



W jaki sposób wyznaczamy położenie środka układu sił?

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Animacja](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



W jaki sposób wyznaczamy położenie środka układu sił?

Źródło: dostępny w internecie: <https://pixabay.com/pl/photos/instalacja-wodoci%c4%85gowa-klucz-do-rur-585658/>
[dostęp 29.03.2022 r.], domena publiczna.

Czy to nie ciekawe?

Jeśli staniesz na jachcie żaglowym i spojrzysz do góry, zobaczysz mnóstwo lin, ciągnących się od pokładu do żagli i masztów. Na dużym okręcie są ich setki, często o długości kilkudziesięciu metrów każda. Każda z tych lin jest naprężona, ciągnąc żagle lub maszt w różnych kierunkach – to bardzo skomplikowany układ sił. Czy taki układ można uprościć do układu jednej siły lub momentu siły?



Rys. a. Liny i maszt – przykład układu wielu sił.

Twoje cele

Dzięki lekturze tego tekstu:

- przypomnisz sobie, w jaki sposób wyznacza się siłę wypadkową działającą na punkt materialny,
- zdefiniujesz pojęcie środka układu sił działających na ciało niebędące punktem materialnym,
- dowiesz się, w jaki sposób wyznacza się siłę wypadkową działającą na bryłę sztywną,
- przeanalizujesz przypadki sił współliniowych i niewspółliniowych działających na bryłę sztywną.

Przeczytaj

Warto przeczytać

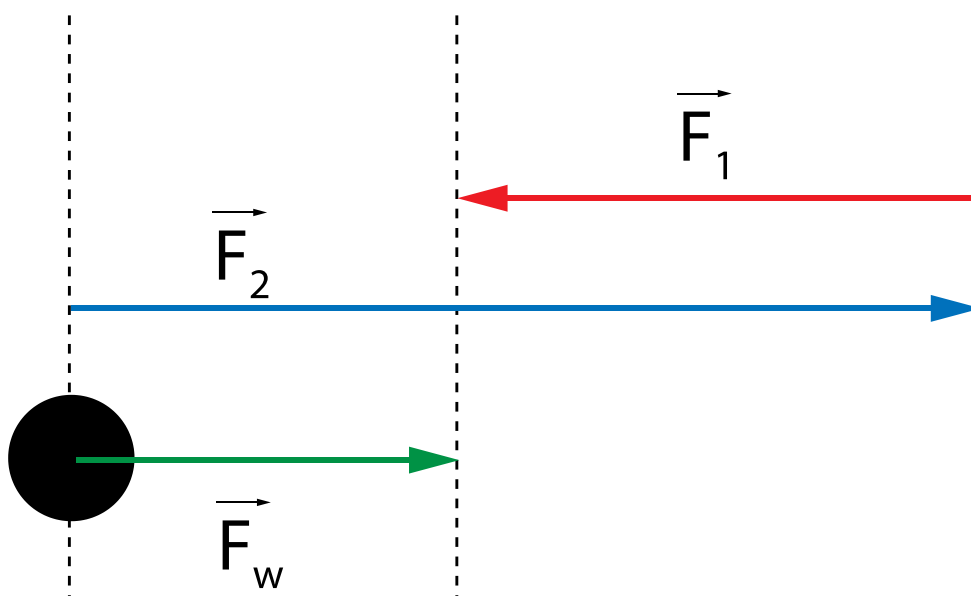
Składanie sił działających na punkt materialny

Zacznijmy od prostej sytuacji związanej ze składaniem sił. Na Rys. 1. znajduje się **punkt materialny**, oznaczony czarną kropką, do którego przyłożone są dwie siły: $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$, mające ten sam kierunek (tj. współliniowe), lecz przeciwny zwrot i różne wartości.



Rys. 1. Dwie siły przyłożone do punktu materialnego.

Jaka jest wypadkowa siła działająca na ten punkt? Jaka jest jej wartość, kierunek i zwrot? Gdy siły są współliniowe, jak na Rys. 1, wystarczy dodać od siebie wektory sił, co graficznie zilustrowano na Rys. 2. Strzałka oznaczona jako $\vec{F}_w$ oznacza siłę wypadkową.



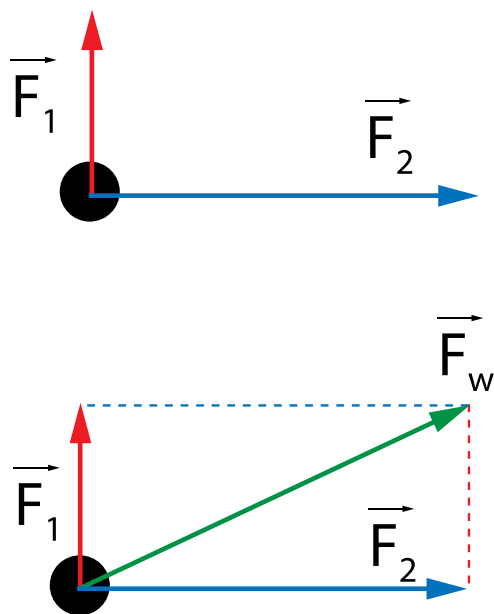
Rys. 2. Graficzne składanie układu sił współliniowych.

Długości strzałek odpowiadają wartościom sił, które reprezentują. Powyższy przykład graficzny możemy zapisać przy pomocy równania:

$$\left| \vec{F}_w \right| = \left| \vec{F}_1 \right| - \left| \vec{F}_2 \right|,$$

gdzie: $\left| \vec{F}_w \right|$ to wartość (tj. długość wektora) siły wypadkowej, a $\left| \vec{F}_1 \right|$ i $\left| \vec{F}_2 \right|$ to wartości sił $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$.

Oczywiście przyłożone siły nie zawsze są współliniowe. Na przykład, gdy jedziemy samochodem, oprócz działania skierowanej pionowo w dół siły grawitacji, doświadczamy również działania poziomej siły związanej z napędem silnika. Jak w takiej sytuacji znaleźć siłę wypadkową? Posługujemy się wtedy graficzną metodą zilustrowaną na Rys. 3.



