



Schemat Hornera – zadania maturalne

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Prezentacja multimedialna
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela



Schemat Hornera – zadania maturalne

Źródło: Charles Deluvio, domena publiczna.

W e-materiale [Schemat Hornera](#) poznaliśmy dwie wersje algorytmu, z pomocą którego można obliczyć wartość wielomianu, wykorzystując minimalną liczbę mnożeń.

W tym e-materiale zapoznamy się z przykładowym zadaniem maturalnym dotyczącym tego zagadnienia.

Implementacje w poszczególnych językach programowania przedstawiamy w e-materiałach:

- [Schemat Hornera w języku C++](#),
- [Schemat Hornera w języku Java](#),
- [Schemat Hornera w języku Python](#).

Twoje cele

- Przeanalizujesz zadania wykorzystujące schemat Hornera.
- Rozwiążesz samodzielnie zadania autorstwa Centralnej Komisji Egzaminacyjnej.
- Przeanalizujesz złożoność czasową algorytmu obliczającego wartość wielomianu za pomocą schematu Hornera.

Przeczytaj

Przykładowe zadanie typu maturalnego

Zadanie 1. Wiązka zadań *Schemat Hornera*

Schemat Hornera jest bardzo efektywną metodą obliczania wartości [wielomianu](#):

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

gdzie dane liczby rzeczywiste $a_0, a_1, \dots, a_n$ nazywamy współczynnikami, a liczba całkowita $n \geq 0$ oznacza [stopień wielomianu](#). Schemat bazuje na zależności:

$$P(x) = x(a_n x^{n-1} + a_{n-1} x^{n-2} + \dots + a_2 x^1 + a_1) + a_0 = x \cdot Q(x) + a_0$$

gdzie:

$$Q(x) = a_n x^{n-1} + a_{n-1} x^{n-2} + \dots + a_2 x^1 + a_1$$

Stąd otrzymujemy następujący schemat obliczania wartości $P(x)$

Dane:

- n – liczba całkowita, $n \geq 0$,
- x – liczba rzeczywista,
- $a_0, a_1, \dots, a_n$ – liczby rzeczywiste.

Wynik:

- wartość $P(x)$

Algorytm (schemat Hornera):

$w = a_n$

dla $k = n - 1, n - 2, \dots, 0$ wykonuj

$$(*) \quad w = x * w + a_k$$

zwróć w i zakończ

Zadanie zostało opracowane przez Centralną Komisję Egzaminacyjną i znajduje się w *Maturalnym zbiorze zadań z informatyki* jako zadanie 22.

Zadanie 1.1

Treść polecenia

Uzupełnij poniższą tabelkę, podając wartości danych, jakie należy przyjąć w powyższym schemacie, aby wyznaczyć wartość $P(6)$ dla wielomianu:

$$P(x) = 10x^5 - 13x^4 + x^3 + 2x^2 - 8x + 7$$

Dane	Wartości
liczba naturalna n	
liczba rzeczywista x	
liczby rzeczywiste $a_0, a_1, \dots, a_n$	

Rozwiązanie

Aby wykonać to zadanie, należy dokładnie zapoznać się ze specyfikacją schematu Hornera.

Z opisu wynika, że liczba naturalna n oznacza stopień wielomianu, więc $n = 5$.

Liczba rzeczywista x to po prostu wartość, dla której podany wielomian ma zostać obliczony, czyli $P(6)$. Wynika stąd, że $x = 6$.

Liczby rzeczywiste $a_0, a_1, \dots, a_n$ to kolejne współczynniki wielomianu. Zatem jako odpowiedź należy wypisać kolejno: 7, -8, 2, 1, -13, 10.

Poprawna odpowiedź

Dane	Wartości
liczba naturalna n	5
liczba rzeczywista x	6
liczby rzeczywiste $a_0, a_1, \dots, a_n$	7, -8, 2, 1, -13, 10

Zadanie zostało opracowane przez Centralną Komisję Egzaminacyjną i znajduje się w *Maturalnym zbiorze zadań z informatyki* jako zadanie 22.1.

