# Pole powierzchni przekroju sześcianu

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Animacja 3D
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela

Źródło: dostępny w internecie: pxfuel.com, domena publiczna.

Wiesz już czym jest przekrój bryły, w szczególności wiesz jaką figurą może być przekrój sześcianu. Ponieważ przekrój sześcianu jest wielokątem, możemy policzyć jego pole – i tym właśnie będziemy się dziś zajmować.

> **Twoje cele**
>
> - Nazwiesz przekrój sześcianu i dopasujesz do niego odpowiedni wzór na pole.
> - Obliczysz pole przekroju sześcianu.
> - Obliczysz długości odcinków, pole powierzchni i objętość sześcianu wykorzystując pole powierzchni jego przekroju.

# Przeczytaj

Potrafisz już rozpoznać i scharakteryzować przekroje w sześcianie, a także obliczyć długości jego niektórych odcinków. W tym materiale omówimy obliczanie pól przekrojów w sześcianie.

## Przekrój w kształcie trójkąta

Wiesz już, że przekrój sześcianu ma co najmniej trzy boki. Trójkątny przekrój sześcianu może być dowolnym (z dokładnością do podobieństwa) trójkątem ostrokątnym, w szczególności może być trójkątem równoramiennym lub równobocznym.

Przypomnijmy wzory na pola trójkątów:

- $P = \frac{ah}{2}$,
- $P = \frac{ab \sin \alpha}{2}$,
- $P = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$,

gdzie:
$a$, $b$, $c$ są bokami tego trójkąta,
$\alpha$ jest kątem pomiędzy bokami $a$ i $b$,
$h$ jest wysokością poprowadzoną na bok $a$,
$p$ jest połową obwodu trójkąta.

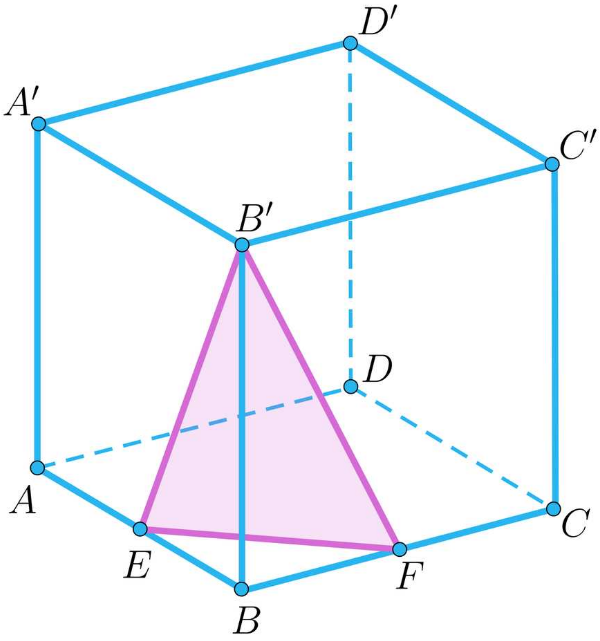
Dla trójkąta równobocznego o boku $a$ mamy $P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

**Przykład 1**

Dany jest sześcian $ABCDA'B'C'D'$ o krawędzi długości 8. Płaszczyzna przekroju przechodzi przez punkty $E$ i $F$, które są środkami krawędzi $AB$ i $BC$ odpowiednio oraz przez wierzchołek $B'$. Obliczymy pole tego przekroju.

**Rozwiązanie**

Zróbmy rysunek pomocniczy.



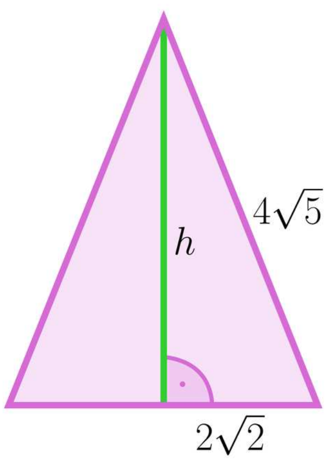

Przekrój ten jest trójkątem. Co więcej, ponieważ $B^{'}E$ i $B^{'}F$ są przeciwprostokątnymi trójkątów $EBB^{'}$ i $BFB^{'}$ o przyprostokątnych 4 i 8, to $\left|B^{'}E\right| = \left|B^{'}F\right|$. A zatem trójkąt $EB^{'}F$ jest równoramienny.