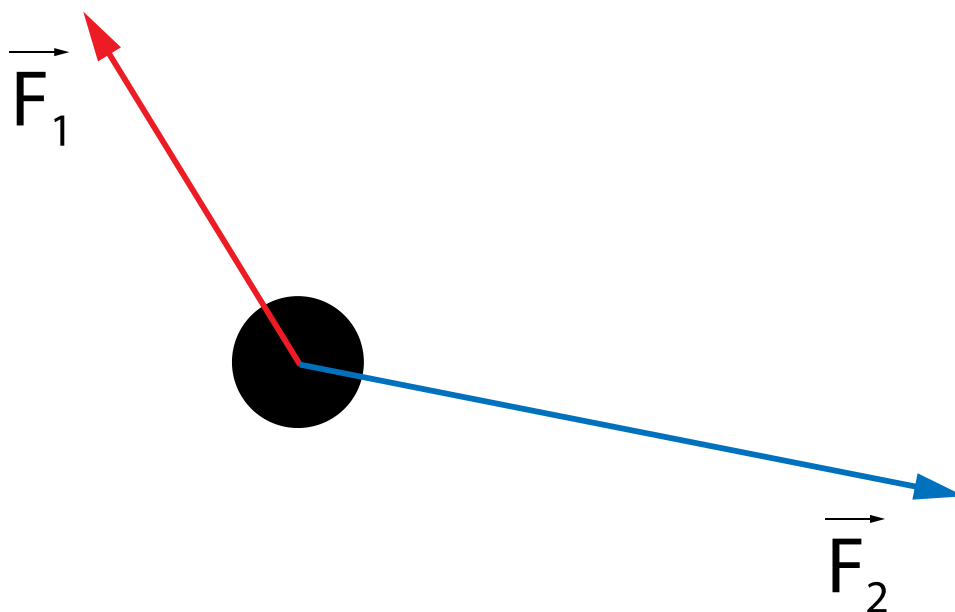
Rys. 3. Graficzne składanie układu sił prostopadłych do siebie.

Metoda ta polega na narysowaniu linii równoległych do każdej z działających sił i znalezieniu ich punktu przecięcia. Siła wypadkowa $\vec{F}_w$ zaczepiona jest w tym punkcie, co pozostałe siły. Jej wartość i kierunek znajdujemy łącząc punkt zaczepienia z przeciwległym wierzchołkiem utworzonego prostokąta. W tym wypadku wartość siły wypadkowej możemy obliczyć korzystając z twierdzenia Pitagorasa:

$$\left| \vec{F}_w \right| = \sqrt{\left| \vec{F}_1 \right|^2 + \left| \vec{F}_2 \right|^2},$$

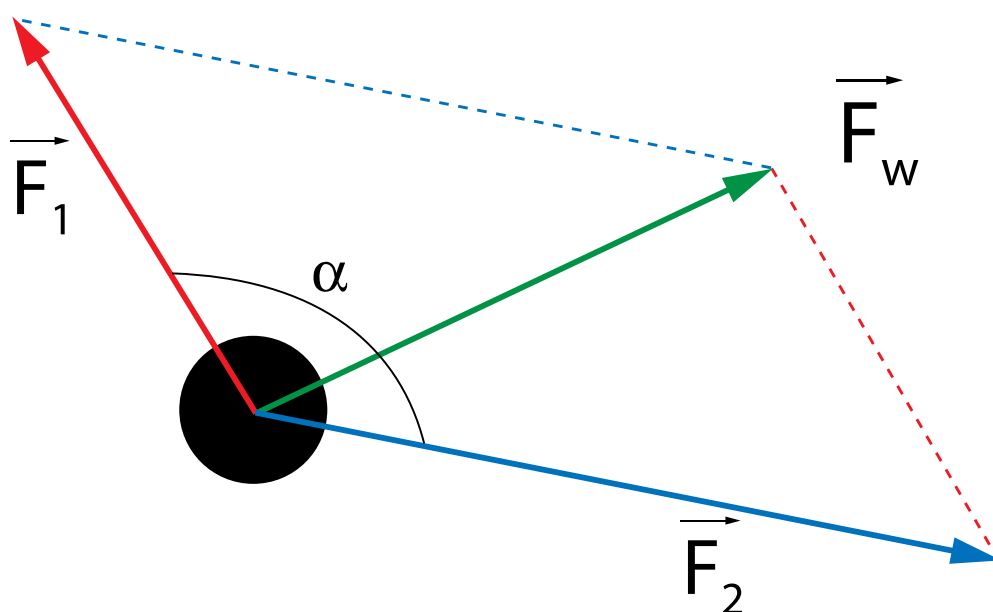
gdzie: $\left| \vec{F}_w \right|$ to wartość siły wypadkowej, a $\left| \vec{F}_1 \right|$ i $\left| \vec{F}_2 \right|$ to wartości sił $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$.

W ogólnym przypadku siły działające na ciało mogą być skierowane pod dowolnymi kątami, jak na Rys. 4.:



Rys. 4. Układ sił, które nie są do siebie ani prostopadłe, ani równoległe - kąt między nimi ma dowolną wartość.

Wtedy postępujemy analogicznie, jak przy składaniu sił prostopadłych. Rysujemy proste równoległe do każdej z sił i szukamy punktu, w którym się przecinają. Punkt ten wyznacza koniec wektora siły wypadkowej, jak na Rys. 5. Metodę tę nazywamy **metodą równoległoboku**.



Rys. 5. Graficzne składanie sił przyłożonych pod dowolnym kątem.