Zadanie 1.2

Treść polecenia

Uzupełnij poniższą tabelkę, wyrażając wzorem liczbę operacji mnożenia i dodawania, jaka zostanie wykonana przez schemat Hornera – w wierszu oznaczonym przez (*) – dla danego wielomianu:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

Dane	Liczba operacji
Dodawanie	
Mnożenie	

Rozwiązanie

W tym zadaniu należy przeanalizować zapisany w pseudokodzie [algorytm](#). Działanie oznaczone jako (*) wykonywane jest każdorazowo dla wartości od $n - 1$ do 0. Występują w nim kolejno jedna operacja mnożenia i jedna operacja dodawania. Oznacza to, że każda z nich wykona się tyle samo razy, czyli n .

Poprawna odpowiedź

Dane	Liczba operacji
Dodawanie	n
Mnożenie	n

Zadanie zostało opracowane przez Centralną Komisję Egzaminacyjną i znajduje się w *Maturalnym zbiorze zadań z informatyki* jako zadanie 22.2.

Zadanie 1.3

Treść zadania

Wielomianem parzystym nazywamy wielomian stopnia $2n$ postaci

$$P(x) = a_n x^{2n} + a_{n-1} x^{2n-2} + \dots + a_2 x^4 + a_1 x^2 + a_0$$

tzn. taki, w którym występują tylko parzyste potęgi zmiennej x . Bazując na schemacie Hornera, napisz algorytm o poniższej specyfikacji (w pseudokodzie lub wybranym języku

programowania), który oblicza wartość parzystego wielomianu $R(x)$.

Dane

n – liczba całkowita, $n \geq 0$,

x – liczba rzeczywista,

$a_0, a_1, \dots, a_n$ – liczby rzeczywiste.

Wynik

wartość $R(x)$

Przy ocenie rozwiązania będzie brana pod uwagę liczba operacji mnożenia i dodawania wykonywanych przez algorytm.

Rozwiązanie

Zauważ, że jedyną różnicą pomiędzy wzorem podanym w tym zadaniu a ogólnym wzorem na obliczenie wartości wielomianu metodą schematu Hornera jest potęga, do jakiej należy podnieść wartość x . Aby sprowadzić wzór z zadania do wzoru ogólnego, wystarczy wcześniej podnieść x do potęgi drugiej.

$$p = x * x$$

$$w = a_n$$

dla $k = n - 1, n - 2, \dots, 0$ wykonuj

$$(*) \quad w = p * w + a_k$$

zwróć w i zakończ

Zadanie zostało opracowane przez Centralną Komisję Egzaminacyjną i znajduje się w *Maturalnym zbiorze zadań z informatyki* jako zadanie 22.4.

Słownik

William George Horner

brytyjski matematyk żyjący w latach 1786–1837; w wieku 14 lat został asystentem nauczyciela w szkole w Bristolu, a w 1809 roku założył własną szkołę w Bath; podał sposób wyznaczania wartości wielomianu z wykorzystaniem minimalnej liczby operacji mnożenia

wielomian

wyrażenie algebraiczne będące sumą jednomianów, czyli wyrażeń postaci $a_n x^n$

stopień wielomianu

najwyższa potęga przy zmiennej, która nie jest równa zero

algorytm

przepis postępowania prowadzący do rozwiązania ustalonego problemu, określający ciąg czynności elementarnych, które należy w tym celu wykonać

iteracja

technika programowania polegająca na powtarzaniu tych samych operacji w pętli określoną liczbę razy lub do momentu, aż zostanie spełniony zadany warunek

rekurencja

technika programowania polegająca na odwoływaniu się procedur lub funkcji do samych siebie, aż do momentu spełnienia warunku podstawowego

przypadek podstawowy

przypadek, dla którego funkcja rekurencyjna nie wywołuje samej siebie, a zamiast tego zwraca z góry określoną wartość

wykonanie elementarne w rekurencji

moment, gdy funkcja rekurencyjna zwraca konkretną wartość zamiast kolejnego wywołania rekurencyjnego

Prezentacja multimedialna

Polecenie 1

Wzór na obliczenie wartości wielomianu stopnia n ma następującą postać:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

Przeanalizuj rozwiązanie poniższego zadania.

