Wykorzystanie wzorów Viete’a do określania związków między pierwiastkami równania kwadratowego

Wykorzystanie wzorów Viete’a do określania związków między pierwiastkami równania kwadratowego

Źródło: dostępny w internecie: pixabay.com, domena publiczna.

Wzory Viete’a są szeroko wykorzystywane do znajdowania rozwiązań równania kwadratowego, badania znaków oraz do obliczania wartości wyrażeń zawierających pierwiastki równania.

W tym materiale wykorzystamy wzory Viete’a do określania związków między pierwiastkami równania kwadratowego.

Twoje cele

- Obliczysz sumę i iloczyn pierwiastków równania kwadratowego.
- Określisz związki między pierwiastkami równania kwadratowego.

Przeczytaj

Jeżeli równanie kwadratowe $ax^2 + bx + c = 0$, gdzie $a \neq 0$, ma pierwiastki x_1, x_2, to możemy obliczyć ich sumę i iloczyn, bez konieczności obliczania samych pierwiastków. Wzory, które można w tym celu wykorzystać, noszą nazwę wzorów Viete'a.

Twierdzenie: Wzory Viete'a

Jeżeli równanie kwadratowe $ax^2 + bx + c = 0$, gdzie $a \neq 0$, ma pierwiastki x_1, x_2, to:

$$x_1 + \ x_2 = \ -\tfrac{b}{a} \quad \text{oraz} \quad x_1 \cdot x_2 = \tfrac{c}{a}.$$

Dzięki tym wzorom możemy, bez obliczenia rozwiązań równania, obliczyć kwadrat różnicy, sumę kwadratów, czy sumę odwrotności pierwiastków. Do przekształceń będziemy wykorzystywać również wzory skróconego mnożenia.

Przykład 1

Korzystając ze wzorów Viète'a obliczymy kwadrat różnicy pierwiastków równania kwadratowego $x_1 + 2x - 15 = 0$.

Najpierw sprawdzimy znak wyróżnika trójmianu kwadratowego.

$\Delta = 4 - 4 \cdot (-15) = 64 > 0$

Czyli równania ma dwa różne rozwiązania.

$(x_1 - x_2)^2 = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 4x_1x_2 =$

$= (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 \cdot x_2$

Czyli:

$(-\frac{b}{a})^2 - 4 \cdot \frac{c}{a} = (-\frac{2}{1})^2 - 4 \cdot \frac{(-15)}{1} = 2^2 + 60 = 64$

Zatem kwadrat różnicy pierwiastków równania jest równy 64.

Przykład 2

Korzystając ze wzorów Viète'a obliczymy sumę odwrotności pierwiastków x_1, x_2 równania kwadratowego $x^2 - 3\sqrt{5}x - 1 = 0$.

$x^2 - 3\sqrt{5}x - 1 = 0$

$\Delta = \left(-3\sqrt{5}\right)^2 - 4 \cdot (-1) = 45 + 4 = 49 > 0$

Równanie ma dwa rozwiązania (zauważmy, że rozwiązania te są różne od zera).

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_2+x_1}{x_2\cdot x_1}=\frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}}=-\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{c}=\frac{-b}{c}$$

Czyli $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{3\sqrt{5}}{-1}=-3\sqrt{5}$

Suma odwrotności pierwiastków równania jest równa $\left(-3\sqrt{5}\right)$.

Przykład 3

Przekształcimy wyrażenie $\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_1^2}$ tak, aby korzystając z wzorów Viete'a obliczyć wartość tego wyrażenia, wiedząc, że x_1, x_2 to pierwiastki równania kwadratowego $\sqrt{2}x^2-5x+3\sqrt{2}=0$.

Najpierw przekształcimy wyrażenie określające sumę odwrotności kwadratów pierwiastków równania tak, aby wykorzystać wzory Viete'a.

$$\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_1^2}=\frac{x_2^2+x_2^1}{x_2^1\cdot x_2^2}=\frac{x_2^1+2x_1x_2+x_2^2-2x_1x_2}{x_2^1\cdot x_2^2}=\frac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{x_2^1\cdot x_2^2}=\frac{\left(-\frac{b}{a}\right)^2-2\cdot\frac{c}{a}}{\left(\frac{c}{a}\right)^2}$$

$$\sqrt{2}x^2-5x+3\sqrt{2}=0$$

$$\Delta=25-4\cdot\sqrt{2}\cdot 3\sqrt{2}=25-24=1>0$$

$$\frac{\left(-\frac{b}{a}\right)^2-2\cdot\frac{c}{a}}{\left(\frac{c}{a}\right)^2}=\frac{\left(\frac{5}{\sqrt{2}}\right)^2-2\cdot\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}}}{\left(\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)^2}=\frac{\frac{25}{2}-6}{9}=\frac{\frac{13}{2}}{9}=\frac{13}{2}\cdot\frac{1}{9}=\frac{13}{18}$$

Wartość wyrażenia jest równa $\frac{13}{18}$.

Przykład 4

Podaj takie przykładowe równanie kwadratowe, aby suma rozwiązań x_1 i x_2 równania kwadratowego była równa 1, natomiast iloczyn tych rozwiązań był równy (-2).

