Twierdzenie o 3 prostych prostopadłych

Twierdzenie o 3 prostych prostopadłych

Źródło: Seb Zurcher, dostępny w internecie: https://unsplash.com/.

Pewnie zauważyłeś, że w architekturze często pojawia się kąt prosty. W jaki sposób taki kąt wyznaczyć w przestrzeni? Na takie pytanie może pomóc odpowiedzieć twierdzenie o trzech prostych prostopadłych. Pozwala ono stwierdzić, kiedy dwie proste są do siebie prostopadłe.

Krzywy domek, Sopot

Źródło: JANBUR, dostępny w internecie: commons.wikimedia.org, licencja: CC BY-SA 3.0.

Twoje cele

- Poznasz twierdzenie o trzech prostych prostopadłych.
- Zastosujesz twierdzenie o trzech prostych prostopadłych w zadaniach.
- Rozwiniesz umiejętność uzasadniania, że dany kąt jest kątem prostym.

Przeczytaj

Jeśli chcemy udowodnić, że dany kąt jest kątem prostym na płaszczyźnie, możemy użyć twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Pitagorasa. Mówi ono, że jeśli suma kwadratów długości dwóch krótszych boków trójkąta jest równa kwadratowi długości najdłuższego boku, to trójkąt ten jest prostokątny. Wiadomo również, że kątem prostym jest wtedy kąt leżący naprzeciw najdłuższego boku. Twierdzenie to jest jednym z narzędzi pozwalającym badać prostopadłość prostych. W tym materiale poznamy kolejne twierdzenie mówiące, kiedy dwie proste są prostopadłe. Zanim przejdziemy do omówienia samego twierdzenia i jego dowodu przypomnijmy pewne fakty.

Prosta k jest prostopadła do płaszczyzny p, jeżeli jest prostopadła do każdej prostej zawierającej się w płaszczyźnie p i przechodzącej przez punkt wspólny prostej k i płaszczyzny p.

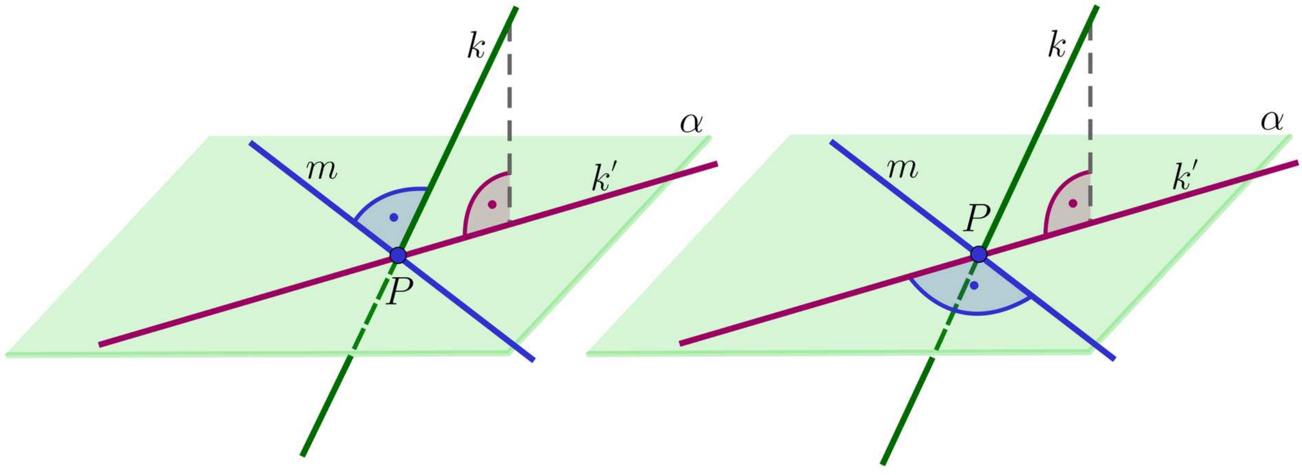
Rzutem prostopadłym punktu na płaszczyznę jest punkt przecięcia prostej prostopadłej do tej płaszczyzny przechodzącej przez ten punkt z tą płaszczyzną.

Dane są przecinające się płaszczyzny p i q. Jeżeli prosta k zawarta w płaszczyźnie p jest prostopadła do dwóch prostych l i m zawartych w płaszczyźnie q, gdzie proste k, l i m przecinają się w jednym punkcie, to płaszczyzna p jest prostopadła do płaszczyzny q.