$w = a_n$

dla $k = n - 1, n - 2, \dots, 0$ wykonuj:

$(*) \quad w = x * w + a_k$

zwróć w i zakończ

Przeanalizuj działanie schematu Hornera podczas obliczania wartości $P(2)$ dla wielomianu:

$$P(x) = 4x^6 - 3x^5 + 2x^3 - 5x^2 + 7x + 9$$

W poniższej tabeli wpisz wartości w obliczane przez algorytm w linii (*).

Wartość k	Wartość w
k = 5	
k = 4	

Wartość k	Wartość w
k = 3	
k = 2	
k = 1	
k = 0	

Podaj wynik, jaki zwróci algorytm.

Zadanie zostało opracowane przez Centralną Komisję Egzaminacyjną i znajduje się w *Maturalnym zbiorze zadań z informatyki* jako zadanie 22.3.

Polecenie 2

Zapoznaj się z prezentacją przedstawiającą propozycję rozwiązania.



1

Na egzaminie maturalnym możesz spotkać się z wieloma typami zadań, np. zadaniami z luką, zadaniami krótkiej odpowiedzi oraz zadaniami rozszerzonej odpowiedzi. Są to zadania otwarte. Na egzaminie pojawiają się również zadania zamknięte.

Źródło: Pixabay, CC0.

Materiał audio dostępny pod adresem:

<https://zpe.gov.pl/b/P162jT5Lk>

W tym zadaniu trzeba przeanalizować podany algorytm oraz podać stan zmiennej „w” po kolejnych cyklach pętli.

2

Materiał audio dostępny pod adresem:

<https://zpe.gov.pl/b/P162jT5Lk>

Początkowo zmiennej „w” przypisujemy wartość współczynnika wielomianu, przy którym znajduje się x w najwyższej potęgze, czyli a_n .

Zatem jeszcze przed wejściem do pętli wartość zmiennej „w” wynosi 4.

Materiał audio dostępny pod adresem:

3

<https://zpe.gov.pl/b/P162jT5Lk>

Dla $k = 5$ wyniki będą się prezentowały w sposób następujący:

|

4

Materiał audio dostępny pod adresem:

<https://zpe.gov.pl/b/P162jT5Lk>

Zapiszmy otrzymany wynik w tabeli:

k	Wartość „w”
$k = 5$	5
$k = 4$	
$k = 3$	
$k = 2$	
$k = 1$	
$k = 0$	

Materiał audio dostępny pod adresem:

<https://zpe.gov.pl/b/P162jT5Lk>

Dla $k = 4$ wyniki będą się prezentowały w sposób następujący:

|

Zwróć uwagę, że w wielomianie nie ma zmiennej o stopniu 4. Stąd współczynnik wielomianu wynosi 0.

5

6

Materiał audio dostępny pod adresem:

<https://zpe.gov.pl/b/P162jT5Lk>

Zapiszmy otrzymany wynik w tabeli:

k	Wartość „w”
k = 5	5
k = 4	10
k = 3	
k = 2	
k = 1	
k = 0	

7

Materiał audio dostępny pod adresem:

<https://zpe.gov.pl/b/P162jT5Lk>

Dla $k = 3$ wyniki będą się prezentowały w sposób następujący:

|

8

Materiał audio dostępny pod adresem:

<https://zpe.gov.pl/b/P162jT5Lk>

Zapiszmy otrzymany wynik w tabeli:

k	Wartość „w”
k = 5	5
k = 4	10
k = 3	22
k = 2	

$k = 1$	
$k = 0$	

9

Materiał audio dostępny pod adresem:

<https://zpe.gov.pl/b/P162jT5Lk>

Dla $k = 2$ wyniki będą się prezentowały w sposób następujący:

|

10

Materiał audio dostępny pod adresem:

<https://zpe.gov.pl/b/P162jT5Lk>

Zapiszmy otrzymany wynik w tabeli:

k	Wartość „w”
$k = 5$	5
$k = 4$	10
$k = 3$	22
$k = 2$	39
$k = 1$	
$k = 0$	

11

Materiał audio dostępny pod adresem:

<https://zpe.gov.pl/b/P162jT5Lk>

Dla $k = 1$ wyniki będą się prezentowały w sposób następujący:

|

12

Materiał audio dostępny pod adresem:

<https://zpe.gov.pl/b/P162jT5Lk>

Zapiszmy otrzymany wynik w tabeli:

k	Wartość „w”
$k = 5$	5
$k = 4$	10
$k = 3$	22
$k = 2$	39
$k = 1$	85
$k = 0$	

Materiał audio dostępny pod adresem:

<https://zpe.gov.pl/b/P162jT5Lk>

Dla $k = 0$ wyniki będą się prezentowały w sposób następujący:

|

13

14

Materiał audio dostępny pod adresem:

<https://zpe.gov.pl/b/P162jT5Lk>

Zapiszmy otrzymany wynik w tabeli:

k	Wartość „w”
k = 5	5
k = 4	10
k = 3	22
k = 2	39
k = 1	85
k = 0	179



Więcej zadań znajdziesz w zbiorze dostępnym na stronie internetowej Okręgowej Komisji Egzaminacyjnej w Warszawie.

Źródło: OKE, oke.waw.pl, tylko do użytku edukacyjnego.

Materiał audio dostępny pod adresem:

<https://zpe.gov.pl/b/P162jT5Lk>

Zatem ostatecznym wynikiem działania programu dla tego wielomianu jest „w” = 179.

Sprawdź się

Zadanie 1.4

Treść zadania

Napisz funkcję, która obliczy wartość wielomianu stopnia n dla odpowiednio przyjętej wartości x . Jeżeli liczba oznaczająca stopień wielomianu jest liczbą pierwszą to $x = 1$, w przeciwnym wypadku $x = -1$.

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0$$

Specyfikacja:

Dane:

- n – stopień wielomianu.
- $a[0 \dots n]$ – tablica zawierająca współczynniki wielomianu; współczynniki uporządkowane są tak, że pierwszy z nich należy do wyrazu najwyższego stopnia, a ostatni – najniższego stopnia

Przykładowe dane:

1	$n = 3$
2	3 -12 -1 15
3	
4	$n = 1$
5	6 5
6	
7	$n = 6$
8	2 -3 1 0 -9 -1

Wynik:

Wartości wielomianów dla danych x .

1	5
2	-1
3	5

Pokaż ćwiczenia:   



C++

Pobierz plik zawierający dane dla 50 wielomianów do obliczenia. Napisz program na swoim komputerze, który obliczy wartości wielomianów w sposób spełniający warunki zadania. Dane w pliku oddzielone są pojedynczą spacją.

Plik o rozmiarze 1.51 KB w języku polskim

Poniżej znajduje się plik tekstowy zawierający wyniki do podanych danych.

Plik o rozmiarze 219.00 B w języku polskim

Twoje zadania

1. Napisz w języku C++ program obliczający wartości wielomianów.

```
1 #include <iostream>
2 using namespace std;
3
4 void obliczWartoscWielomianu(int n, int a[]) {
5
6 }
7 int main(){
8     //nie modyfikuj funkcji main
9     obliczWartoscWielomianu(3, new int[4]{3, -12, -1, 15});
10    obliczWartoscWielomianu(1, new int[2]{6, 5});
11    obliczWartoscWielomianu(6, new int[7]{2, -3, 1, 0, -9, -1,
12    7});
13 }
```

1





Java

Pobierz poniższy plik zawierający dane dla 50 wielomianów do obliczenia. Napisz program na swoim komputerze, który obliczy wartości wielomianów w sposób spełniający warunki zadania. Dane w pliku oddzielone są pojedynczą spacją.

