



Zależność między polem trójkąta a promieniem okręgu opisanego na trójkącie

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Galeria zdjęć interaktywnych](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Zależność między polem trójkąta a promieniem okręgu opisanego na trójkącie

Źródło: J F Martin, dostępny w internecie: www.unsplash.com.

Z pewnością na każdym trójkącie można opisać okrąg i ten okrąg jest wyznaczony jednoznacznie. W każdy okrąg możemy wpisać trójkąt i nietrudno zauważyć, że dla danego okręgu takich trójkątów jest nieskończenie wiele, a zależności między długościami boków, miarami odpowiednich kątów i promieniem okręgu opisanego są opisane między innymi przez twierdzenie sinusów. Czas postawić sobie pytanie: czy znajomość długości promienia okręgu opisanego na danym trójkącie pozwala nam obliczyć pole tego trójkąta?

Twoje cele

- Zbadasz zależności między polem trójkąta i promieniem okręgu opisanego na tym trójkącie.
- Wyprowadzisz wzory pozwalające obliczyć pole trójkąta, gdy dany jest promień okręgu opisanego.
- Zastosujesz poznane wzory w sytuacjach typowych.
- Zastosujesz poznane wzory do wyznaczenia zależności miarowych w trójkącie w nietypowych sytuacjach problemowych.

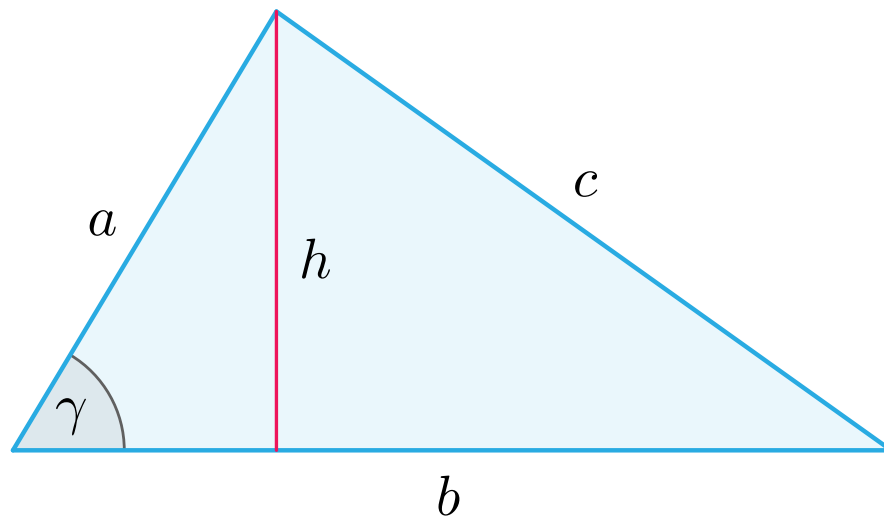
Przeczytaj

O polu trójkąta inaczej

Przez pierwsze lata edukacji na pole trójkąta patrzyliśmy tylko przez pryzmat podstawy i wysokości opuszczonej na tę podstawę. Wprowadzenie pojęcia funkcji trygonometrycznej pozwoliło „odkryć” wzór, w którym pole jest wyrażone przez długości dwóch boków trójkąta i sinus kąta leżącego między tymi bokami. Czas na „coś” nowego.

Przykład 1

Rozważmy trójkąt, którego boki mają długości: $a = 10$, $b = 16$, $c = 14$, a wysokość poprowadzona na bok b ma długość $5\sqrt{3}$. Wtedy oczywiście $P_{\triangle} = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 5\sqrt{3} = 40\sqrt{3}$. Przypuśćmy jednak, że mamy dane długości boków, a zamiast jednej z wysokości, znamy promień [okręgu opisanego na tym trójkącie](#), który jest równy $\frac{14\sqrt{3}}{3}$. Jak zatem policzyć pole? Popatrzmy na rysunek.



Wiemy oczywiście, że $\sin \gamma = \frac{h}{a}$, czyli $h = a \cdot \sin \gamma$.

Ale z twierdzenia sinusów wynika, że $\frac{c}{\sin \gamma} = 2R$, stąd $\sin \gamma = \frac{c}{2R} = \frac{14}{2 \cdot \frac{14\sqrt{3}}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Wysokość jest więc równa $h = 10 \cdot \sin \gamma = 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$,

a pole: $P_{\triangle} = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 5\sqrt{3} = 40\sqrt{3}$.