Twierdzenie: O trzech prostych prostopadłych

Dana jest płaszczyzna α i prosta k przecinająca tę płaszczyznę w punkcie P. Niech k’ będzie rzutem prostopadłym prostej k na płaszczyznę α. Wtedy prosta m zawarta w płaszczyźnie α i przechodząca przez punkt P jest prostopadła do prostej k wtedy i tylko wtedy, gdy jest prostopadła do prostej k’, czyli

$$m \perp k \Leftrightarrow m' \perp k'$$



Dowód

Ponieważ prosta k' jest rzutem prostej k na płaszczyznę α, więc płaszczyzna wyznaczona przez proste k i k' jest prostopadła do płaszczyzny α.

Oznaczmy tę płaszczyznę przez β.
Poprowadźmy prostą l zawartą w płaszczyźnie β, prostopadłą do prostej k' i przechodzącą przez punkt P. Wtedy prosta l jest prostopadła do płaszczyzny α. Zatem prosta l jest prostopadła do prostej m.

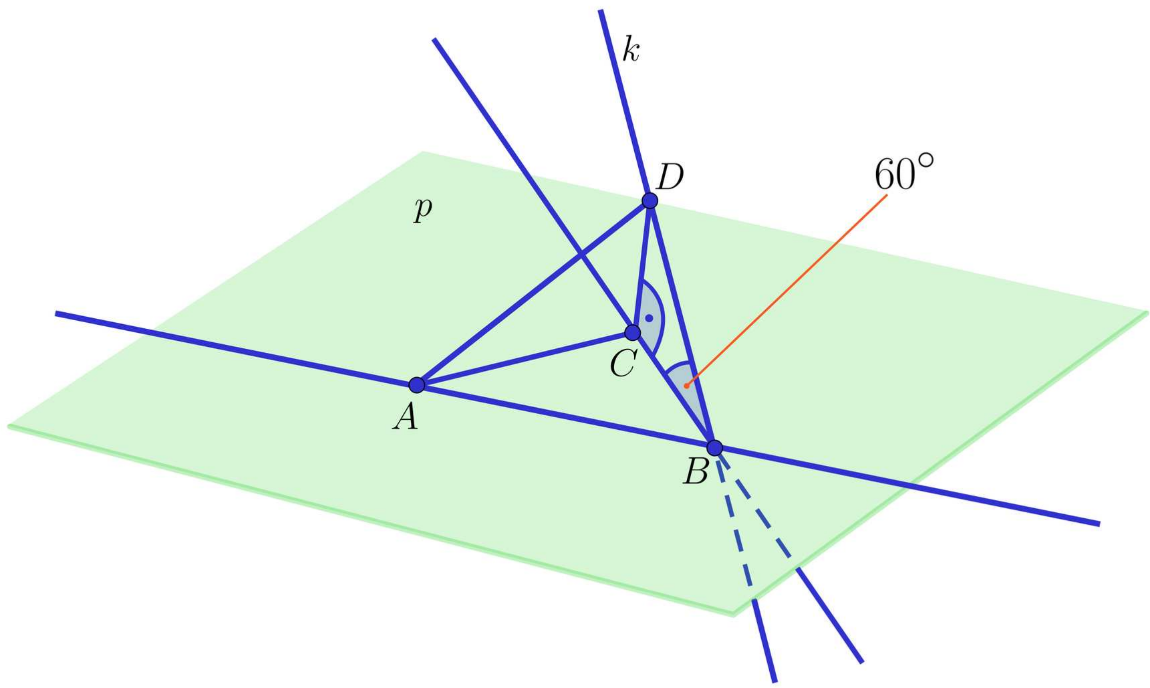
Jeśli prosta m jest prostopadła do prostej k', to jest prostopadła do płaszczyzny β, gdyż jest prostopadła do dwóch prostych zawartych w tej płaszczyźnie: k' i l. Stąd prosta m jest prostopadła do każdej prostej zawartej w płaszczyźnie β, w szczególności do prostej k.

Jeśli prosta m jest prostopadła do prostej k, to jest prostopadła do płaszczyzny β, gdyż jest prostopadła do dwóch prostych zawartych w tej płaszczyźnie: k i l. Stąd prosta m jest prostopadła do każdej prostej zawartej w płaszczyźnie β, w szczególności do prostej k'.

