



Przekroje czworościanu foremnego

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Aplet](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Źródło: dostępny w internecie: www.pexels.com, domena publiczna.

Ścisła definicja przekroju mówi, że jest to część wspólna płaszczyzny i bryły, którą ta płaszczyzna przecina. Przekroje zdradzają nam budowę wewnętrzną przedmiotu. Wiedza

o przekrojach brył ma zastosowanie w wielu dziedzinach. Architekci, inżynierowie maszyn, okrętów, projektanci przedmiotów użytkowych posługują się rysunkami przekrojów, aby opisać dokładnie to, co projektują, co tworzą – budynek, okręt, czy fotel. Czworoscian to bardzo ciekawa bryła. Jego przekrojem może być trójkąt, prostokąt, trapez, a nawet kwadrat.

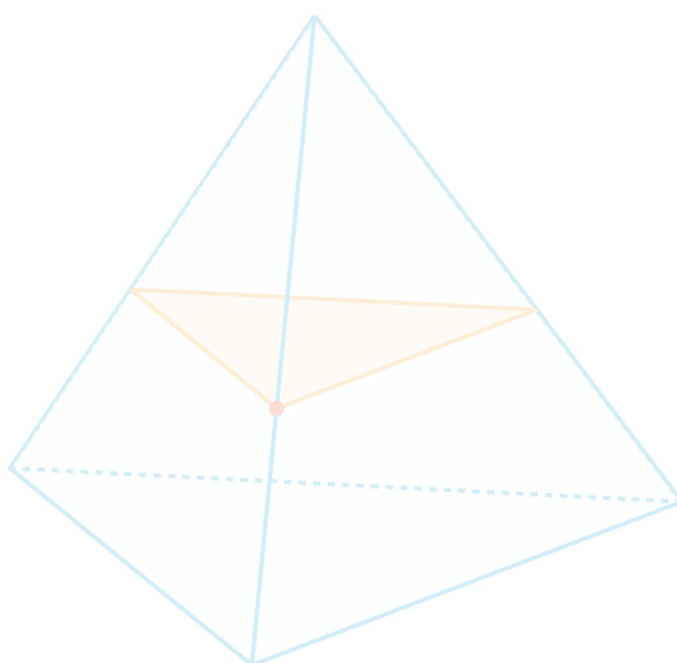
Twoje cele

- Wyznaczysz wysokość czworoscianu foremnego.
- Wyznaczysz pola powierzchni przekrojów czworoscianu foremnego np. trójkąta, kwadratu, trapezu.
- Znajdziesz miarę kąta między ścianami czworoscianu foremnego.
- Znajdziesz miarę kąta między krawędzią boczną, a podstawą czworoscianu foremnego.

Przeczytaj

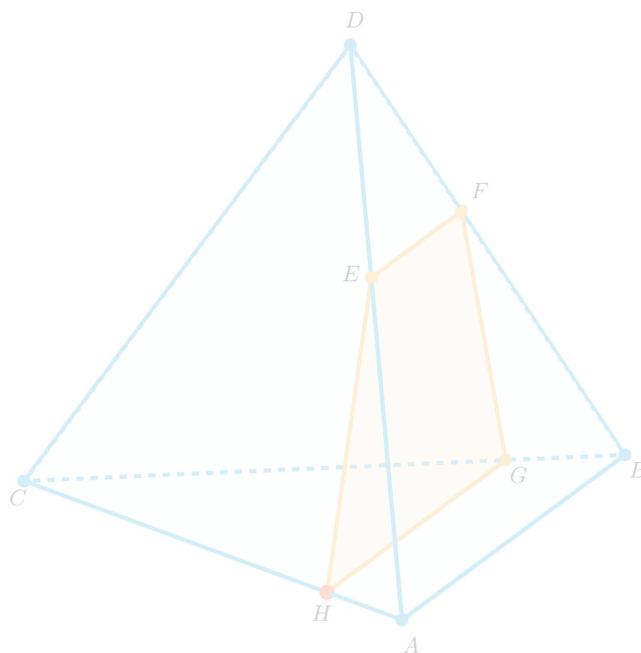
Odrębnym aspektem, ale nie mniej ważnym są przekroje jakie można otrzymać przecinając czworościan foremny płaszczyznami. Sytuacje te ilustruje poniższy pokaz slajdów.