Analizując podane niżej twierdzenia, dowiesz się, że pewne zależności są prawdziwe dla dowolnego trójkąta, a tym samym poznasz kolejne wzory pozwalające obliczać pole trójkąta.

Jak znajomość promienia okręgu opisanego na danym trójkącie może pomóc w obliczeniu jego pola?

Twierdzenie: pole trójkąta wpisanego w okrąg o danym promieniu, jako funkcja długości boków

Pole P_{Δ} trójkąta o bokach długości a , b , c , wpisanego w okrąg o promieniu R , wyraża się wzorem $P_{\Delta} = \frac{abc}{4R}$.

Dowód

Wiemy, że $P_{\Delta} = \frac{1}{2}ab \cdot \sin \gamma$, gdzie γ jest kątem leżącym między bokami a i b , naprzeciw boku c . Ale z twierdzenia sinusów wynika, że $\sin \gamma = \frac{c}{2R}$, zatem $P_{\Delta} = \frac{1}{2}ab \cdot \sin \gamma = \frac{1}{2}ab \cdot \frac{c}{2R} = \frac{abc}{4R}$.

Co należało udowodnić.

W praktyce szkolnej rzadko będziemy korzystali z tego wzoru w celu obliczenia pola trójkąta. Wiemy, że trzy boki jednoznacznie wyznaczają trójkąt, a tym samym jego pole. Tak więc nie ma potrzeby sięgać po promień okręgu opisanego na danym trójkącie, a samo pole można obliczyć korzystając chociażby ze wzoru Herona. Wzór ten częściej jest wykorzystywany w sytuacji, gdy znamy pole i boki trójkąta, a szukamy promienia okręgu opisanego. Popatrzmy na poniższy prosty przykład.

Przykład 2

Oblicz pole koła opisanego na trójkącie równoramiennym, którego podstawa ma długość 10, a ramiona 13.

Korzystając z twierdzenia Pitagorasa wyznaczamy wysokość tego trójkąta poprowadzoną na podstawę: $h = \sqrt{13^2 - \left(\frac{1}{2} \cdot 10\right)^2} = \sqrt{169 - 25} = 12$. Zatem pole trójkąta jest równe $P_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 12 = 60$. Korzystając ze wzoru $P_{\Delta} = \frac{abc}{4R}$, możemy zapisać, że $R = \frac{abc}{4P_{\Delta}} = \frac{10 \cdot 13 \cdot 13}{4 \cdot 60} = \frac{169}{24}$. Zatem pole koła opisanego na tym trójkącie jest równe $P = \pi \cdot \left(\frac{169}{24}\right)^2$.

Twierdzenie: pole trójkąta wpisanego w okrąg o danym promieniu, jako funkcja miar kątów

W trójkącie kąty mają miary α , β , γ , a promień okręgu opisanego na tym trójkącie ma długość R . Pole trójkąta wyraża się wtedy wzorem $P_{\Delta} = 2R^2 \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma$.

Dowód

Wiemy już, że $P_{\Delta} = \frac{abc}{4R}$. Korzystając z twierdzenia sinusów możemy zapisać, że $a = 2R \cdot \sin \alpha$, $b = 2R \cdot \sin \beta$ oraz $c = 2R \cdot \sin \gamma$. Zatem

$$P_{\Delta} = \frac{abc}{4R} = \frac{2R \cdot \sin \alpha \cdot 2R \cdot \sin \beta \cdot 2R \cdot \sin \gamma}{4R}. \text{ Stąd teza.}$$

Oczywiście miary kątów nie stanowią cechy przystawania trójkątów, a jedynie pozwalają badać podobieństwo figur. Jeśli znamy jednak promień okręgu opisanego na trójkącie o danych kątach, to „skalując w wyobraźni” nasz trójkąt zauważymy, że istnieje tylko jeden, którego kąty będą miały określoną miarę i który będzie wpisany w dany okrąg. Tym samym jego pole będzie możliwe do obliczenia. Popatrzmy na przykład.

Przykład 3

W okrąg o promieniu 12 wpisano trójkąt, którego dwa kąty mają miary odpowiednio równe 60° oraz 75° . Oblicz pole tego trójkąta.