Obliczmy długość ramion tego trójkąta z twierdzenia Pitagorasa (trójkąt $EBB^{'}$):
$4^2 + 8^2 = \left|B^{'}E\right|^2$.

Czyli $\left|B^{'}E\right| = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$.

Podstawa trójkąta $EB^{'}F$ jest przeciwprostokątną równoramiennego trójkąta prostokątnego $EBF$, którego przyprostokątne mają długość 4. A zatem $|EF| = 4\sqrt{2}$.

Narysujmy przekrój z zaznaczonymi odcinkami.



Obliczymy $h$ z twierdzenia Pitagorasa: $h^2 + \left(2\sqrt{2}\right)^2 = \left(4\sqrt{5}\right)^2$. A stąd $h^2 = 80 - 8 = 72$.

Czyli $h = 6\sqrt{2}$.

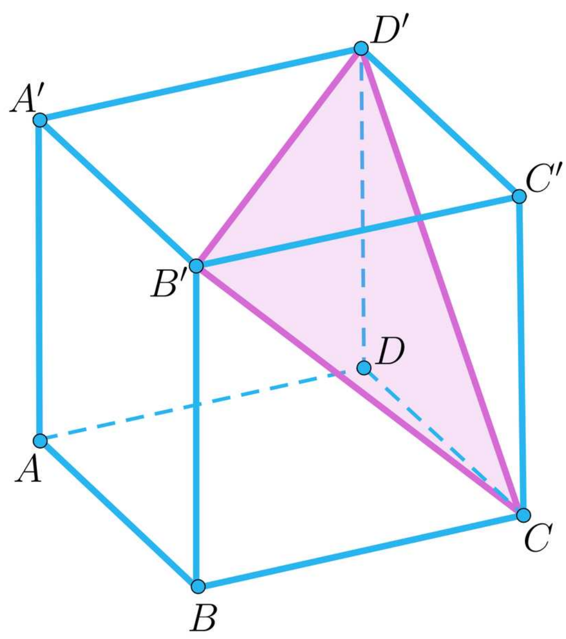
Teraz możemy już policzyć szukane pole przekroju: $P = \frac{4\sqrt{2} \cdot 6\sqrt{2}}{2} = 24 \text{ j}^2$.

**Przykład 2**

Pole przekroju sześcianu $ABCDA'B'C'D'$ przechodzącego przez wierzchołki $B'CD'$ wynosi $9\sqrt{3}\,\text{cm}^2$. Obliczymy objętość tego sześcianu.

**Rozwiązanie**

Narysujmy ten przekrój:




Przekrój ten jest trójkątem równobocznym. Obliczymy długość boku tego przekroju korzystając ze wzoru na pole trójkąta równobocznego: $\frac{p^2\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}$. Stąd $p = 6$. Ze wzoru na długość przekątnej ściany bocznej mamy $a\sqrt{2} = 6$. Czyli $a = 3\sqrt{2}$.

Objętość tego sześcianu wynosi więc $V = \left(3\sqrt{2}\right)^3 = 54\sqrt{2}$.

## Przekrój w kształcie czworokąta

Przypomnijmy, że każdy przekrój czworokątny sześcianu jest trapezem. W szczególnych przypadkach jest to równoległobok, romb, prostokąt lub kwadrat.