Kiedy **czworościan foremny** ustawimy tak, że podstawą jest jedna z jego ścian, to przekrój płaszczyzną równoległą do podstawy da nam zawsze trójkąt podobny do tej podstawy. Również przekrój, jaki uzyskujemy tnąc czworościan foremny płaszczyzną zawierającą krawędź boczną i przecinającą **krawędź do niej skośną**, jest trójkątem.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D1Gv6iFAv>

Jeśli przetniemy czworościan foremny płaszczyzną prostopadłą do podstawy tak, aby przeciąć cztery krawędzie czworościanu, i równoległą do krawędzi podstawy, z którą płaszczyzna nie ma punktu wspólnego, to otrzymany przekrój jest trapezem równoramiennym.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D1Gv6iFAv>

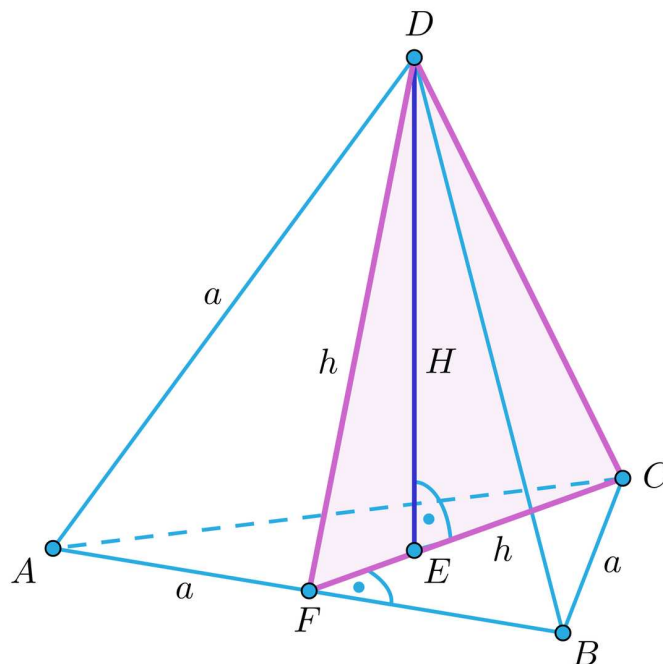
W sytuacji, gdy płaszczyzna przecięcia jest równoległa do krawędzi skośnych czworościanu, otrzymujemy czworokąt, który jest prostokątem, ponieważ kąt między krawędziami skośnymi jest kątem prostym. (Kąt między krawędzią i rzutem prostokątnym krawędzi do niej skośnej na płaszczyznę, w której leży dana krawędź.)

W szczególnym przypadku, gdy boki prostokąta łączą środki sąsiednich krawędzi czworościanu, przekrój jest kwadratem.

Przykład 1

Czworościan foremny został przecięty płaszczyzną przechodzącą przez krawędź boczną i wysokość podstawy. Jako przekrój otrzymano trójkąt o polu równym $2\sqrt{2} \text{ cm}^2$. Obliczmy długość krawędzi tego czworościanu.

Rozwiązanie:



Oznaczmy literami:

a – krawędź czworościanu foremnego,

H – jego wysokość,

$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ – wysokość trójkąta równobocznego, będącego ścianą czworościanu.

Punkt E jest środkiem ciężkości trójkąta równobocznego ABC . Wiemy, że dzieli on wysokość trójkąta na odcinki w stosunku $|CE| : |EF| = 2 : 1$. Stąd długość odcinka EF jest równa $\frac{1}{3}h$. Korzystając z twierdzenia Pitagorasa mamy $(\frac{1}{3}h)^2 + H^2 = h^2$. Stąd $H^2 = \frac{8}{9}h^2$, czyli wysokość czworościanu foremnego:

$$H = \frac{2\sqrt{2}}{3}h = \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

Pole powierzchni przekroju czworościanu – trójkąta CDF wynosi $2\sqrt{2} \text{ cm}^2$.

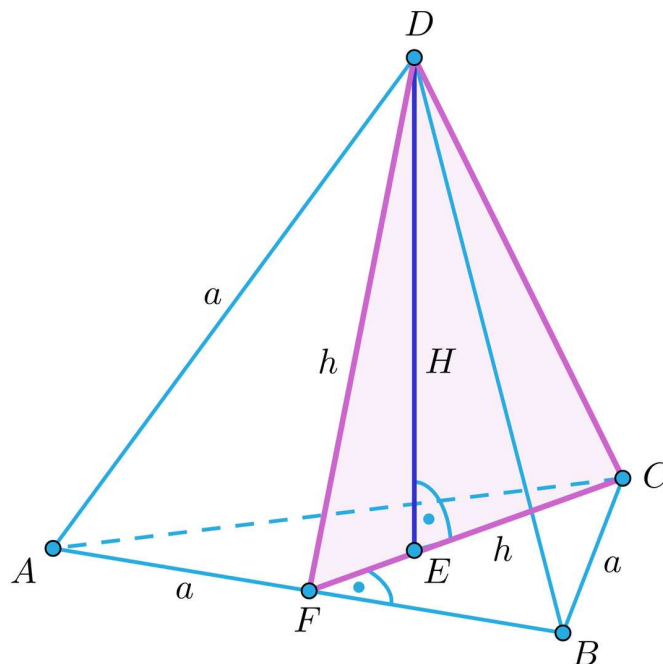
Podstawiając do wzoru na pole trójkąta $P_{CDF} = \frac{h \cdot H}{2} = 2\sqrt{2}$, gdzie $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ i $H = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Stąd $\frac{\frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3}}{2} = 2\sqrt{2}$ i dalej $\frac{a^2\sqrt{2}}{4} = 2\sqrt{2}$, czyli $a^2 = 8$. Długość krawędzi podstawy czworościanu $a = 2\sqrt{2} \text{ cm}$.