Ponieważ trzeci z kątów trójkąta ma miarę 45° , więc możemy zapisać, że

$P_{\Delta} = 2R^2 \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma = 2 \cdot 144 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sin 75^\circ$. Tym samym pole trójkąta zostało wyznaczone. Można skorzystać z wartości przybliżonej sinusa dla kąta o mierze 75° lub odczytać w dostępnych źródłach (obliczyć, korzystając ze wzoru na sinus sumy argumentów), że $\sin 75^\circ = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$. Wtedy $P_{\Delta} = 36 \cdot (3 + \sqrt{3})$.

Słownik

okrąg opisany na trójkącie

okrąg, do którego należą trzy wierzchołki danego trójkąta jest okręgiem opisanym na tym trójkącie; mówimy wtedy, że trójkąt jest wpisany w okrąg

Galeria zdjęć interaktywnych

Polecenie 1

Przeanalizuj wyprowadzenia wzorów opisane w galerii zdjęć interaktywnych. Zauważ, że wzór $P_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin \alpha$ został wyprowadzony dwukrotnie, przy wykorzystaniu różnych wysokości poprowadzonych w danym trójkącie. Wiedząc, że pole trójkąta jest równe połowie iloczynu długości boku i wysokości poprowadzonej na ten bok, uzasadnij, że prawdziwy jest także wzór $P_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin \gamma$.

Polecenie 2

Korzystając ze wzoru $P_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin \alpha$ i twierdzenia sinusów wykaż, że prawdziwy jest także wzór $P_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin \gamma$.

Polecenie 3

Rozstrzygnij, czy w dowolnym trójkącie prawdziwy jest wzór $P_{\Delta} = c \cdot R \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta$.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Zaznacz prawidłową odpowiedź. Pole trójkąta jest dwa razy większe od iloczynu długości wszystkich jego boków. Wtedy promień okręgu opisanego na tym trójkącie jest równy

☐ $\frac{1}{2}$.

☐ $\frac{1}{8}$.

☐ 8.

☐ 2.

Ćwiczenie 2



Zaznacz prawidłową odpowiedź. Kąt przy podstawie trójkąta równoramiennego ma miarę 30° . Pole tego trójkąta jest równe $12\sqrt{3}$. Promień okręgu opisanego na tym trójkącie jest równy

☐ 48.

☐ $4\sqrt{3}$.

☐ 96.

☐ $4\sqrt{6}$.

Ćwiczenie 3



Dany jest trójkąt o bokach długości a , b , c . Promień okręgu opisanego na tym trójkącie jest równy R , a pole tego trójkąta jest równe P . Dopasuj, łącząc w pary, długości boków trójkąta do promienia okręgu opisanego na tym trójkącie i pola trójkąta.

$$a = 3, b = 4, c = 5$$

$$P = 12, R = \frac{25}{8}$$

$$a = 5, b = 5, c = 6$$

$$P = 6, R = \frac{5}{2}$$

$$a = 5, b = 6, c = 7$$

$$P = \frac{15\sqrt{7}}{4}, R = \frac{8\sqrt{7}}{7}$$

$$a = 4, b = 5, c = 6$$

$$P = 6\sqrt{6}, R = \frac{35\sqrt{6}}{24}$$

Ćwiczenie 4



Uzasadnij, że stosunek pola trójkąta do pola koła opisanego na tym trójkącie jest mniejszy, niż $\frac{2}{\pi}$.

Ćwiczenie 5



Podaj przykłady miar kątów trójkąta, którego pole jest π razy mniejsze od pola koła opisanego na tym trójkącie.

Ćwiczenie 6



Długości boków trójkąta wyrażają się liczbami całkowitymi, a dwa z nich mają długości odpowiednio 8 i 17. Trzeci bok tego trójkąta jest o 2 krótszy od średnicy okręgu opisanego na tym trójkącie. Pole tego trójkąta także wyraża się liczbą całkowitą. Wyznacz długość trzeciego z boków trójkąta.

Ćwiczenie 7



W trójkącie kąty mają miary 30° , 45° , 105° . Mając podany promień R okręgu opisanego na trójkącie, wskaż pole tego trójkąta. Przyjmij, że $\sin 105^\circ = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