Przy obliczaniu pól czworokątów korzystamy ze wzorów:

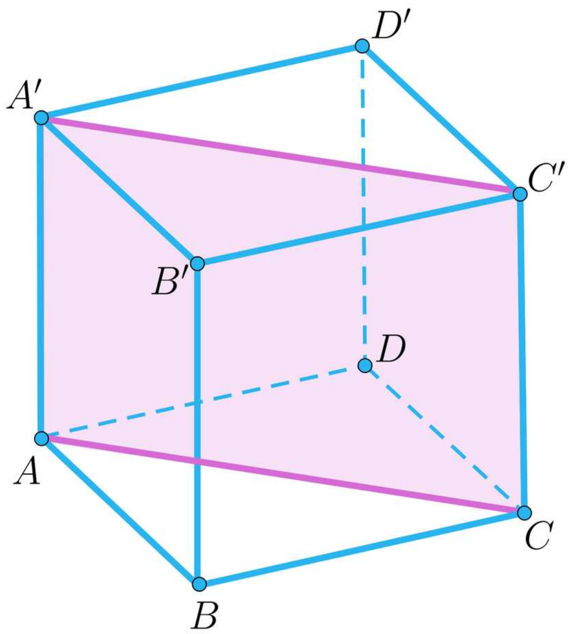
- **Trapez:** $P = \frac{(a+b)h}{2}$ są podstawami, a $h$ wysokością tego trapezu.
- **Równoległobok:** $P = ah$ lub $P = ab \sin \alpha$, gdzie $a$, $b$ są różnymi bokami tego równoległoboku, $h$ wysokością opuszczoną na bok $a$, a $\alpha$ kątem pomiędzy bokami równoległoboku.
- **Romb:** $P = ah$ lub $P = \frac{ef}{2}$, gdzie $a$ jest długością boku, $h$ wysokością rombu, $e$, $f$ przekątnymi tego rombu.
- **Prostokąt:** $P = ab$, gdzie $a$, $b$ są bokami prostokąta.
- **Kwadrat:** $P = a^2$, gdzie $a$ jest długością boku.

**Przykład 3**

Pole przekroju przechodzącego przez dwie krawędzie i dwie przekątne równoległych ścian sześcianu wynosi $8\sqrt{2}$. Obliczymy długość krawędzi tego sześcianu.

**Rozwiązanie**

Narysujmy ten przekrój.



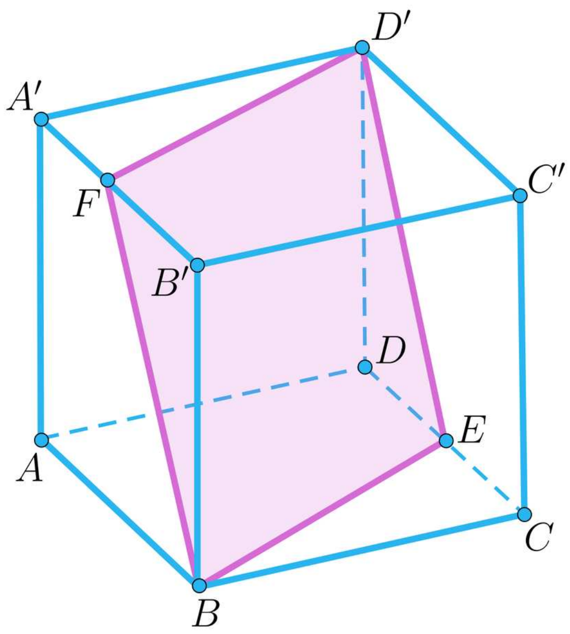

Jest to prostokąt, którego bokami są krawędzie i przekątne ścian. Pole tego prostokąta wyraża się więc wzorem $P = a \cdot a\sqrt{2} = a^2\sqrt{2}$. Czyli $a^2\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$. Wtedy $a^2 = 8$, a stąd $a = 2\sqrt{2}$.