Przykład 2

Czworościan foremny został przecięty płaszczyzną przechodzącą przez krawędź boczną i wysokość podstawy. Jako przekrój otrzymano trójkąt równoramienny. Wyznamy miary kątów tego trójkąta.

Rozwiązanie:

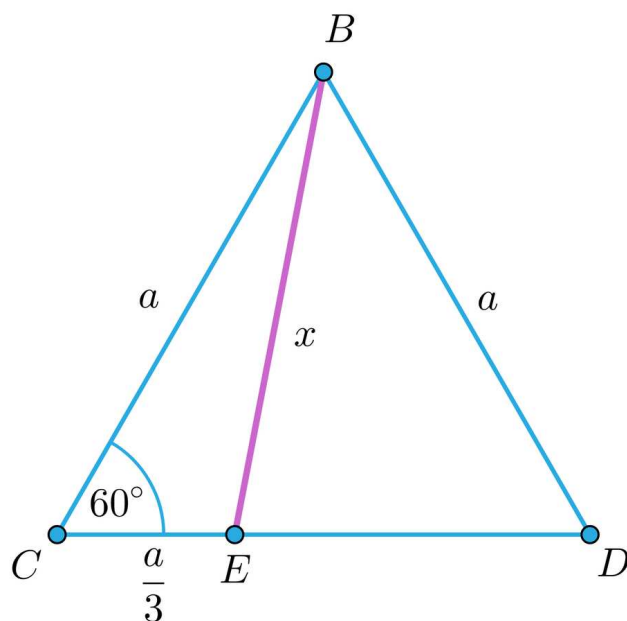
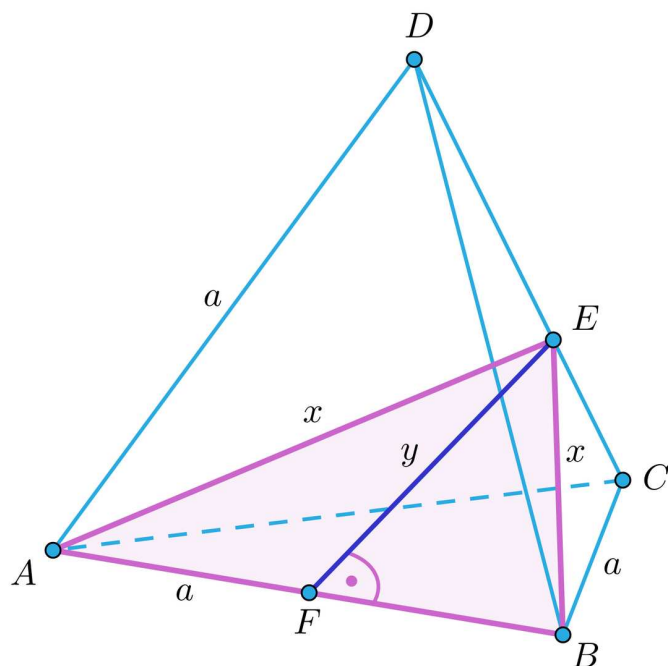


Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku. Niech $\alpha = \angle CFD$, a $\beta = \angle FDC = \angle DCF$.
 Zauważmy, że $\sin \alpha = \frac{H}{h}$. Korzystając z zależności $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ i $H = \frac{a\sqrt{6}}{3}$, otrzymujemy:
 $\sin \alpha = \frac{\frac{a\sqrt{6}}{3}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{2\sqrt{6}}{3\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$. Z tablic odczytujemy $\alpha \approx 70^\circ$. Kąt α to kąt między ścianami czworościanu foremnego. Trójkąt CFD jest równoramienny, zatem kąt β , kąt między krawędzią boczną a podstawą wynosi $\beta = \frac{180^\circ - \alpha}{2} \approx 55^\circ$.

Przykład 3

Czworościan foremny $ABCD$ został przecięty płaszczyzną zawierającą krawędź podstawy AB i przecinającą krawędź do niej skośną DC w punkcie E tak, że $|DE| : |EC| = 2 : 1$. Obliczmy pole uzyskanego przekroju.