Dla $R = 2$ pole trójkąta wynosi:

$$P = \sqrt{3} + 2 \quad P = \sqrt{3} + 1 \quad P = \sqrt{3} - 1$$

Dla $R = \sqrt{\sqrt{3} - 1}$ pole trójkąta wynosi:

$$P = \frac{1}{2} \quad P = \sqrt{3} + 1 \quad P = \sqrt{3} - 1$$

Dla $R = 2\sqrt[4]{3}$ pole trójkąta wynosi:

$$P = 3 + \sqrt{32} \quad P = 2 + \sqrt{3} \quad P = 3 + \sqrt{3}$$

Dla $R = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ pole trójkąta wynosi:

$$P = \frac{\sqrt{3}+1}{2} \quad P = \frac{\sqrt{3}+2}{3} \quad P = \frac{\sqrt{3}+1}{3}$$

Ćwiczenie 8



Dany jest trójkąt o bokach długości a , b , c , wpisany w okrąg o promieniu R . Trójkąt podobny do danego jest wpisany w okrąg o promieniu $R + 1$ i ma pole cztery razy większe, niż dany trójkąt. Wyznacz długość promienia R .

Dla nauczyciela

Imię i nazwisko autora: Wanda Człapińska

Przedmiot: Matematyka

Temat zajęć: Zależność między polem trójkąta a promieniem okręgu opisanego na trójkącie.

Grupa docelowa: III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa

VII. Trygonometria PP

Uczeń

5) stosuje twierdzenia sinusów i cosinusów oraz wzór na pole trójkąta

6) oblicza kąty trójkąta i długości jego boków przy odpowiednich danych (rozwiązuje trójkąty)

VIII. Planimetria PP

9) wykorzystuje zależności między obwodami oraz między polami figur podobnych;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- bada zależności między polem trójkąta i długością promienia okręgu opisanego na tym trójkącie i formułuje hipotezy dotyczące tych zależności
- dowodzi twierdzeń, które ustalają zależności między promieniem okręgu opisanego oraz długościami boków i miarami kątów trójkąta
- stosuje poznane twierdzenia do wyznaczania zależności miarowych w trójkącie
- stosuje poznane twierdzenia do badania istnienia trójkątów o danych własnościach

Strategie i metody nauczania:

- konstruktywizm
- dyskusja
- rozmowa nauczająca z wykorzystaniem ćwiczeń interaktywnych

Formy zajęć:

- praca indywidualna
- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każda grupa uczniów miała do dyspozycji komputer, najlepiej w pracowni komputerowej. Lekcję tę można przeprowadzić, mając do dyspozycji jeden komputer z rzutnikiem multimedialnym.

Przebieg lekcji:

Faza wprowadzająca

1. Nauczyciel prosi uczniów o podanie znanych wzorów na pole trójkąta. Prosi o rozstrzygnięcie, czy znajomość promienia okręgu opisanego na trójkącie wystarcza do wyznaczenia pola trójkąta.
2. Nauczyciel prosi uczniów o przypomnienie twierdzenia sinusów oraz pojęcia sinusa kąta w trójkącie prostokątnym.
3. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć, uczniowie ustalają kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna

1. Nauczyciel formułuje problem opisany w Przykładzie 1. i prosi o jego rozwiązanie. Uczniowie pod kierunkiem nauczyciela rozwiązują konkretny problem i stawiają hipotezy uogólniające.
2. Uczniowie, pracując w grupach, wykorzystują galerię zdjęć interaktywnych.
3. Nauczyciel steruje dyskusją, jaką uczniowie prowadzą w trakcie oglądania materiałów zamieszczonych w galerii w takim kierunku, aby uczniowie samodzielnie wyprowadzili kolejne wzory. Następnie omawia dowody twierdzeń, w których pole trójkąta jest wyrażane poprzez promień okręgu opisanego i boki lub kąty trójkąta.
4. Uczniowie wykonują zaproponowane ćwiczenia interaktywne, wykorzystując umiejętności z różnych działów matematyki.

Faza podsumowująca

1. Nauczyciel prosi wybranych uczniów o przedstawienie najważniejszych elementów, jakie były omawiane w trakcie lekcji.
2. Nauczyciel inicjuje dyskusję – czy warto znać wiele różnych wzorów na pole trójkąta, czy może raczej mieć świadomość, że pole można obliczyć w różny sposób i umiejętnie korzystać np. z karty wzorów maturalnych?

Praca domowa

Nauczyciel poleca, aby uczniowie wykonali w domu ćwiczenia interaktywne, które nie zostały wykonane w czasie zajęć.

Materiały pomocnicze:

- [Okrąg opisany na trójkącie](#)

Wskazówki metodyczne opisujące różne zastosowania multimedium:

Galeria zdjęć interaktywnych może posłużyć jako materiał powtórzeniowy dla uczniów.