**Przykład 4**

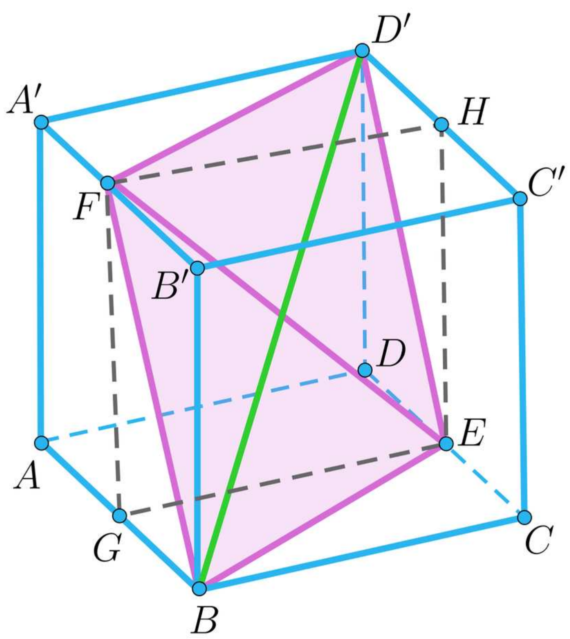
Dany jest sześcian $ABCDA^{'}B^{'}C^{'}D^{'}$ o krawędzi długości 6. Punkty $E$ i $F$ są środkami odcinków $CD$ i $A^{'}B^{'}$ odpowiednio. Określimy, jaką figurą jest przekrój $BED^{'}F$ i ile wynosi jego pole.

**Rozwiązanie**

Zróbmy rysunek pomocniczy.




Zauważmy, że przekrój ten jest rombem. Narysujmy jego przekątne.



Zauważmy, że przekątna $BD^{'}$ jest przekątną sześcianu, a $FE$ jest przekątną kwadratu $EHFG$, który jest przystający do ścian sześcianu. Czyli $\left|BD^{'}\right| = 6\sqrt{3}$ oraz $|EF| = 6\sqrt{2}$. Obliczmy zatem pole tego przekroju: $P = \frac{6\sqrt{3} \cdot 6\sqrt{2}}{2} = 18\sqrt{6}$ j$^2$.

## Przekrój w kształcie pięciokąta

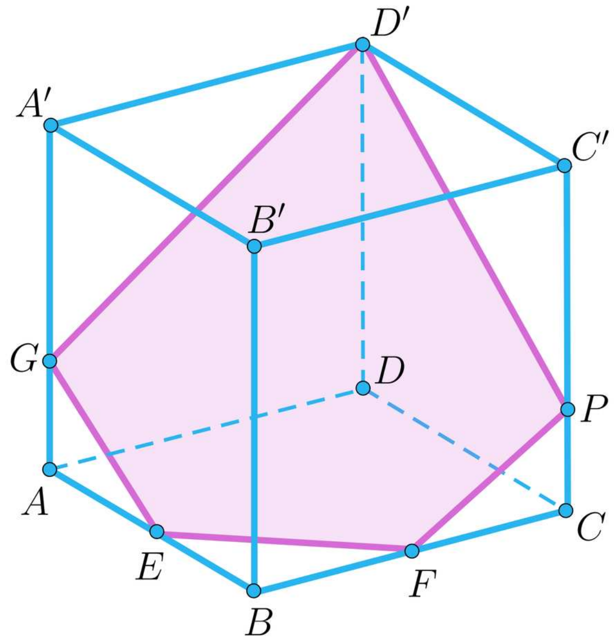
Przypomnijmy, że przekrój sześcianu może być pięciokątem, jednak nigdy nie będzie to pięciokąt foremny.

**Przykład 5**

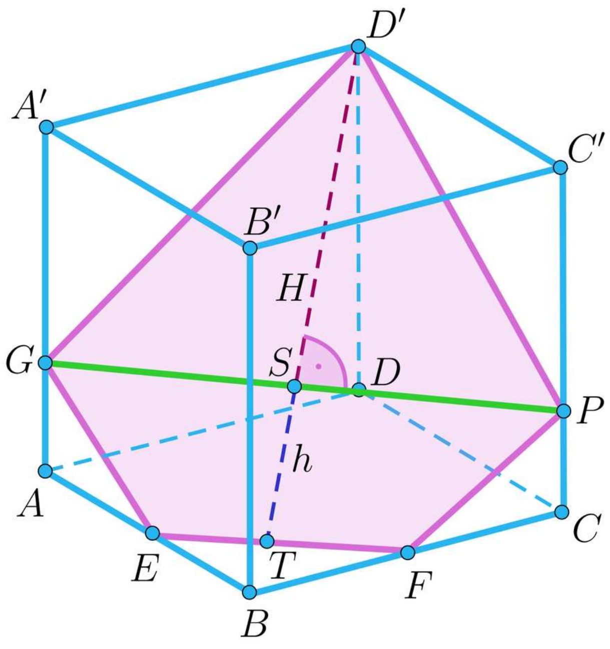
Dany jest sześcian $ABCDA^{'}B^{'}C^{'}D^{'}$ o krawędzi 12. Punkty $E$ i $F$ są środkami krawędzi $AB$ i $BC$. Obliczymy pole przekroju przechodzącego przez punkty $E$, $F$ i $D^{'}$.