Przykład 1

Na płaszczyźnie p dane są dwa punkty A i B. Przez punkt B przechodzi prosta k nachylona pod kątem 60° do płaszczyzny p. Na prostej k dany jest punkt D, którego rzutem prostopadłym na płaszczyznę p jest punkt C.
Wiedząc, że $|AB| = 3$, $|AC| = \sqrt{13}$ i $|BC| = 2$ obliczymy odległość pomiędzy punktami A i D.

Rozwiązanie



Zauważmy, że $|AB|^2 + |BC|^2 = |AC|^2$, więc z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Pitagorasa kąt ABC jest kątem prostym.

Ponieważ prosta AB jest prostopadła do prostej BC, więc z twierdzenia o trzech prostych prostopadłych prosta AB jest prostopadła do prostej BD, czyli trójkąt ABD jest trójkątem prostokątnym.

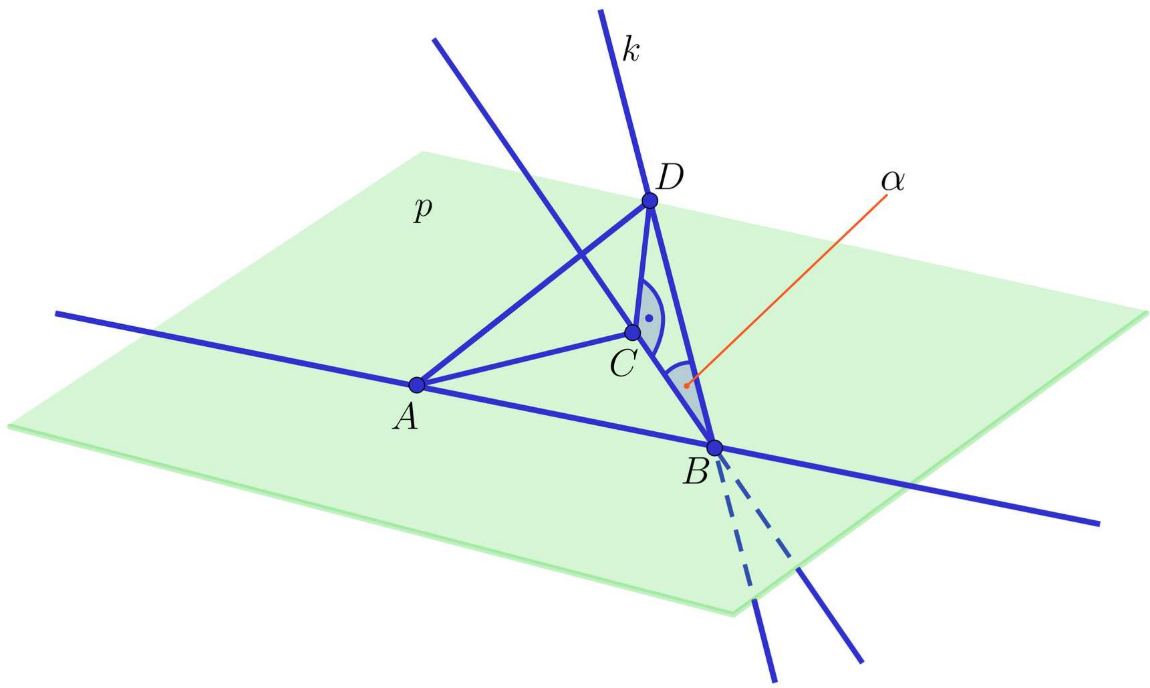
Z trójkąta prostokątnego BCD otrzymujemy $\frac{2}{|BD|} = \frac{1}{2}$, czyli $|BD| = 4$.

Z trójkąta prostokątnego ABD otrzymujemy $|AD| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.

Przykład 2

Na płaszczyźnie p dane są dwa punkty A i B. Przez punkt B przechodzi prosta k nachylona pod kątem α do płaszczyzny p. Na prostej k dany jest punkt D, którego rzutem prostopadłym na płaszczyznę p jest punkt C. Wiedząc, że $|AB| = |BD| = a$ i pole trójkąta ABD wynosi $\frac{1}{2}a^2$ obliczymy pole trójkąta ABC.