Rozwiązanie:



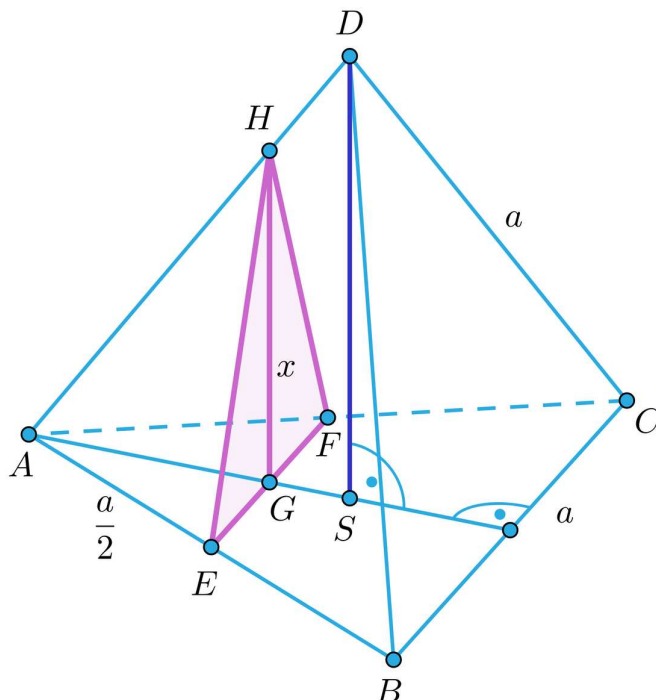
Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku. Długość odcinka BE oznaczmy przez x , zaś długość wysokości trójkąta równoramiennego ABE przez y . Z warunków przykładu wynika, że $|EC| = \frac{1}{3}a$. Zatem korzystając z twierdzenia cosinusów dla trójkąta BCE mamy $x^2 = a^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^2 - 2a \cdot \frac{a}{3} \cdot \cos 60^\circ = a^2 + \frac{a^2}{9} - \frac{2}{3}a^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{10a^2}{9} - \frac{3a^2}{9} = \frac{7}{9}a^2$. Wyliczymy wysokość y trójkąta równoramiennego ABE z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta prostokątnego BFE : $x^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + y^2$. Stąd $y^2 = x^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{7}{9}a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{19}{36}a^2$. Pierwiastkując otrzymujemy $y = \frac{\sqrt{19}}{6}a$. Zatem pole przekroju ABE wynosi

$$P = \frac{a \cdot y}{2} = \frac{a \cdot \frac{\sqrt{19}}{6}a}{2} = \frac{a^2 \sqrt{19}}{12}.$$

Przykład 4

Czworościan foremny o krawędzi długości a został przecięty płaszczyzną prostopadłą do podstawy i przechodzącą przez środki dwóch krawędzi podstawy. Obliczmy pole uzyskanego przekroju.

Rozwiązanie:



Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku. Niech x oznacza długość odcinka GH , czyli długość wysokości trójkąta EFH , jaki uzyskujemy w tym przekroju. Trójkąty prostokątne ASD i AGH są podobne, mają ten sam kąt GAH . Stąd otrzymujemy zależność:

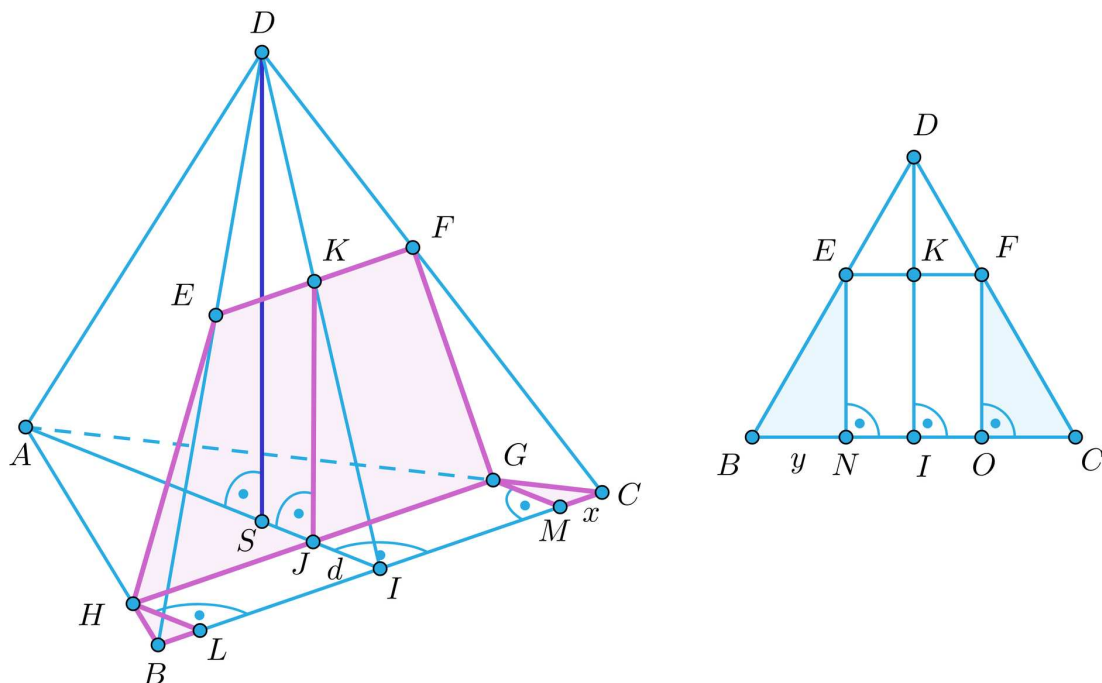
$\frac{|DS|}{|AS|} = \frac{x}{|AG|}$. Ponieważ DS jest wysokością czworościanu, więc $|DS| = \frac{a\sqrt{6}}{3}$. Długość odcinka $|AS| = \frac{2}{3}h$, gdzie h wysokość trójkąta równobocznego – ściany czworościanu. Czyli $|AS| = \frac{2}{3}h = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Długość odcinka $|AG| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Wynika to z faktu, że trójkąt AEF jest trójkątem równobocznym o podstawie $\frac{a}{2}$ (trójkąty ABC i AEF są podobne o skali podobieństwa $2 : 1$). Podstawiając otrzymujemy:

$$\frac{|AG| \cdot |DS|}{|AS|} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3}}{\frac{a\sqrt{3}}{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{4}. \text{ Zatem pole przekroju wynosi } P = \frac{\frac{a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{4}}{2} = \frac{a^2\sqrt{6}}{16}.$$

Przykład 5

Czworościan foremny o krawędzi długości a został przecięty płaszczyzną prostopadłą do podstawy i równoległą do krawędzi podstawy, z którą płaszczyzna nie ma punktu wspólnego. Odległość płaszczyzny przecięcia od tej równoległej do niej krawędzi wynosi d . W wyniku przecięcia otrzymano trapez równoramienny. Wyznaczymy pole powierzchni uzyskanego trapezu.

Rozwiązanie:



Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku. Pole szukanego trapezu $EFGH$ wyraża się wzorem $P = \frac{|HG|+|EF|}{2} \cdot |JK|$. Niech x oznacza długość odcinka BL i CM . Z trójkąta BLH , mamy $\tan 60^\circ = \frac{d}{x}$. Stąd $x = \frac{d}{\sqrt{3}}$. Zatem $|HG| = a - 2x = a - \frac{2d}{\sqrt{3}} = a - \frac{2\sqrt{3}}{3}d$. Z podobieństwa trójkątów ISD i IJK (trójkąty prostokątne o wspólnym kącie ostrym, ale też możemy skorzystać z twierdzenia Talesa) mamy zależność: $\frac{|JK|}{d} = \frac{|SD|}{|SI|}$. Ponieważ $|SD|$ jest wysokością czworościanu H , a długość odcinka $|SI| = \frac{1}{3}h$, to $\frac{|JK|}{d} = \frac{H}{\frac{1}{3}h}$. Stąd $|JK| = d \cdot \frac{3H}{h} = d \cdot \frac{3 \cdot \frac{a\sqrt{6}}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = 2\sqrt{2}d$. Wyznaczyliśmy wysokość trapezu. Zachodzi również zależność $\frac{|IK|}{|JK|} = \frac{h}{H}$. Zatem $|IK| = |JK| \cdot \frac{h}{H} = 2\sqrt{2}d \cdot \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a\sqrt{6}}{2}} = 3d$. Wykorzystamy tę równość do obliczenia długości drugiej podstawy trapezu. Niech y oznacza długość odcinka BN i CO . Długość odcinka EN jest równa długości IK . Z trójkąta BNE mamy $\tan 60^\circ = \frac{|EN|}{y}$. Stąd $y = \frac{|EN|}{\sqrt{3}}$. Krótsza podstawa trapezu $|EF| = a - 2y = a - 2\frac{|EN|}{\sqrt{3}} = a - 2\frac{3d}{\sqrt{3}} = a - 2\sqrt{3}d$. Podstawiając do wzoru na pole trapezu:

$$P = \frac{|HG|+|EF|}{2} \cdot |JK| = \frac{a - \frac{2\sqrt{3}}{3}d + a - 2\sqrt{3}d}{2} \cdot 2\sqrt{2}d = \frac{2a - \frac{8\sqrt{3}}{3}d}{2} \cdot 2\sqrt{2}d = 2\sqrt{2} \left(a - \frac{4\sqrt{3}}{3}d \right) \cdot d$$