**Rozwiązanie**

Zauważmy, że przekrój ten będzie pięciokątem.



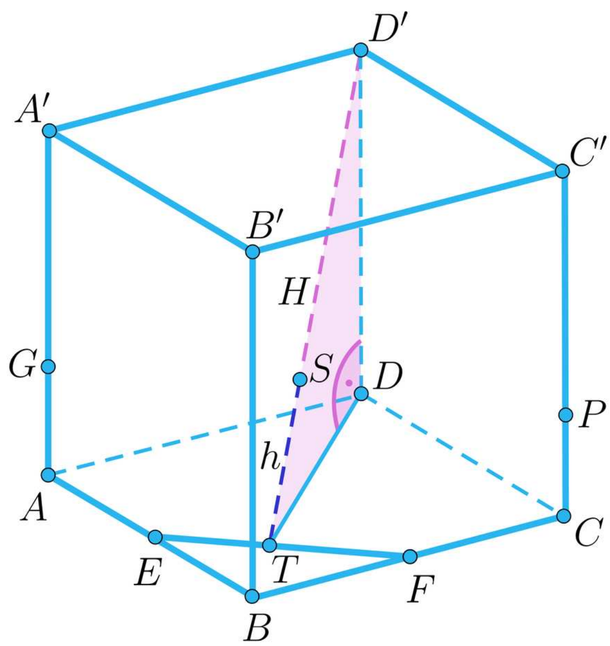

Podzielimy ten pięciokąt na trapez $EFPG$ oraz trójkąt $GPD^{'}$.




Zauważmy, że $|EF| = 6\sqrt{2}$.

Obliczymy najpierw długość odcinka $TD^{'}$, którego długość jest równa sumie długości wysokości trójkąta $GPD^{'}$ i trapezu $EFPG$.

Skorzystamy z trójkąta prostokątnego $TDD^{'}$.



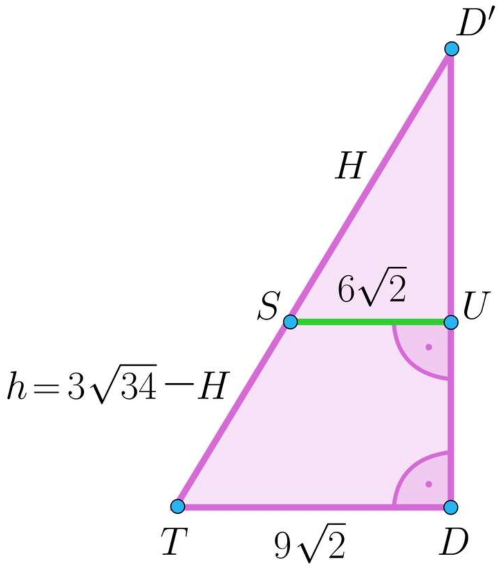

Najpierw zauważmy, że $|TD| = \frac{3}{4}|BD| = \frac{3}{4} \cdot 12\sqrt{2} = 9\sqrt{2}$. (wynika to z podobieństwa trójkątów $BEF$ i $BAC$ – ponieważ boki trójkąta $BEF$ są o połowę krótsze od boków trójkąta $BAC$, to odcinek $BT$, który jest wysokością trójkąta $BEF$ stanowi połowę połowy przekątnej kwadratu, czyli $|BT| = \frac{1}{4}|BD|$.

Obliczmy teraz długość odcinka $TD^{'}$ z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta $TDD^{'}$:

$$\left(9\sqrt{2}\right)^2 + 12^2 = \left|TD^{'}\right|^2$$

Czyli $\left|TD^{'}\right| = 3\sqrt{34}$.