W tym wypadku wartość siły wypadkowej obliczymy korzystając ze wzoru zwanego **twierdzeniem cosinusów**:

- jeśli siła wypadkowa jest dłuższą przekątną równoległoboku:

$$|\vec{F}_w| = \sqrt{|\vec{F}_1|^2 + |\vec{F}_2|^2 - 2|\vec{F}_1||\vec{F}_2|\cos\alpha},$$

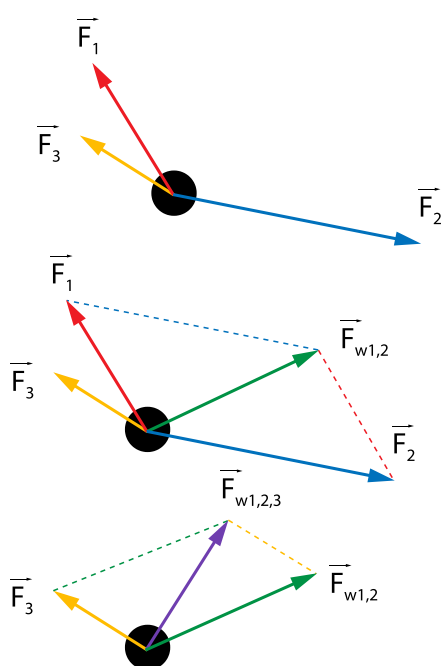
- jeśli zaś siła wypadkowa jest krótszą przekątną równoległoboku:

$$|\vec{F}_w| = \sqrt{|\vec{F}_1|^2 + |\vec{F}_2|^2 + 2|\vec{F}_1||\vec{F}_2|\cos\alpha},$$

gdzie: $|\vec{F}_w|$ to wartość siły wypadkowej, a $|\vec{F}_1|$ i $|\vec{F}_2|$ to wartości sił $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$, zaś α jest kątem między siłami $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$.

Jak widać, **metoda równoległoboku** jest ogólną metodą umożliwiającą wyznaczenie wartości siły wypadkowej podczas składania dowolnych dwóch sił. Wzór, którego użyliśmy przy składaniu sił prostopadłych do siebie, w wyprowadzeniu którego korzystaliśmy z twierdzenia Pitagorasa, jest szczególnym przypadkiem ostatniej zależności, dla $\alpha = 90^\circ$, gdzie $\cos\alpha$ wynosi 0.

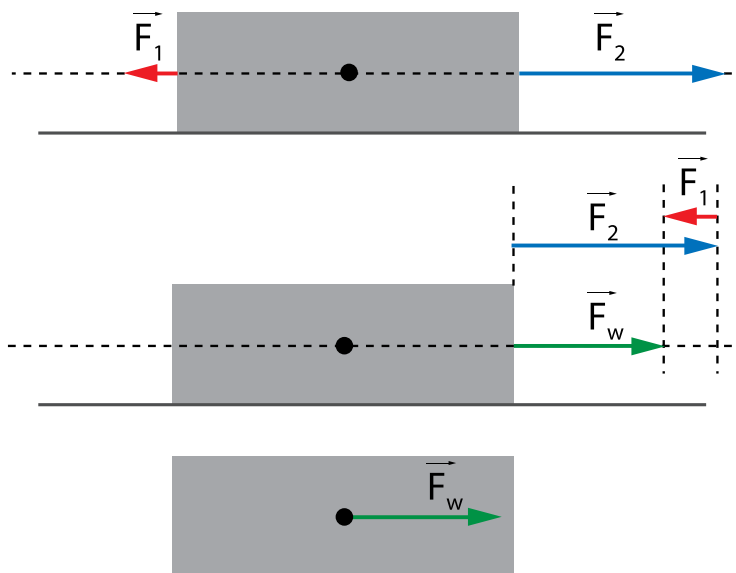
Jeśli działających sił jest więcej (Rys. 6.), to posługując się opisaną wyżej metodą równoległoboku, możemy je składać parami. Na przykład po złożeniu sił $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$ dostajemy siłę wypadkową $\vec{F}_{w1,2}$. Następnie składając $\vec{F}_{w1,2}$ z trzecią z działających sił $\vec{F}_3$, otrzymujemy siłę wypadkową tych trzech sił: $\vec{F}_{w1,2,3}$.



Rys. 6. Graficzne składanie trzech sił.

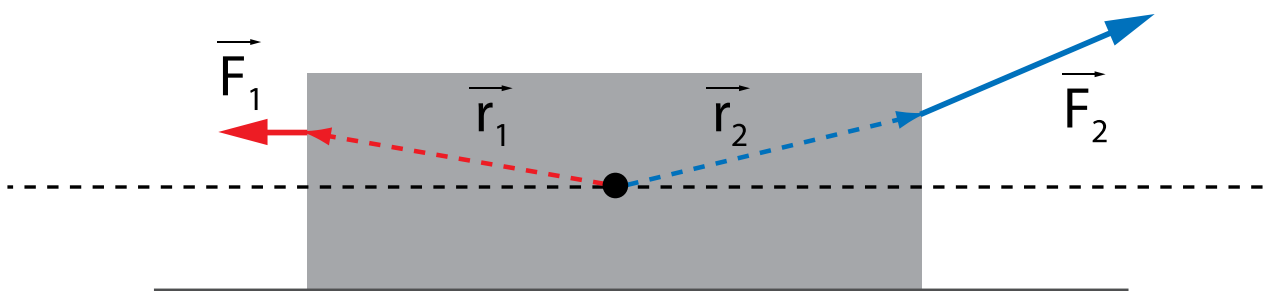
Składanie sił działających na bryłę sztywną

Dotychczasowe rozważania dotyczyły układu sił działających na **punkt materialny**. Teraz zajmiemy się składaniem sił przyłożonych do **bryły sztywnej**. Z najprostszą sytuacją mamy do czynienia wtedy, gdy te siły są współliniowe i leżą na osi przechodzącej przez środek masy bryły. W takiej sytuacji postępujemy analogicznie, jak w przypadku punktu materialnego (porównaj Rys. 7. z Rys. 2).



Rys. 7. Układ sił współliniowych przyłożony do bryły sztywnej.

Zastanówmy się teraz, co się stanie, gdy działające na bryłę sztywną siły nie będą współliniowe, a punkty ich przyłożenia nie będą leżały na tej samej osi przechodzącej przez środek masy bryły. Taką sytuację pokazano na Rys. 8.