Rozwiązanie



Oznaczmy przez β kąt ABD. Wówczas $\frac{1}{2}a^2 \sin\beta = \frac{1}{2}a^2$, czyli $\sin\beta = 1$. Stąd $\beta = 90^\circ$.

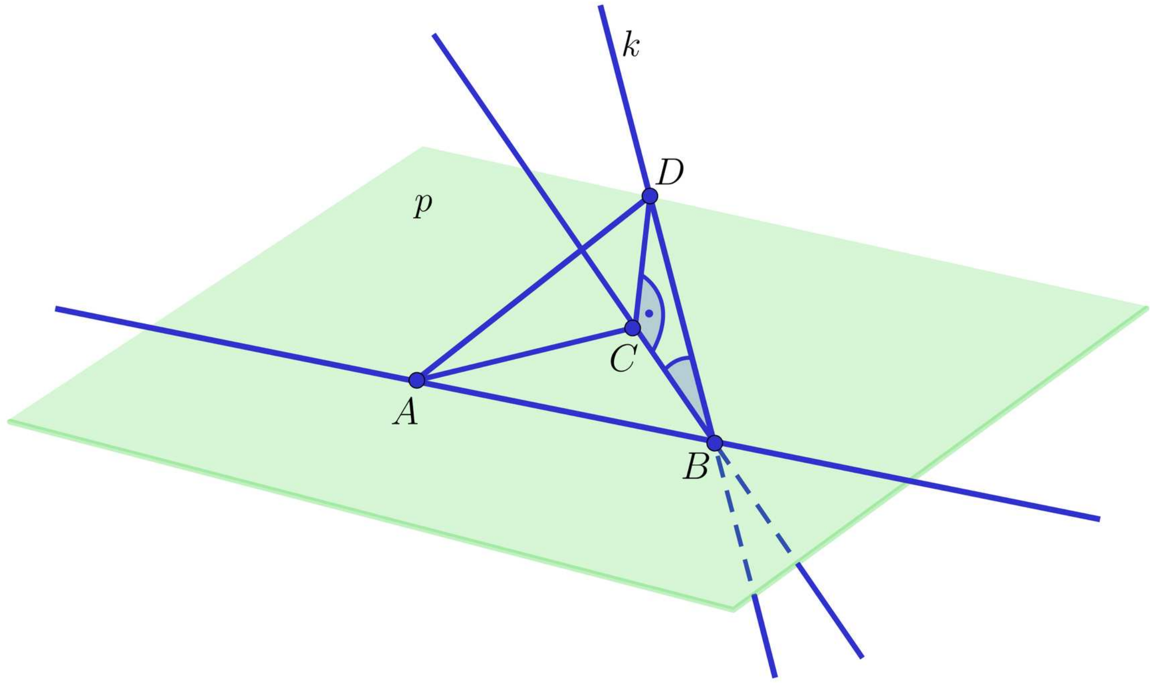
Ponieważ prosta AB jest prostopadła do prostej BD, więc z twierdzenia o trzech prostych prostopadłych prosta AB jest prostopadła do prostej BC.

Z trójkąta prostokątnego BCD otrzymujemy $\frac{|BC|}{a} = \cos\alpha$, czyli $|BC| = a\cos\alpha$. Pole trójkąta prostokątnego ABC wynosi $P = \frac{1}{2}a^2\cos\alpha$.

Przykład 3

Na płaszczyźnie p dane są dwa punkty A i B. Przez punkt B przechodzi prosta k. Na prostej k dany jest punkt D, którego rzutem prostopadłym na płaszczyznę p jest punkt C. Wiedząc, że prosta AB jest prostopadła do prostej BC oraz stosunek pola trójkąta ABC do pola trójkąta ABD wynosi $s \leq 1$ wyznaczymy kąt, pod jakim prosta k nachylona jest do płaszczyzny p.

Rozwiązanie



Ponieważ prosta AB jest prostopadła do prostej BC, więc z twierdzenia o trzech prostych prostopadłych prosta AB jest prostopadła do prostej k.

Oznaczmy kąt CBD trójkąta prostokątnego BCD przez α. Kąt ten jest również kątem nachylenia prostej k do płaszczyzny p.