W trójkącie $TDD^{'}$ poprowadźmy prostą równoległą do $TD$ przez punkt $S$




Z podobieństwa trójkątów $TDD^{'}$ i $SUD^{'}$ (cecha $kkk$) mamy więc $\frac{H}{3\sqrt{34}} = \frac{6\sqrt{2}}{9\sqrt{2}}$.

Czyli $\frac{H}{3\sqrt{34}} = \frac{2}{3}$. A stąd $H = 2\sqrt{34}$ i $h = \sqrt{34}$.

Obliczymy pole trapezu $EFPG$:

$$P_1 = \frac{\left(6\sqrt{2}+12\sqrt{2}\right)\cdot\sqrt{34}}{2} = 9\sqrt{68} = 18\sqrt{17}$$

Oraz pole trójkąta $GPD^{'}$:

$$P_2 = \frac{12\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{34}}{2} = 12\sqrt{68} = 24\sqrt{17}$$

Ostatecznie pole przekroju wynosi $P = 18\sqrt{17} + 24\sqrt{17} = 42\sqrt{17}$ j$^2$.

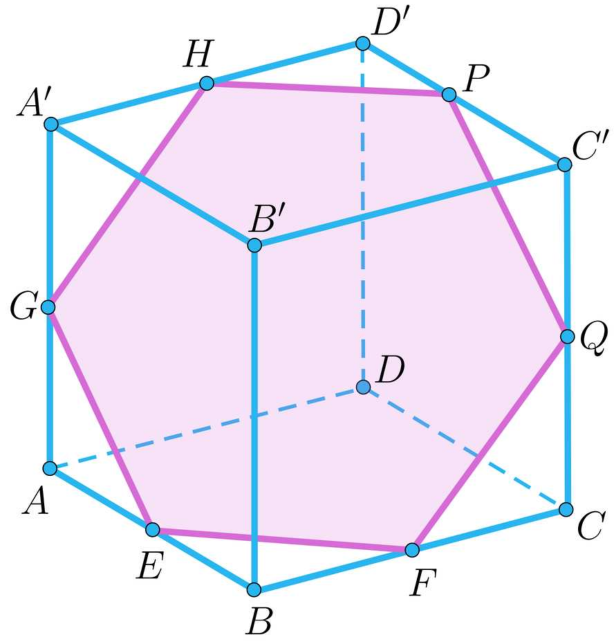
## Przekrój w kształcie sześciokąta

**Przykład 6**

Obliczymy pole całkowite sześcianu $ABCDA^{'}B^{'}C^{'}D^{'}$ którego przekrój przechodzący przez środki krawędzi $AA^{'}$, $AB$, $BC$ ma pole równe $96\sqrt{3}$.

**Rozwiązanie**

Zauważmy, że przekrój ten będzie sześciokątem foremnym.




Korzystając ze wzoru na pole sześciokąta foremnego mamy $6 \cdot \frac{|FQ|^2\sqrt{3}}{4} = 96\sqrt{3}$. Czyli $|FQ|^2 = 64$, a stąd $|FQ| = 8$.

Odcinek $FQ$ jest przeciwprostokątną trójkąta prostokątnego równoramiennego o przyprostokątnej długości $\frac{a}{2}$, gdzie $a$ jest długością krawędzi sześcianu. Czyli $\frac{a}{2}\sqrt{2} = 8$, a stąd $a\sqrt{2} = 16$ i ostatecznie $a = 8\sqrt{2}$. Czyli pole powierzchni tego sześcianu wynosi $P_c = 6a^2 = 768$ j$^2$.

# Słownik

**przekrój sześcianu**

figura, która jest częścią wspólną sześcianu i pewnej płaszczyzny, która go przecina

**przekątna sześcianu**

odcinek, który łączy wierzchołki dolnej i górnej podstawy sześcianu nie leżące na jednej ścianie tego sześcianu

**pole powierzchni sześcianu**

suma pól wszystkich ścian tego sześcianu

# Animacja 3D

**Polecenie 1**

Zapoznaj się z animacją 3D, a następnie wykonaj Polecenie 2.