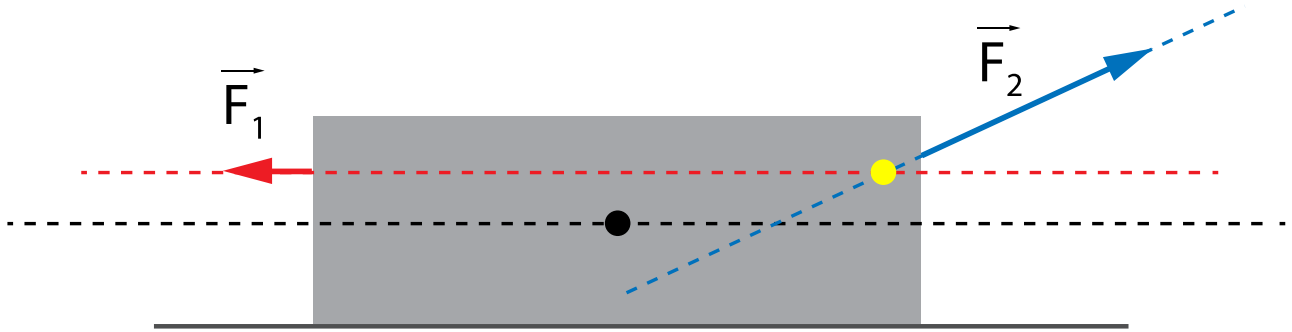


Rys. 8. Nierównoległy układ sił przyłożonych do bryły sztywnej.

Na Rys. 8, oprócz sił $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$ działających na bryłę sztywną (ciało), zaznaczono również wektory $\vec{r}_1$ i $\vec{r}_2$ łączące środek masy bryły z punktem przyłożenia każdej z sił. Jak w tej sytuacji wyznaczyć siłę wypadkową i w jakim punkcie ją przyłożyć? Łatwo się domyślić, że ponieważ te siły nie leżą na osi przechodzącej przez środek masy bryły, ich przyłożenie spowoduje pojawienie się momentów sił. Moment siły jest wielkością wektorową, zdefiniowaną jako iloczyn wektorowy wektora $\vec{r}$, łączącego środek masy ciała z punktem

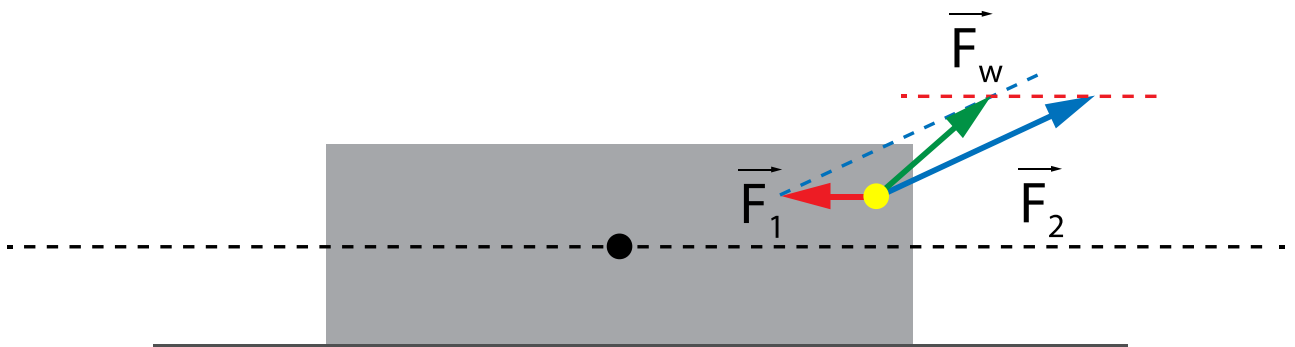
przyłożenia siły, oraz przyłożonej siły $\vec{F}$, tj. $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$. Obydwie siły pokazane na Rys. 8. skutkują pojawieniem się momentów sił: $\vec{M}_1 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1$ oraz $\vec{M}_2 = \vec{r}_2 \times \vec{F}_2$, których złożenie (suma wektorowa) ma dla **bryły sztywnej** znaczenie podobne do tego, jak (omówione wcześniej) złożenie dwóch sił działających na **punkt materialny**.

Jak w praktyce wykonać operację składania momentów sił? Aby to wyjaśnić, wróćmy do przykładu z Rys. 8. Posłużymy się prostą konstrukcją geometryczną, której kolejne etapy ilustrują Rys. 9, 10 i 11.



Rys. 9. Konstrukcja służąca wyznaczeniu środka układu sił działających na bryłę sztywną.

Na Rys. 9. liniami przerywanymi zaznaczyliśmy proste, na których leżą wektory sił. Punkt przecięcia tych prostych zaznaczyliśmy żółtą kropką – ten właśnie punkt jest punktem, do którego przyłożymy siłę wypadkową i ten punkt nazywamy **środkiem układu sił**. Jaka będzie wartość, kierunek i zwrot siły wypadkowej? Aby to ustalić, posłużymy się metodą równoległoboku, jak pokazano na Rys. 10.

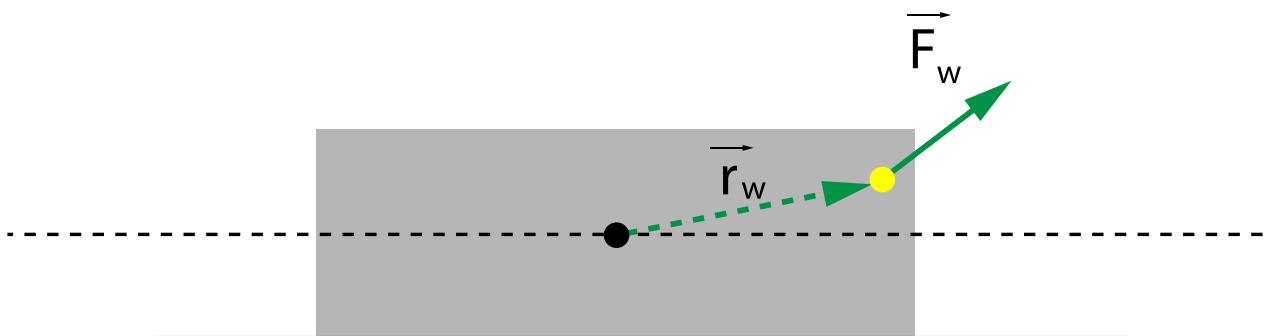


Rys. 10. Wypadkowa siła (zielona) dwóch nierównoległych sił działających na bryłę sztywną.