Plik o rozmiarze 1.51 KB w języku polskim

Poniżej znajduje się plik tekstowy zawierający wyniki do podanych danych.

Plik o rozmiarze 219.00 B w języku polskim

Twoje zadania

1. Napisz w języku Java program obliczający wartości wielomianów.

```
1 public class Main
2 {
3     public static void obliczWartoscWielomianu(int n, int[] a)
4     {
5     }
6     public static void main(String[] args) {
7         //nie modyfikuj funkcji main
8         obliczWartoscWielomianu(3, new int[]{3, -12, -1, 15});
9         obliczWartoscWielomianu(1, new int[]{6, 5});
10        obliczWartoscWielomianu(6, new int[]{2, -3, 1, 0, -9,
-1, 7});
11    }
12 }
```

1





Python

Pobierz plik zawierający dane dla 50 wielomianów do obliczenia. Napisz program na swoim komputerze, który obliczy wartości wielomianów w sposób spełniający warunki zadania. Dane w pliku oddzielone są pojedynczą spacją.

Plik o rozmiarze 1.51 KB w języku polskim

Poniżej znajduje się plik tekstowy zawierający wyniki do podanych danych.

Plik o rozmiarze 219.00 B w języku polskim

Twoje zadania

1. Napisz w języku Python program obliczający wartości wielomianów.

```
1 def oblicz_wartosc_wielomianu(n, a):
2     pass
3
4
5
6
7 #nie modyfikuj kodu poniżej
8 oblicz_wartosc_wielomianu(3, [3, -12, -1, 15])
9 oblicz_wartosc_wielomianu(1, [6, 5])
10 oblicz_wartosc_wielomianu(6, [2, -3, 1, 0, -9, -1, 7])
```

1



Dla nauczyciela

Autor: Maurycy Gast

Przedmiot: Informatyka

Temat: Schemat Hornera – zadania maturalne

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

Cele kształcenia – wymagania ogólne

I. Rozumienie, analizowanie i rozwiązywanie problemów na bazie logicznego i abstrakcyjnego myślenia, myślenia algorytmicznego i sposobów reprezentowania informacji.

II. Programowanie i rozwiązywanie problemów z wykorzystaniem komputera oraz innych urządzeń cyfrowych: układanie i programowanie algorytmów, organizowanie, wyszukiwanie i udostępnianie informacji, posługiwanie się aplikacjami komputerowymi.

Treści nauczania – wymagania szczegółowe

II. Programowanie i rozwiązywanie problemów z wykorzystaniem komputera i innych urządzeń cyfrowych.

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

3) sprawnie posługuje się zintegrowanym środowiskiem programistycznym przy pisaniu, uruchamianiu i testowaniu programów;

I + II. Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

1) zapisuje za pomocą listy kroków, schematu blokowego lub pseudokodu, i implementuje w wybranym języku programowania, algorytmy poznane na wcześniejszych etapach oraz algorytmy:

h) obliczania wartości wielomianu za pomocą schematu Hornera,

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii.

Cele operacyjne (językiem ucznia):

- Przeanalizujesz zadania wykorzystujące schemat Hornera.
- Rozwiążesz samodzielnie zadania autorstwa Centralnej Komisji Egzaminacyjnej.
- Przeanalizujesz złożoność czasową algorytmu obliczającego wartość wielomianu za pomocą schematu Hornera.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja;
- rozmowa nauczająca z wykorzystaniem multimediu i ćwiczeń interaktywnych;
- ćwiczenia praktyczne.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda;
- oprogramowanie dla języka C++, w tym kompilator GCC/G++ 4.5 (lub nowszej wersji) i Code::Blocks 16.01 (lub nowszej wersji), Orwell Dev-C++ 5.11 (lub nowszej wersji) lub Microsoft Visual Studio;
- oprogramowanie dla języka Java SE 8 (lub nowszej wersji), w tym Eclipse 4.4 (lub nowszej wersji);
- oprogramowanie dla języka Python 3 (lub nowszej wersji), w tym PyCharm lub IDLE.