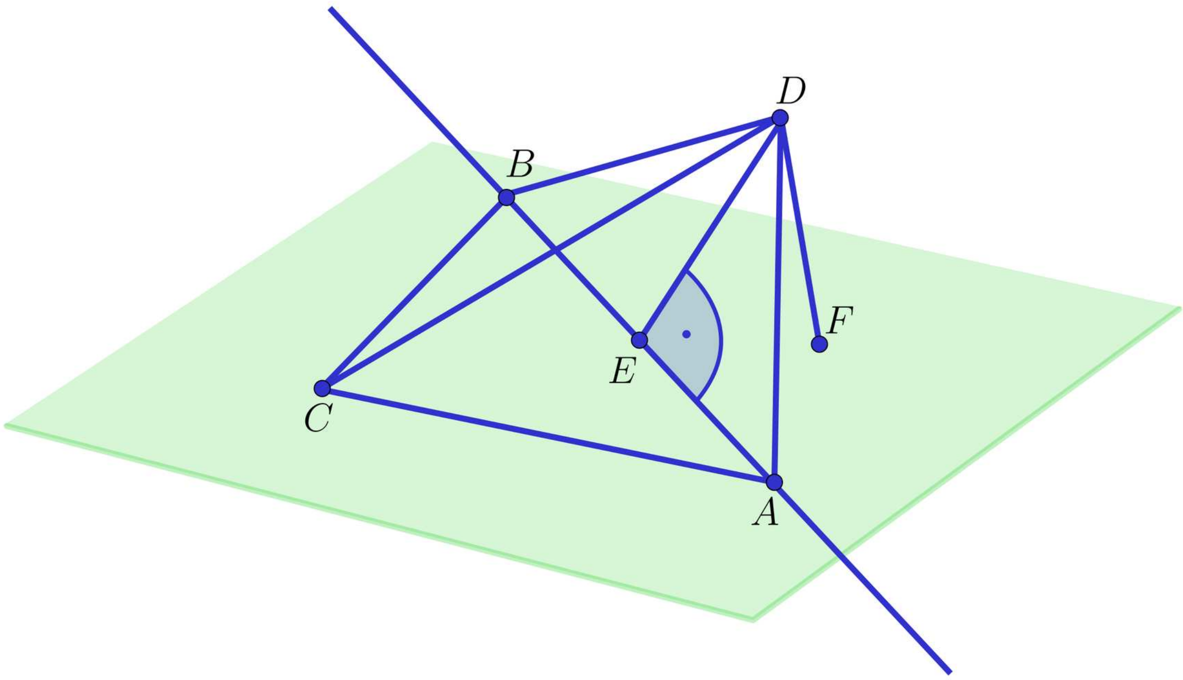
Ponieważ trójkąty ABC i ABD są prostokątne, więc $\frac{P_{\triangle ABC}}{P_{\triangle ABD}} = \frac{|AB| \cdot |BC|}{|AB| \cdot |BD|} = \frac{|BC|}{|BD|} = \cos \alpha$. Stąd $\cos \alpha = s$.

Prosta k przecina płaszczyznę p pod kątem α spełniającym równanie $\cos \alpha = s$, gdzie $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$.

Przykład 4

Dane są trzy punkty A, B i C takie, że $|AC| = |BC|$. Punkt E jest środkiem odcinka AB. Dany jest punkt D taki, że prosta DE jest prostopadła do prostej AB. Uzasadnimy, że rzut prostopadły punktu D na płaszczyznę ABC należy do prostej CE.

Rozwiązanie



Ponieważ trójkąt ABC jest trójkątem równoramiennym ($|AC| = |BC|$), więc prosta CE jest prostopadła do prostej AB.

Niech punkt F będzie rzutem prostopadłym punktu D na płaszczyznę ABC.

Ponieważ prosta AB jest prostopadła do prostej DE, więc z twierdzenia o trzech prostych prostopadłych AB jest prostopadła do EF.

Proste AB, CE i EF leżą w jednej płaszczyźnie oraz prosta AB jest prostopadła do prostej CE oraz EF. Zatem proste CE i EF się pokrywają. Stąd punkt F leży na prostej CE.

Słownik

rzut prostopadły punktu na płaszczyznę

punkt przecięcia prostej prostopadłej do tej płaszczyzny przechodzącej przez ten punkt z tą płaszczyzną

Aplet

Polecenie 1

Przeanalizuj dokładnie poniższy aplet. Zastanów się, czy rozumiesz wszystkie kolejne kroki przedstawionego w nim rozumowania.