W efekcie otrzymujemy zaznaczoną na zielono siłę wypadkową $\vec{F}_w$, która jest zaczepiona w punkcie środka układu sił. Dodatkowo na Rys. 11. zieloną linią przerywaną zaznaczony został wektor $\vec{r}_w$ łączący środek masy bryły z punktem przyłożenia siły wypadkowej. W ten sposób uzyskujemy wypadkowy moment siły $\vec{M}_w$, który jest złożeniem (sumą wektorową) momentów $\vec{M}_1$ i $\vec{M}_2$:

$$\vec{M}_w = \vec{M}_1 + \vec{M}_2,$$

$$\vec{r}_w \times \vec{F}_w = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2.$$



Rys. 11. Wypadkowa siła tworząca moment siły.

W powyższym przykładzie przyłożyliśmy do ciała tylko dwie siły. Jasne jest jednak, że moglibyśmy przyłożyć dowolną ich liczbę. W takiej sytuacji, podobnie jak wtedy, gdy do punktu materialnego przyłożyliśmy trzy różne siły, wypadkowy moment siły moglibyśmy starać się wyznaczyć składając parami momenty składowe. W ogólnym przypadku postępowanie takie sprowadza się do wektorowego sumowania momentów składowych, zgodnie z poniższymi równaniami:

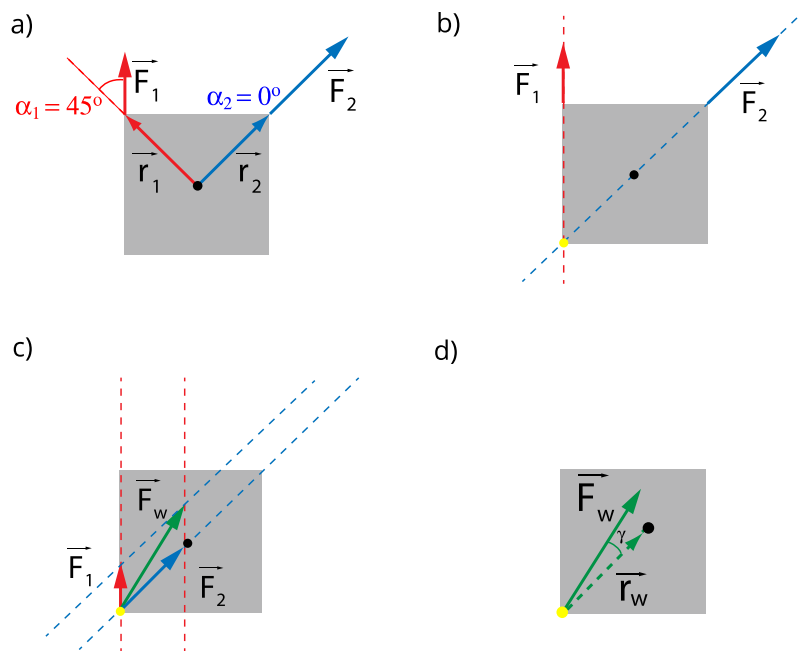
$$\vec{M}_w = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \dots + \vec{M}_n = \sum_{i=1}^n \vec{M}_i,$$

$$\vec{r}_w \times \vec{F}_w = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 + \dots + \vec{r}_n \times \vec{F}_n = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_i.$$

Przykład 1.

Przykład ten ma na celu ilustrację równoważność układu wielu sił i układu jednej siły wypadkowej zaczepionej w punkcie zwanym środkiem układu sił.

Rozważmy kwadrat, do którego przyłożono dwie siły, jak na Rys. 12. a. Siła $\vec{F}_1$ ma wartość 1 N, a wartość siły $\vec{F}_2$ wynosi 2 N. Wektor $\vec{F}_1$ jest przyłożony prostopadłe do górnej krawędzi kwadratu, wektor $\vec{F}_2$ tworzy z nią kątem równy 45° .



Rys. 12. Rysunek pomocniczy do przykładu 1 (omówiony w tekście).

Na Rys. 12. b. żółtą kropką zaznaczono środek układu sił $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$, wyznaczony w taki sam sposób, jak na Rys. 9. Na Rys. 12. c. widać, że po przesunięciu tych sił do punktu będącego środkiem układu sił tworzą one ze sobą kąt 45° .

Wartość siły wypadkowej $\vec{F}_w$ można teraz wyznaczyć korzystając z metody równoległoboku:

$$|\vec{F}_w| = \sqrt{|\vec{F}_1|^2 + |\vec{F}_2|^2 - 2|\vec{F}_1||\vec{F}_2|\cos \alpha}.$$

Podstawiając do powyższej zależności dane liczbowe dostajemy:

$$|\vec{F}_w| = \sqrt{(1N)^2 + (2N)^2 - 2 \cdot 1N \cdot 2N \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} \approx 1,47 N.$$

Aby wyznaczyć wartość wypadkowego momentu siły:

$$|\vec{M}_w| = |\vec{r}_w \times \vec{F}_w| = |\vec{r}_w| \cdot |\vec{F}_w| \cdot \sin \gamma,$$

oprócz długości wektora $\vec{F}_w$ (którą właśnie obliczyliśmy) i długości wektora $\vec{r}_w$ (która jest równa połowie przekątnej kwadratu), musimy jeszcze znaleźć sinus kąta γ między $\vec{F}_w$ i $\vec{r}_w$. W tym celu, w pierwszej kolejności, korzystając z [twierdzenia cosinusów](#), wyznaczymy cosinus tego kąta, a następnie, korzystając z [jedynki trygonometrycznej](#), znajdziemy jego sinus. I tak, z twierdzenia cosinusów, zastosowanego do trójkąta utworzonego przez wektory: $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ i $\vec{F}_w$, mamy:

$$\left| \vec{F}_1 \right|^2 = \left| \vec{F}_2 \right|^2 + \left| \vec{F}_w \right|^2 - \left| \vec{F}_2 \right| \cdot \left| \vec{F}_w \right| \cdot \cos \gamma,$$

skąd dostajemy:

$$\cos \gamma = \frac{\left| \vec{F}_w \right|^2 + \left| \vec{F}_2 \right|^2 - \left| \vec{F}_1 \right|^2}{2 \left| \vec{F}_w \right| \left| \vec{F}_2 \right|} \approx 0,88,$$

co daje:

$$\sin \gamma = \sqrt{1 - (\cos \gamma)^2} \approx 0,47.$$

Podstawiając odpowiednie wartości do wzoru na wypadkowy moment siły, otrzymujemy:

$$\left| \vec{M}_w \right| = \left| \vec{r}_w \right| \cdot \left| \vec{F}_w \right| \cdot \sin \gamma = \frac{\sqrt{2}}{2} m \cdot 1,47 N \cdot 0,47 \approx 0,5 N \cdot m.$$