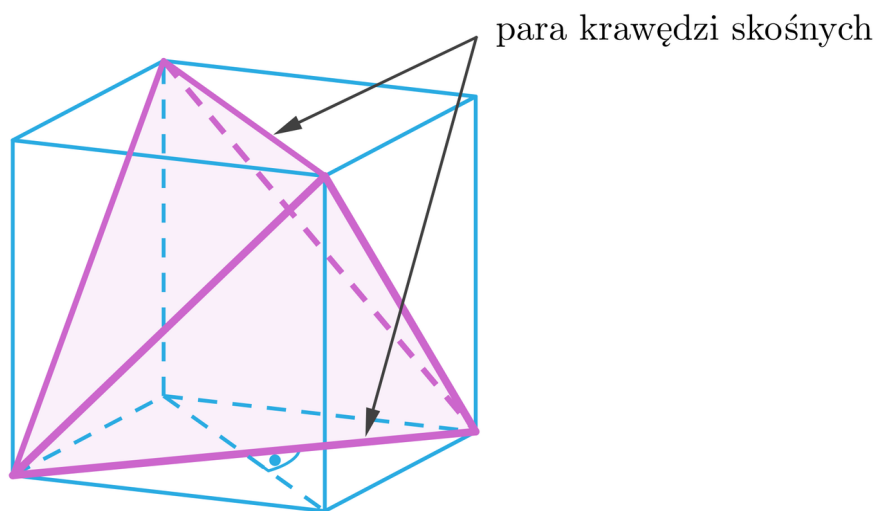
Słownik

czworościan foremny

czworościan, którego ściany są przystającymi trójkątami

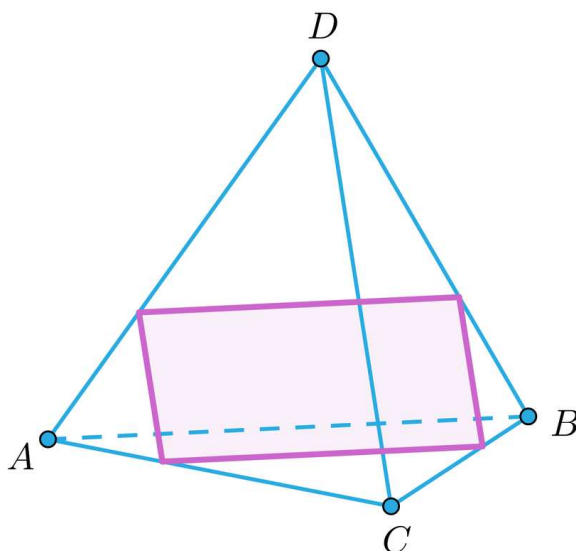
krawędzie skośne czworościanu foremnego

krawędzie, które zawierają się w prostych nie leżących w jednej płaszczyźnie



Aplet

Czworościan foremny o krawędzi długości a planowano przeciąć płaszczyzną równoległą do dwóch krawędzi skośnych czworościanu AB i CD . Na czworościanie zaznaczono linię planowanego przecięcia na wszystkich ścianach. Na ścianie ABD jest ona równoległa do krawędzi AB i odległa o x od tej krawędzi.



W wyniku przecięcia czworościanu foremnego płaszczyzną równoległą do dwóch prostych skośnych otrzymujemy prostokąt.

Polecenie 1

Wybierz z trójkątów poniżej te, które należą do siatki czworościanu, i ułóż je w równoległobok tak, aby bordowe odcinki planowanego przecięcia łączyły się.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D4trxHkLr>

Polecenie 2

Wyznacz obwód figury, którą otrzymamy jako przekrój, w planowanym przecięciu czworościanu foremnego.

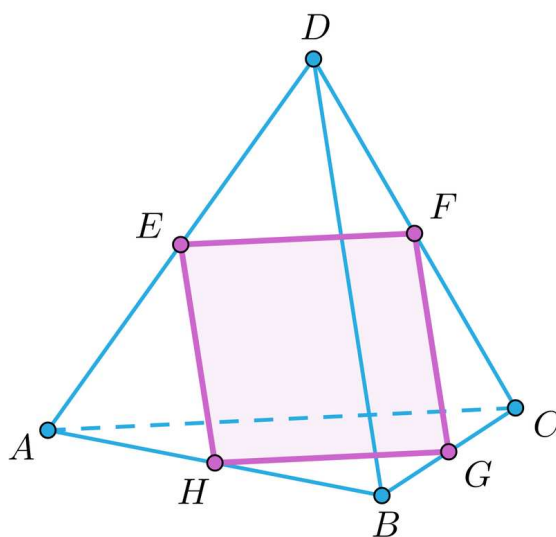
Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Wybierz właściwe dokończenie zdania. Na rysunku przedstawiony jest czworościan foremny. Przekrojem jego jest kwadrat. Liczba kwadratowych przekrojów czworościanu foremnego, to:



☐ 8

☐ 4

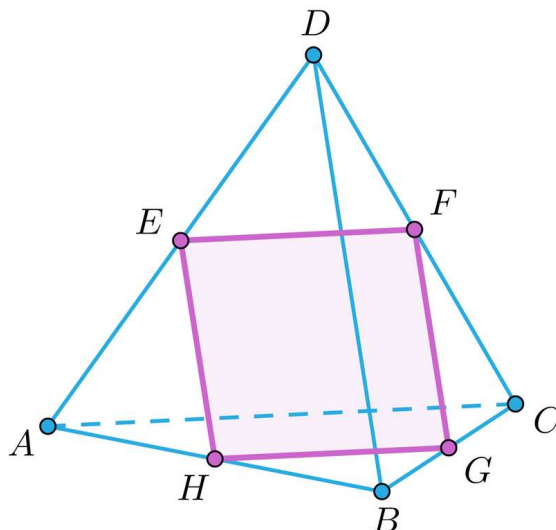
☐ 3

☐ 6

Ćwiczenie 2



Wybierz właściwe dokończenie zdania. Rysunek przedstawia czworościan foremny o krawędzi długości 16. Jego przekrojem jest kwadrat. Pole tego kwadratu jest równe:



☐ 8

☐ 64

☐ 4

☐ 16

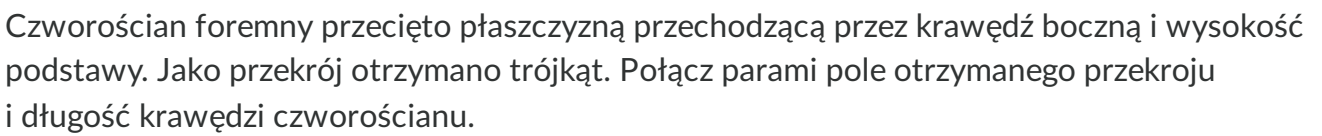
Ćwiczenie 3



Przeciągnij i upuść.

Czworościan foremny przecięto płaszczyzną przechodzącą przez krawędź boczną i wysokość podstawy, której długość wynosi $2\sqrt{3}$. Pole powierzchni otrzymanego przekroju wynosi



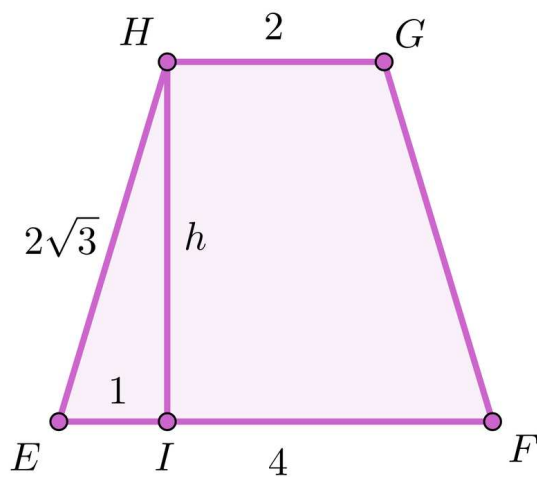
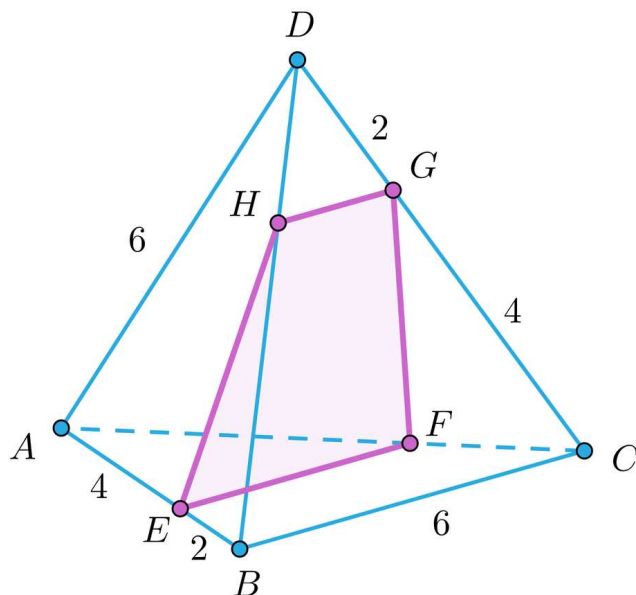