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DhthvjcCT

Polecenie 2

Wyjaśnij na podstawie powyższego apletu, dlaczego, jeśli prosta m jest prostopadła do prostej $k\prime$, to m jest prostopadła do k.

Polecenie 3

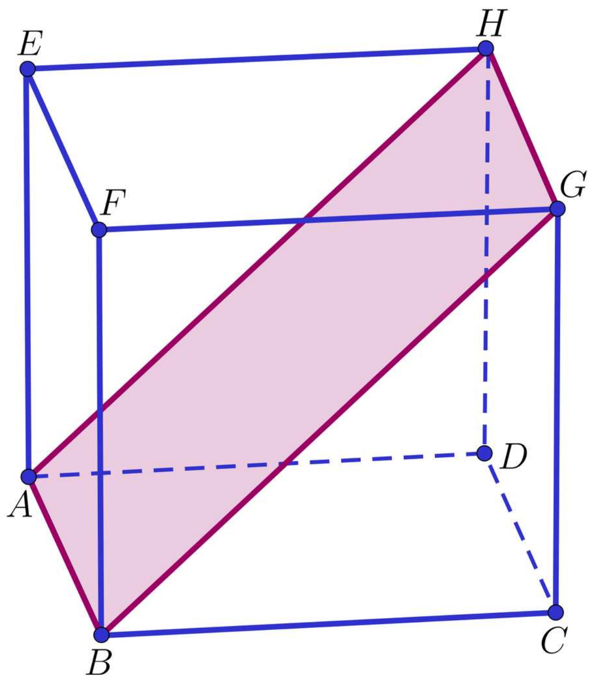
Dana jest płaszczyzna α oraz prosta k przecinająca tę płaszczyznę pod pewnym kątem w punkcie P. Rzutem prostej k na płaszczyznę α jest prosta $k\prime$. W prostej $k\prime$ zawarty jest odcinek AB, którego środkiem jest punkt P. Jaką miarę ma kąt pomiędzy symetralną odcinka AB zawartą w płaszczyźnie α a prostą k. Odpowiedź uzasadnij.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

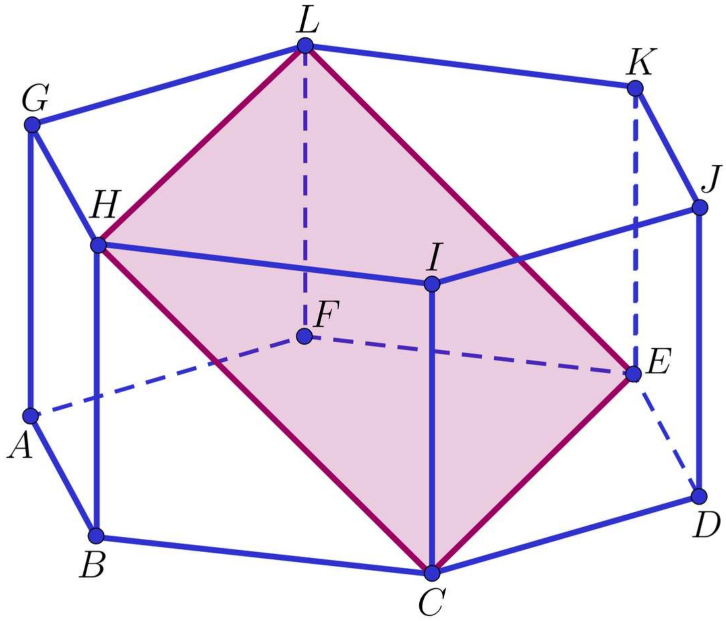
Ćwiczenie 1

Dany jest sześcian.