A jaką wartość wypadkowego momentu siły uzyskalibyśmy sumując momenty sił:

$\vec{M}_1 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1$ i $\vec{M}_2 = \vec{r}_2 \times \vec{F}_2$? Ponieważ obydwa momenty są do siebie równoległe (są one prostopadłe do płaszczyzny, w której znajduje się kwadrat), dlatego:

$$\left| \vec{M}_w \right| = \left| \vec{M}_1 \right| + \left| \vec{M}_2 \right| = \left| \vec{r}_1 \right| \left| \vec{F}_1 \right| \sin \alpha_1 + \left| \vec{r}_2 \right| \left| \vec{F}_2 \right| \sin \alpha_2,$$

gdzie $\alpha_1 = 45^\circ$ i $\alpha_2 = 0^\circ$ (zob. Rys. 12. a.). Podstawiając odpowiednie wartości liczbowe do powyższego wyrażenia, dostajemy:

$$\left| \vec{M}_w \right| = \frac{\sqrt{2}}{2} m \cdot 1 N \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} m \cdot 2 N \cdot 0 = 0,5 N \cdot m.$$

Wniosek: rozważane układy sił są sobie równoważne.

Słowniczek

Bryła sztywna

(*ang. rigid body*) ciało, którego elementy (części, punkty materialne) nie mogą się względem siebie przemieszczać. Jest to idealizacja ciał fizycznych, w których uwzględnia się możliwe zmiany położenia ich punktów względem siebie.

Jedynka trygonometryczna

(*ang.: trigonometric identity*) tożsamość trygonometryczna postaci:

$$(\sin \alpha)^2 + (\cos \alpha)^2 = 1.$$

Punkt materialny

(*ang.: point particle*) (inaczej: masa punktowa) ciało fizyczne obdarzone masą, ale mające nieskończenie małe rozmiary (tzn. będące punktem).

Twierdzenie cosinusów

(*ang.: law of cosines*) zwane również twierdzeniem Carnota lub uogólnionym twierdzeniem Pitagorasa. Twierdzenie, które pozwala wyznaczyć długość trzeciego boku trójkąta znając dwa pozostałe boki i kąt pomiędzy nimi.

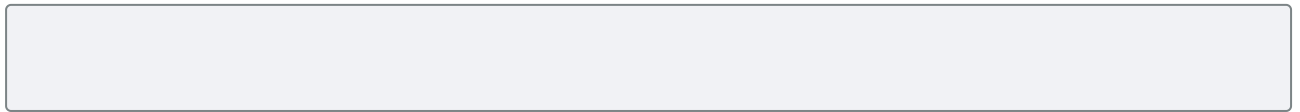
Animacja

W jaki sposób wyznaczamy położenie środka układu sił?

Obejrzyj zamieszczoną poniżej animację, na której pokazujemy, w jaki sposób wyznacza się siłę wypadkową, będącą złożeniem trzech nierównoległych sił działających na bryłę sztywną. Po obejrzeniu animacji wykonaj polecenia, które pomogą Ci w utrwaleniu zdobytych informacji i umiejętności.

Polecenie 1

Na kartce papieru naszkicuj bryłę sztywną o dowolnym kształcie. Powtórz przedstawiony na animacji schemat postępowania prowadzący do wyznaczenia siły wypadkowej działającej na tę bryłę w sytuacji, gdy zostaną do niej przyłożone trzy nierównoległe siły zewnętrzne. Możesz w tym celu skorzystać z linijki i cyrkla.



Polecenie 2

Uzupełnij poniższy tekst:

Punkt, do którego przyłożona jest wypadkowa siła działająca na bryłę sztywną nazywamy środkiem . Gdy punkt ten nie pokrywa się ze środkiem , wówczas pojawia się w moment , który zgodnie z zasadą dynamiki dla bryły sztywnej, sprawia, że zaczyna się ona poruszać ruchem .

obrotowym

drugą

układu sił

siły

bezwładności

układu

postępowym

trzecią

ciężkości

pierwszą

masy

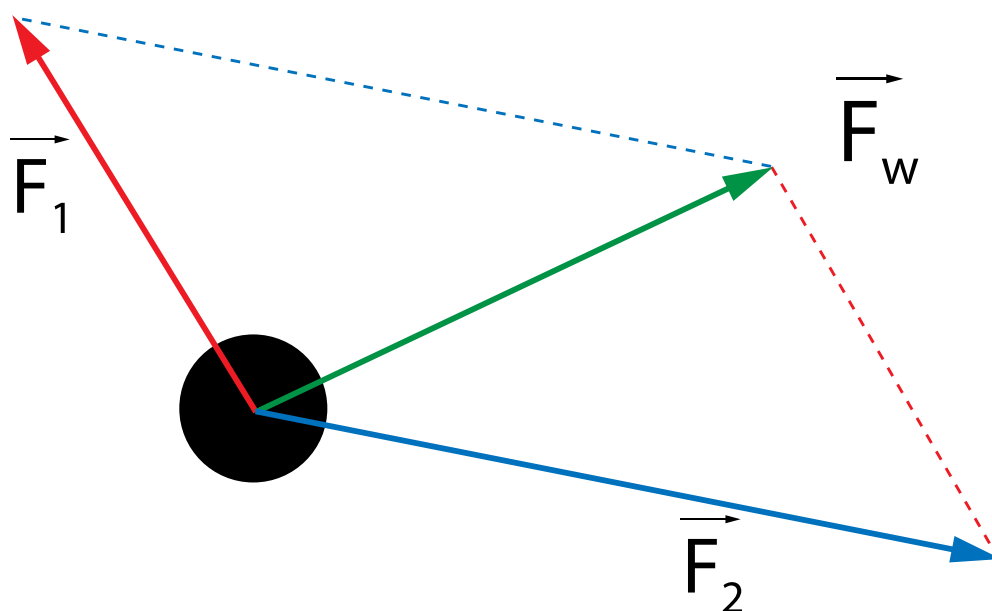
Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Na załączonym rysunku zaprezentowano graficzną metodę składania sił: $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{F}_w$. Jak nazywa się ta metoda?

