej całości wynosi $1 : 3$.

☐ Pole całej figury wynosi 18.

Ćwiczenie 8

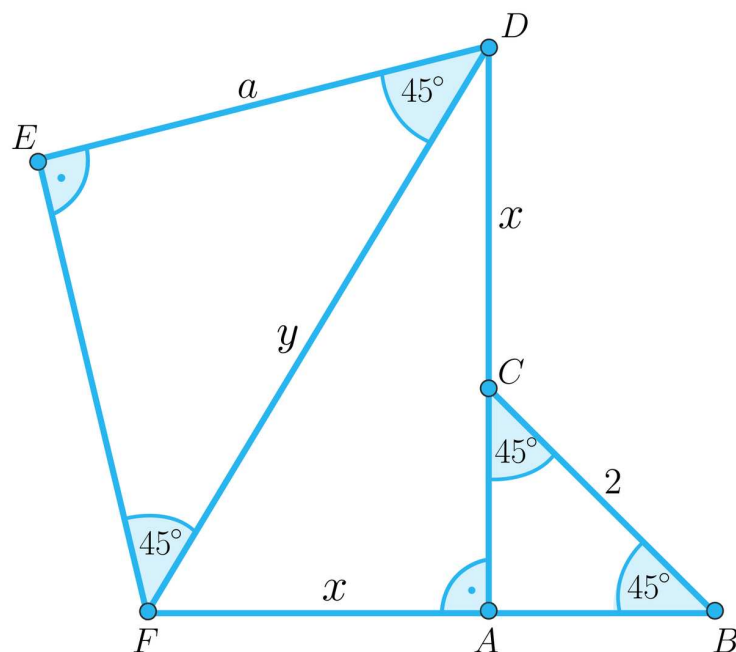


Dany jest trapez, w którym podstawy mają długości $|AB| = 12\sqrt{2}$ cm i $|CD| = 16\sqrt{2}$ cm, zaś bok $|AD|$, będący dłuższym z jego ramion tworzy z podstawą $|CD|$ kąt o mierze 45° . Oblicz obwód tego trapezu, jeżeli jego pole wynosi 112 cm^2 .

Ćwiczenie 9



Korzystając z danych przedstawionych na poniższym rysunku, wyznacz długość a boku ED , jeżeli $y = \frac{\sqrt{34}}{3}x$.



Dla nauczyciela

Autor: Filip Turoboś

Przedmiot: Matematyka

Temat: Wartości funkcji trygonometrycznych dla kąta 45°

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

Treści nauczania – wymagania szczegółowe:

VII. Trygonometria. Zakres podstawowy. Uczeń:

1) wykorzystuje definicje funkcji: sinus, cosinus i tangens dla kątów od 0° do 180° , w szczególności wyznacza wartości funkcji trygonometrycznych dla kątów 30° , 45° , 60° ;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- pozna wartości funkcji trygonometrycznych dla kąta 45° ;
- wykorzysta wartości funkcji trygonometrycznych kąta 45° w obliczaniu pól i obwodów figur na płaszczyźnie.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona klasa;
- mapa myśli;
- dyskusja.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Ustalenie celu lekcji i kryteriów sukcesu w temacie: „Wartości funkcji trygonometrycznych dla kąta 45° ”.
2. Nauczyciel prosi uczniów, aby zgłaszali swoje propozycje pytań do wspomnianego tematu. Jedna osoba może zapisywać je na tablicy. Gdy uczniowie wyczerpią pomysły, a pozostały jakieś ważne kwestie do poruszenia, nauczyciel je dopowiada.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel wyświetla zawartość sekcji „Galeria zdjęć interaktywnych”, czyta treść polecenia nr 1 – „Przeanalizuj poniższą prezentację multimedialną i rozwiąż zadanie”. Po zapoznaniu się uczniów z materiałem omawia ewentualne problemy związane z jego niezrozumieniem.
2. Wybrani uczniowie wykonują ćwiczenia nr 1-2 na forum klasy. Nauczyciel sprawdza poprawność ich wykonania, omawiając je wraz z uczniami na bieżąco.
3. W następnym kroku uczniowie wykonują w grupach ćwiczenia numer 3, 4 i 5. Następnie wybrana grupa prezentuje swoje rozwiązania. Nauczyciel w razie potrzeby uzupełnia informacje.
4. Uczniowie wykonują ćwiczenia interaktywne 6-8 z sekcji „Sprawdź się”. Wyniki pracy komentowane są przez nauczyciela po ich zakończeniu.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.

Praca domowa:

1. Uczniowie wykonują ćwiczenia interaktywne, które nie zostały dokończone na zajęciach.

Materiały pomocnicze:

- [Wprowadzenie do trygonometrii](#)

Wskazówki metodyczne:

- Nauczyciel może wykorzystać medium w sekcji „Galeria zdjęć interaktywnych” do pracy przed lekcją. Uczniowie zapoznają się z jego treścią i przygotowują do pracy na zajęciach w ten sposób, żeby móc samodzielnie rozwiązać zadania w temacie „Wartości funkcji trygonometrycznych dla kąta 45° ”.