$$a = 6$$

Ćwiczenie 5



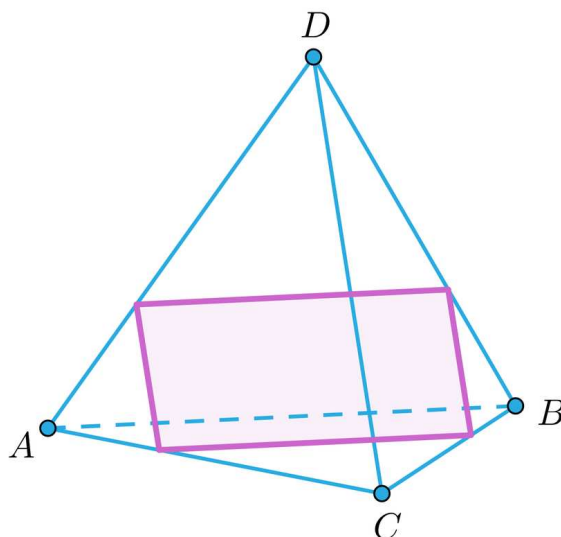
Czworościan foremny o krawędzi długości 6 cm przecięto płaszczyzną przecinając cztery krawędzie czworościanu (zobacz rysunek) w taki sposób, że uzyskano trapez. Podstawy trapezu są równoległe do boku podstawy czworościanu, którego ramiona trapezu nie przecinają. Wyznacz pole powierzchni tego przekroju przyjmując wymiary jak na rysunku.



Ćwiczenie 6



Czworościan foremny o krawędzi długości a planowano przeciąć płaszczyzną równoległą do dwóch krawędzi skośnych czworościanu AB i CD . Na czworościanie zaznaczono linię planowanego przecięcia. Jest ona równoległa do krawędzi AB i odległa o x od tej krawędzi. Wyznacz dla jakiej wartości x przekrój będący prostokątem ma największe pole.



Ćwiczenie 7



Przekrój czworościanu foremnego o krawędzi długości a jest prostokątem. Stosunek długości jego boków wynosi $\frac{1}{3}$. Oblicz pole tego przekroju.

Ćwiczenie 8



Czworościan foremny o krawędzi długości 8 cm przecięto płaszczyzną prostopadłą do podstawy i równoległą do jednej z krawędzi podstawy w odległości d od tej krawędzi. W wyniku przecięcia otrzymano trapez równoramienny. Wyznacz dla jakiej wartości d przekrój będący trapezem ma największe pole.

Dla nauczyciela

Autor: Beata Kuna

Przedmiot: Matematyka

Temat: Przekroje czworościanu foremnego

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, poziom rozszerzony

Podstawa programowa:

X. Stereometria

Zakres podstawowy. Uczeń:

3) rozpoznaje w graniastosłupach i ostrosłupach kąty między odcinkami (np. krawędziami, krawędziami i przekątnymi) oraz kąty między ścianami, oblicza miary tych kątów;

6) oblicza objętości i pola powierzchni graniastosłupów, ostrosłupów, walca, stożka i kuli, również z wykorzystaniem trygonometrii i poznanych twierdzeń;

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

2) wyznacza przekroje sześciianu i ostrosłupów prawidłowych oraz oblicza ich pola, także z wykorzystaniem trygonometrii.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- wyznacza wysokość czworościanu foremnego,
- wyznacza pola powierzchni przekrojów czworościanu foremnego np. trójkąta, kwadratu, trapezu,

- znajduje miarę kąta między ścianami czworościanu foremnego,
- znajduje miarę kąta między krawędzią boczną, a podstawą czworościanu foremnego.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm,
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- rozmowa kierowana,
- dyskusja.

Formy pracy:

- praca indywidualna,
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu,
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale,
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Treści nauczania:

- zgodnie z Podstawą Programową uczeń wyznacza przekroje sześcianu i ostrosłupów prawidłowych oraz oblicza ich pola, także z wykorzystaniem trygonometrii.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

- Nauczyciel podaje temat lekcji i wraz z uczniami określa cele i kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

- Uczniowie indywidualnie analizują Przykład 1 i 2.
- Kolejne przykłady uczniowie rozwiązują w parach konsultując się z sobą nawzajem. W razie problemów nauczyciel pomaga i wyjaśnia.
- Uczniowie analizują aplet i rozwiązują związane z nim polecenia.
- Uczniowie rozwiązują ćwiczenia interaktywne wskazane przez nauczyciela.

Faza podsumowująca:

- Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń, które pojawiły się na lekcji.

Praca domowa:

Zadania z części „Sprawdź się”, których uczniowie nie zdążyli rozwiązać w czasie lekcji.

Materiały pomocnicze:

[Czworościan foremny](#)

Wskazówki metodyczne:

Aplet i związane z nim polecenia nauczyciel może wykorzystać jako pracę domową dla uczniów.