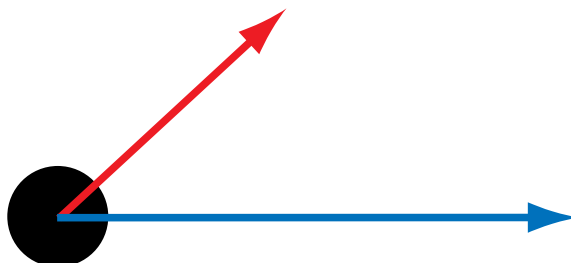


- ☐ metoda równoległoboku
- ☐ metoda wektorów nierównoległych
- ☐ metoda przesunięć równoległych
- ☐ metoda trójkątów przystających

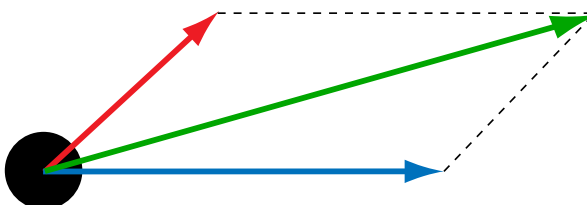
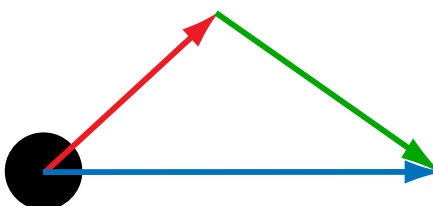
Ćwiczenie 2

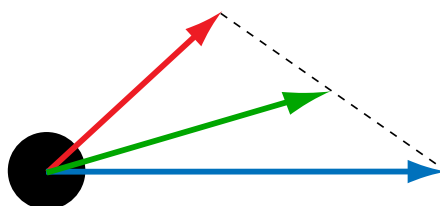
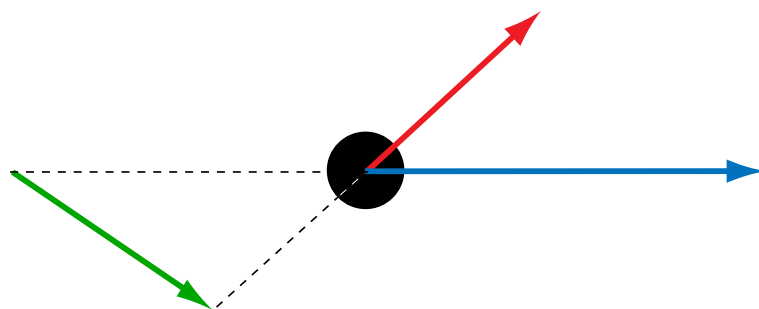


Do ciała przyłożono dwie siły (czerwoną i niebieską), jak na poniższym rysunku:



Zaznacz, na którym z zamieszczonych rysunków prawidłowo narysowany jest wektor siły wypadkowej (zielony) działającej na to ciało?





Ćwiczenie 3



Wartość wektora siły wypadkowej $F_w = \left| \vec{F}_w \right|$ powstałego ze złożenia dwóch sił

o wartościach: $F_1 = \left| \vec{F}_1 \right|$ i $F_2 = \left| \vec{F}_2 \right|$ zależy od kąta α między $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$. Jeśli $\alpha \in (0, 90^\circ)$, wtedy prawdziwa jest zależność (uzupełnij):

$$(F_w)^2 = (F_1)^2 + (F_2)^2 \boxed{} \boxed{} F_1 F_2 \boxed{}.$$

4 $\sin \alpha$ 2 - $\cos \alpha$ +

Ćwiczenie 4



Do punktu materialnego przyłożono dwie siły o wartościach $F_1 = \left| \vec{F}_1 \right| = 2N$ i

$F_2 = \left| \vec{F}_2 \right| = 3N$. Kąt pomiędzy tymi siłami wynosi $\alpha = 120^\circ$. Jaka jest wartość siły wypadkowej $F_w = \left| \vec{F}_w \right|$, powstałej ze złożenia tych dwóch sił? Odpowiedź zaokrąglaj do dwóch miejsc po przecinku.

Odpowiedź: N

Ćwiczenie 5



Do ciała przyłożono 3 siły. Nie były one równoległe, więc parami składano je metodą równoległoboku, aby znaleźć położenie środka układu sił i wartość siły wypadkowej. Po wykonaniu obliczeń okazało się, że siła wypadkowa ma mniejszą wartość niż każda z sił składowych. Jak zmienił się całkowity moment siły działający na to ciało?



Moment siły wypadkowej nie zmienił się, ponieważ sytuacja fizyczna nie uległa zmianie. Opisana procedura wyznaczania wypadkowego momentu siły jest jedynie metodą wykorzystywaną do obliczeń i nie zmienia oryginalnego układu sił działających na ciało.



Wypadkowy moment siły również się zmniejszył.

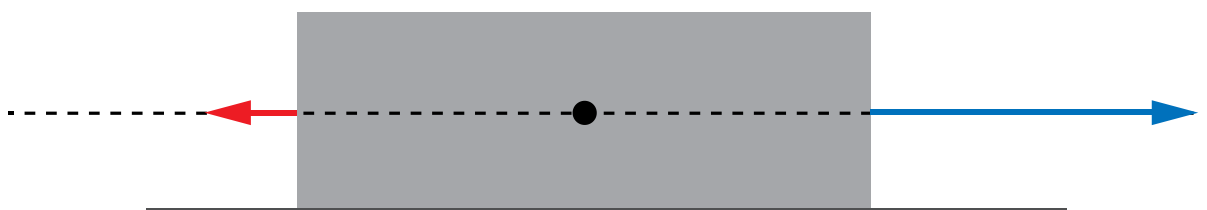


To zależy od odległości środka układu sił od środka masy, ponieważ ta odległość tworzy ramię siły wypadkowej.