Trwa wczytywanie danych...

Film dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DE8WoBhn4

Film nawiązujący do treści lekcji dotyczącej pola powierzchni przekroju sześcianu.

---

**Polecenie 2**

Wyprowadź wzór na pole i obwód przekroju, powstałego jak w animacji, sześcianu o krawędzi $a$.

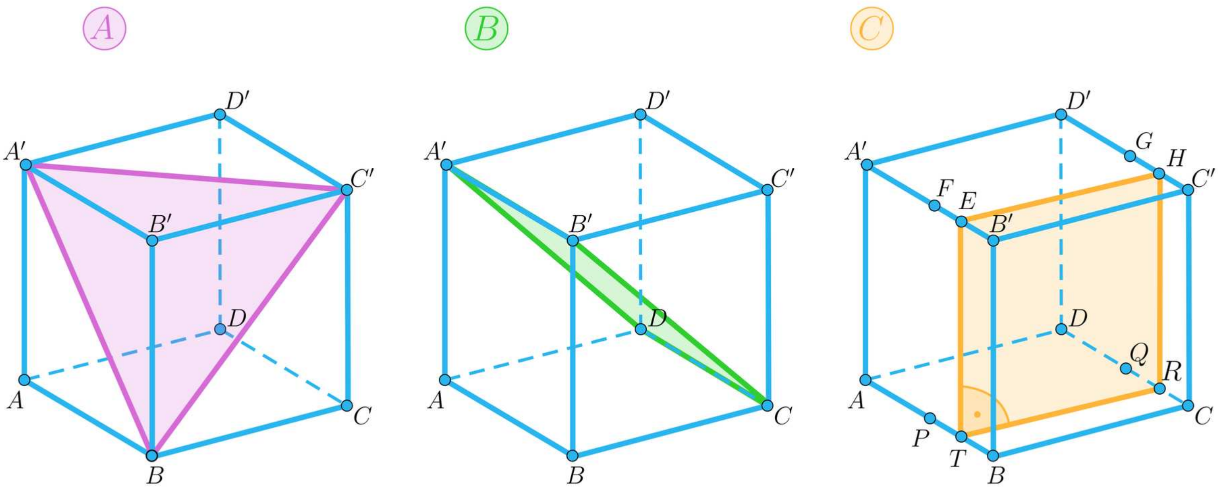
**Polecenie 3**

# Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

### Ćwiczenie 1

Każdy z poniższych sześcianów ma tę samą długość krawędzi. Uszereguj przekroje - zacznij od tego, który ma największe pole.




### Ćwiczenie 2

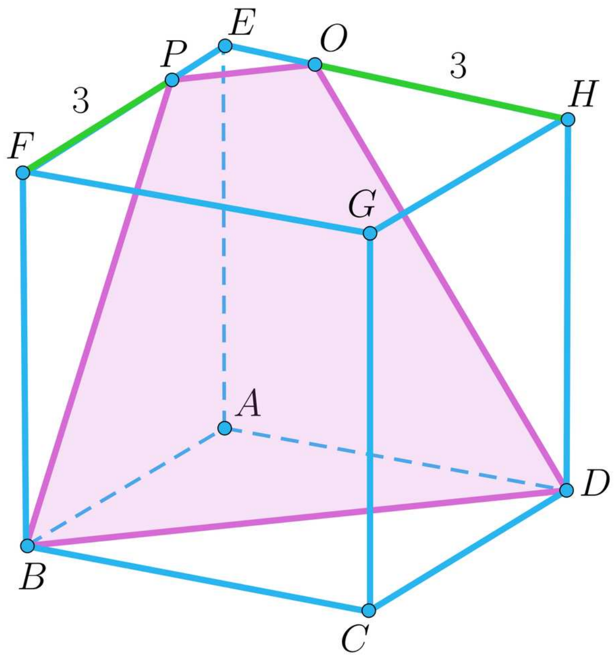
### Ćwiczenie 3

### Ćwiczenie 4

### Ćwiczenie 5

**Ćwiczenie 6**

Sześcian o krawędzi $4$ przecięto jak na rysunku. Oblicz pole powstałego przekroju.