Ćwiczenie 2

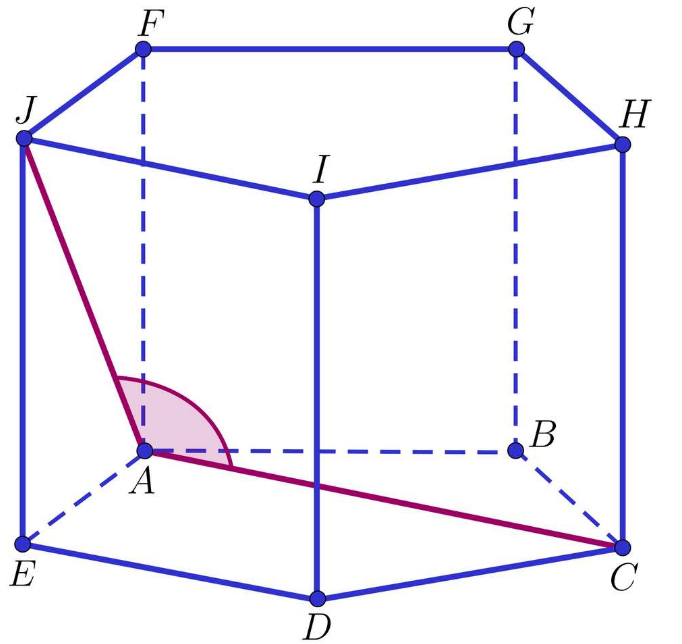
Dany jest graniastosłup o podstawie sześciokąta foremnego o boku długości a. Wysokość graniastosłupa wynosi $\sqrt{2}a$.



Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

Dany jest graniastosłup o podstawie pięciokąta foremnego. Uzasadnij, że kąt CAJ nie jest kątem prostym.



Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

Dany jest ostrosłup $ABCDE$, w którym prosta DE jest prostopadła do płaszczyzny podstawy $ABCD$. Wykaż, że jeśli czworokąt $ABCD$ jest kwadratem, to wszystkie ściany boczne ostrosłupa są trójkątami prostokątnymi.

Ćwiczenie 7

Ćwiczenie 8

Dany jest ostrosłup $ABCDE$, w którym podstawą jest kwadrat o boku długości a. Prosta DE jest prostopadła do płaszczyzny podstawy $ABCD$. Wiedząc, że pole powierzchni całkowitej wynosi $\left(3+\sqrt{5}\right)a^2$ wyznaczyć długość wysokości tego ostrosłupa.

Dla nauczyciela

Autor: Adrian Karpowicz

Przedmiot: Matematyka

Temat: Twierdzenie o trzech prostych prostopadłych

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

zakres rozszerzony

X. Stereometria

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

1) zna i stosuje twierdzenie o prostej prostopadłej do płaszczyzny i o trzech prostych prostopadłych;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- wskazuje kąty pomiędzy dwiema prostymi w przestrzeni,
- formułuje i stosuje twierdzenie o trzech prostych prostopadłych,
- uzasadnia, że dany kąt jest kątem prostym,
- uzasadnia, że dany kąt nie jest kątem prostym

Strategie nauczania:

Metody i techniki nauczania:

- pogadanka
- burza mózgów

- pokaz

Formy pracy:

- praca indywidualna
- praca w parach
- praca całego zespołu

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu
- projektor multimedialny
- e-podręcznik (epodreczniki.pl)

Przebieg zajęć:

Przed lekcją:

- Przed lekcją uczniowie zapoznają się z materiałem z sekcji Przeczytaj.

Faza wstępna:

1. Uczniowie zapoznają się z apletem.
2. Następnie zastanawiają się w parach nad rozwiązaniem Poleceń od 1 do 3.
3. Rozwiązania poleceń zostają omówione na forum klasy.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie metodą tekstu przewodniego zapoznają się z materiałem w sekcji Przeczytaj.
2. Uczniowie indywidualnie zastanawiają się nad rozwiązaniem ćwiczenia 1 i 2.
3. Rozwiązania zadań zostają omówione na forum klasy.
4. Cała klasa zastanawia się nad rozwiązaniem zadania 3 i 4. Pomysły prezentowane są na forum klasy.
5. Przedstawione zostają rozwiązania tych zadań.
6. Uczniowie indywidualnie zastanawiają się nad rozwiązaniem ćwiczenia 6.
7. Rozwiązanie ćwiczenia zostają omówione na forum klasy

Faza podsumowująca:

- Podsumowanie tematu lekcji. Omówienie ewentualnych pytań dotyczących omawianego materiału.

Praca domowa

Rozwiązać zadania 5, 7 i 8.

Materiały pomocnicze:

Punkty, proste i płaszczyzny w przestrzeni

Wskazówki metodyczne:

Analiza apletu i wykonanie związanych z nim poleceń może być pracą domową dla uczniów.