Ćwiczenie 6



Na rysunku zaznaczono dwie siły przyłożone do ciała. Siła oznaczona kolorem czerwonym ma wartość 3 N, a siła oznaczona kolorem niebieskim ma wartość 12 N. Odległość punktu przyłożenia obydwu sił od środka masy ciała jest równa 1 m. Zaznacz, które z poniższych stwierdzeń są prawdziwe:

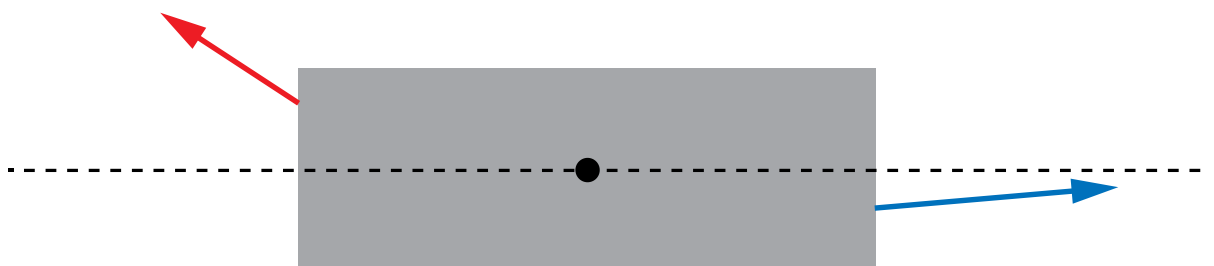


- ☐ Siła wypadkowa ma kierunek poziomy, jest skierowana w prawo, a jej wartość wynosi 9 N.
- ☐ Wypadkowy moment siły jest prostopadły do płaszczyzny rysunku i ma wartość równą 15 Nm.
- ☐ Bez znajomości dokładnych wymiarów i kształtu ciała nie da się oszacować wartości wypadkowego momentu siły.
- ☐ Wypadkowy moment siły jest równy zero, ponieważ obydwie przyłożone siły są współliniowe i leżą na prostej przechodzącej przez środek masy ciała.

Ćwiczenie 7



Na rysunku przedstawiono parę nierównoległych sił przyłożonych do bryły sztywnej. Wyznacz graficznie położenie środka układu tych sił i wartość wektora siły wypadkowej.



Ćwiczenie 8



Korzystając z twierdzenia cosinusów wyprowadź wzór pokazujący, jak wartość siły wypadkowej $F_w = \left| \vec{F}_w \right|$ zależy od wartości sił składowych $F_1 = \left| \vec{F}_1 \right|$ i $F_2 = \left| \vec{F}_2 \right|$, które tworzą ze sobą kąt ostry α .

Dla nauczyciela

Imię i nazwisko autora:	Dariusz Aksamit
Przedmiot:	Fizyka
Temat zajęć:	W jaki sposób wyznaczamy położenie środka układu sił?
Grupa docelowa:	III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony
Podstawa programowa:	Cele kształcenia – wymagania ogólne II. Rozwiązywanie problemów z wykorzystaniem praw i zależności fizycznych. Zakres rozszerzony Treści nauczania – wymagania szczegółowe I. Wymagania przekrojowe. Uczeń: 5) rozróżnia wielkości wektorowe i skalarne, wykonuje graficznie działania na wektorach (dodawanie, odejmowanie, rozkładanie na składowe). III. Mechanika bryły sztywnej. Uczeń: 3) stosuje warunki statyki bryły sztywnej; posługuje się pojęciem momentu sił wraz z jednostką.
Kształtowane kompetencje kluczowe:	Zalecenia Parlamentu Europejskiego i Rady UE z 2018 r.: • kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji, • kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii, • kompetencje cyfrowe, • kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:	Uczeń: - wyjaśnia, na czym polega metoda równoległoboku i ilustruje działanie tej metody na przykładach, - wyjaśnia, w jaki sposób wyznaczyć położenie środka układu sił przyłożonych do bryły sztywnej i stosuje zdobyte umiejętności w przykładach, - oblicza wartość siły wypadkowej działającej na punkt materialny, korzystając przy tym z twierdzenia cosinusów. - oblicza wypadkowy moment siły działający na bryłę sztywną, - rozróżnia przypadki sił współliniowych i niewspółliniowych.
Strategie i metody nauczania:	odwrócona klasa (flipped classroom)
Formy zajęć:	- praca indywidualna, - dyskusja grupowa.
Środki dydaktyczne:	Komputer z dostępem do Internetu i projektorem multimedialnym, przyrządy do geometrii (linijka, cyrkiel).
Materiały pomocnicze	e-materiały: „Co to jest wektor?”, „Dodawanie i odejmowanie wektorów”, „Jak definiuje się moment siły?”, „Jak wyznaczyć moment siły?”
PRZEBIEG LEKCJI	
Faza wprowadzająca:	
Na wcześniejszej lekcji nauczyciel prosi uczniów o obejrzenie animacji z niniejszego e-materiału i przećwiczenie w domu zaprezentowanej konstrukcji geometrycznej. Rozpoczynając lekcję nauczyciel prosi ochotnika o streszczenie treści filmu. Nauczyciel zapisuje wnioski - jakie są kolejne etapy przeprowadzania konstrukcji.	
Faza realizacyjna:	

Nauczyciel prosi uczniów o to, by w zeszytach (najlepiej w kratkę) samodzielnie przeprowadzili opisaną konstrukcję. Nauczyciel podaje na tablicy trzy przykłady: z dwoma ustalonymi wartościami sił, ale tworzących ze sobą: a) kąt prosty, b) kąt rozwarty, c) kąt ostry. Nauczyciel daje uczniom czas na samodzielne wykonanie konstrukcji, następnie prosi ochotnika o zaprezentowanie rozwiązania na tablicy. Nauczyciel prosi teraz o zmierzenie linijką długości powstałego wektora i porównanie zmierzonej wartości z wynikiem uzyskanym z obliczeń.

Faza podsumowująca:

Nauczyciel podsumowuje wyniki, pokazując skuteczność metody graficznej. Dla utrwalenia materiału uczniowie rozwiązują wybrane zadania z zestawu ćwiczeń.

Praca domowa:

Nauczyciel zadaje ochotnikom do wykonania zadania nie zrobione w trakcie lekcji.

**Wskazówki metodyczne
opisujące różne
zastosowania danego
multimedium:**

Multimedium może być wykorzystane w taki sposób, jak opisano w scenariuszu. Może też posłużyć uczniom po lekcji, w celu utrwalenia materiału.