**Ćwiczenie 7**

Punkty $P$, $T$, $S$ są punktami, które leżą na krawędziach $AB$, $BC$ i $BB'$ sześcianu $ABCDA'B'C'D'$. Wiemy, że $P$ jest środkiem krawędzi $AB$ oraz że $|AP| = 8$, $|BT| = 15$, $|B\prime S| = 10$. Oblicz pole przekroju przechodzącego przez punkty $P$, $T$, $S$.

**Ćwiczenie 8**

Przekrój sześcianu $ABCDA'B'C'D'$ o krawędzi równej $4$ przechodzi przez przekątną $AC$ podstawy i punkt $F$ znajdujący się na krawędzi $DD'$. Uzasadnij, że jeśli pole tego przekroju wynosi $4\sqrt{6}$, to punkt $F$ jest środkiem odcinka $DD'$.

# Dla nauczyciela

**Autor:** Magdalena Wojciechowska-Rysiawa

**Przedmiot:** Matematyka

**Temat: Pola przekrojów sześcianu**

**Grupa docelowa:** III etap edukacyjny, liceum lub technikum, zakres rozszerzony

**Podstawa programowa:**

X Stereometria

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

2) wyznacza przekroje sześcianu i ostrosłupów prawidłowych oraz oblicza ich pola, także z wykorzystaniem trygonometrii

**Kształtowane kompetencje kluczowe:**

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji,
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe,
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

**Cele operacyjne:**

Uczeń:

- rozpoznaje przekroje w sześcianie i dopasowuje odpowiedni wzór na pole,
- oblicza pola przekrojów w sześcianie,
- oblicza długości odcinków, pole powierzchni i objętość sześcianu znając pole pewnego przekroju.

**Strategie nauczania:**

- konstruktywizm.

**Metody pracy:**

- burza mózgów,
- mapa myśli,

- dyskusja,
- ćwiczeniowa.

**Formy pracy:**

- praca całą klasą,
- praca w parach,
- praca samodzielna.

**Środki dydaktyczne:**

- komputer z dostępem do Internetu, głośników i tablicy interaktywnej lub projektora,
- materiały zawarte w e-podręczniku,
- przeźroczyste modele sześcianów z zaznaczonymi odcinkami, przekrojami.

**Przebieg lekcji:**

**Faza wstępna:**

1. Nauczyciel i uczniowie metodą burzy mózgów przypominają jaki kształt może mieć przekrój sześcianu.
2. Uczniowie wykonują w parach na kartkach mapę myśli, na której umieszczają w szczególności najbardziej charakterystyczne przekroje sześcianu wraz ze wzorami na pola, które trzeba zastosować.
3. Nauczyciel formułuje kryteria sukcesu.

**Faza realizacyjna:**

1. Nauczyciel prezentuje wybrane przykłady z sekcji Przeczytaj i prezentuje uczniom animację 3D.
2. Uczniowie w tych samych parach wykonują ćwiczenia zamknięte z sekcji Sprawdź się.
3. Nauczyciel wraz z uczniami dyskutują nad otrzymanymi wynikami, prezentuje poprawne odpowiedzi.
4. Wybrani uczniowie wykonują na tablicy zadania otwarte z sekcji Sprawdź się.

**Faza podsumowująca:**

1. Nauczyciel wraz z uczniami podsumowują jakimi figurami może być przekrój sześcianu i jak oblicza się ich pole.
2. Nauczyciel zwraca uwagę na szczególne przekroje w sześcianie np. sześciokąt foremny, trójkąt równoboczny, którego bokami są przekątne ścian, prostokąt, którego bokami są krawędzie sześcianu i przekątne ścian i przypomina wzory na pola.
3. Uczniowie wskazują co w lekcji było dla nich najtrudniejsze.

**Praca domowa:**

- Wykonać polecenia z sekcji Animacja 3D.

**Materiały pomocnicze:**

- Własności sześcianów i prostopadłościanów

**Wskazówki metodyczne:**

Animacja 3D może zostać wykorzystana w lekcji o własnościach sześcianu.