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

1. **Przygotowanie do zajęć.** Nauczyciel loguje się na platformie i udostępnia e-materiał: „Schemat Hornera – zadania maturalne”. Nauczyciel prosi uczniów o zapoznanie się z treściami w sekcji „Przeczytaj” dotyczącymi programowania.

Faza wstępna:

1. Wyświetlenie przez nauczyciela tematu i celów zajęć, przejście do wspólnego ustalenia kryteriów sukcesu.
2. **Rozpoznanie wiedzy uczniów** Nauczyciel prosi wybranego ucznia lub uczniów o przedstawienie sytuacji problemowej związanej z tematem lekcji oraz w odniesieniu do poznanych języków programowania.

Faza realizacyjna:

1. **Praca z tekstem.** Uczniowie przystępują do cichego czytania tekstu e-materiału. Indywidualnie zapoznają się z treścią w sekcji „Przeczytaj”.
2. **Praca z multimediami.** Nauczyciel wyświetla zawartość sekcji „Prezentacja multimedialna”. Uczniowie wspólnie zapoznają się z rozwiązaniem przedstawionego przykładu, który został przygotowany przez Centralną Komisję Egzaminacyjną.
3. **Ćwiczenie umiejętności.** Uczniowie wykonują ćwiczenia z sekcji „Sprawdź się” w jednym z dostępnych języków programowania.

Faza podsumowująca:

1. Wybrany uczeń podsumowuje zajęcia, zwracając uwagę na nabyte umiejętności, omawia ewentualne problemy podczas rozwiązania ćwiczeń.

Praca domowa:

Uczniowie rozwiązują zmodyfikowane zadanie nr 3, które pojawiło się na maturze w styczniu 2006 roku na poziomie rozszerzonym: Opisz schemat Hornera, a następnie zapisz w wybranym przez siebie języku programowania algorytm przeliczania liczby m -cyfrowej zapisanej w systemie o podstawie n takiej, że $n \in \mathbb{N} \wedge n \in [2, 9]$, na jej wartość w systemie dziesiętnym. W algorytmie wykorzystaj schemat Hornera. Opisz znaczenie użytych zmiennych.

Specyfikacja problemu:

Dane:

- n – podstawa systemu liczbowego, w którym podana jest liczba
- $C[0..9]$ – tablica zawierająca 10 liczb odpowiadających kolejnym cyfrom liczby zapisanej w systemie o podstawie n . Cyfry podane są od najbardziej do najmniej znaczącej, tzn. że $C[0]$ jest liczbą odpowiadającą najbardziej znaczącej cyfrze

Wynik:

- w – wartość liczby przeliczona na system dziesiętny

Materiały pomocnicze:

- Oficjalna dokumentacja techniczna dla kompilatora GCC/G++ 4.5 (lub nowszej wersji).
- Oficjalna dokumentacja techniczna dla języka Java SE 8 (lub nowszej wersji).
- Oficjalna dokumentacja techniczna dla oprogramowania PyCharm lub IDLE.
- Oficjalna dokumentacja techniczna dla języka C++.
- Oficjalna dokumentacja techniczna dla oprogramowania Eclipse 4.4 (lub nowszej wersji).
- Oficjalna dokumentacja techniczna dla języka Python 3 (lub nowszej wersji).
- Oficjalna dokumentacja techniczna dla oprogramowania Code::Blocks 16.01 (lub nowszej wersji), Orwell Dev-C++ 5.11 (lub nowszej wersji) lub Microsoft Visual Studio.

Wskazówki metodyczne:

- Treści w sekcji „Przeczytaj” można wykorzystać jako podsumowanie i utrwalenie wiedzy uczniów.