Z treści zadania mamy:

$$\begin{cases}x_1+x_2=1\\x_1\cdot x_2=-2\end{cases}$$

$$\begin{cases}x_2=1-x_1\\x_1(1-x_1)=-2\end{cases}$$

$$\begin{cases}x_2=1-x_1\\-x_1^2+x_1+2=0\end{cases}$$

Zajmiemy się rozwiązaniem drugiego równania.

$$-x_1^2+x_1+2=0$$

$$\Delta=1-4\cdot(-1)\cdot 2=1+8=9$$

$\sqrt{\Delta} = 3$

$x_{1_1} = \frac{-1-3}{-2} = 2$

$x_{1_2} = \frac{-1+3}{-2} = -1$

$x_{2_1} = 1 - 2 = -1$

$x_{2_2} = 1 - (-1) = 2$

Otrzymaliśmy pary rozwiązań 2 i -1 oraz -1 i 2.

Zatem korzystając z postaci iloczynowej równania kwadratowego np. dla $a = 1$ mamy

$(x+1)(x-2) = 0$

Czyli przykładowe równanie to $x^2 - x - 2 = 0$.
Przykład 5

Ułożymy równanie kwadratowe tak, aby suma rozwiązań x_1 i x_2 była równa 6, a suma kwadratów tych rozwiązań była równa 20.

Z treści zadania możemy zapisać układ równań:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 6 \\ x_1^2 + x_2^2 = 20 \end{cases}$$

Zapiszemy wyrażenie opisujące sumę kwadratów pierwiastków równania kwadratowego z wykorzystaniem wzorów Viete'a.

$x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 2x_1x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$

Czyli, ponieważ $x_1^2 + x_2^2 = 20$, możemy zapisać równanie:

$6^2 - 2x_1x_2 = 20$

$-2x_1x_2 = 20 - 36$

$x_1 \cdot x_2 = 8$

Zatem:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 6 \\ x_1 \cdot x_2 = 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = 6 - x_1 \\ x_1(6 - x_1) = 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = 6 - x_1 \\ -x_1^2 + 6x_1 - 8 = 0 \end{cases}$$

$x_1^2 - 6x_1 + 8 = 0$

$\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 8 = 36 - 32 = 4$

$\sqrt{\Delta} = 2$

$x_{1_1} = \frac{6-2}{2} = 2$

$x_{1_2} = \frac{6+2}{2} = 4$

$x_{2_1} = 6 - 2 = 4$

$x_{2_2} = 6 - 4 = 2$

Możemy zapisać równanie kwadratowe w postaci iloczynowej.

$a(x-2)(x-4) = 0$

Dla $a = 1$ równanie będzie miało postać $x^2 - 6x + 8 = 0$.

Słownik

wzory Viete'a

jeżeli równanie kwadratowe $ax^2 + bx + c = 0$, gdzie $a \neq 0$, ma pierwiastki x_1, x_2, to

$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ oraz $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$

pierwiastek równania

każda liczba rzeczywista, która po wstawieniu w miejsce niewiadomej zamienia równanie w zdanie prawdziwe

Film samouczek

Polecenie 1

Zapoznaj się z filmem samouczkiem przedstawiający zastosowanie wzorów Viete'a do określania związków między pierwiastkami.

Film dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DxhFCsiHK

Film nawiązujący do treści lekcji dotyczącej wykorzystania wzorów Viete'a do określania związków między pierwiastkami równania kwadratowego.

Polecenie 2

Niech x_1 i x_1 będą pierwiastkami równania kwadratowego $x^2 - x - 6 = 0$. Wyznacz wartości liczbowe wyrażeń:

a) $(x_1 - x_2)^2$

b) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$

c) $x_1^3 + x_2^3$

d) $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}$

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

Ćwiczenie 7

Ćwiczenie 8

Wiedząc, że x_1 i x_2 są rozwiązaniami równania kwadratowego, przekształć równoważnie wyrażenie $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$ tak, aby korzystając z wzorów Viète'a można było obliczyć jego wartość.

Dla nauczyciela

Autor: Jolanta Schilling

Przedmiot: Matematyka

Temat: Wykorzystanie wzorów Viete'a do określania związków między pierwiastkami równania kwadratowego

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

III. Równania i nierówności. Zakres rozszerzony.

Uczeń:

3) stosuje wzory Viete'a dla równań kwadratowych.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- oblicza sumę i iloczyn pierwiastków równania kwadratowego
- określa związki między pierwiastkami równania kwadratowego
- dobiera model algebraiczny do określonej sytuacji

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- śnieżna kula
- burza mózgów
- dyskusja

Formy pracy:

- praca indywidualna
- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami i dostępem do Internetu, słuchawki
- zasoby multimedialne zawarte w e–materiale
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Uczniowie metodą burzy mózgów przypominają twierdzenie o liczbie pierwiastków równania kwadratowego.
2. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć oraz wspólnie z uczniami ustala kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie pracują metodą śnieżnej kuli. Najpierw wymieniają się w parach wiadomościami dotyczącymi miejsc zerowych równania kwadratowego oraz wzorów na kwadrat różnicy i sumę odwrotności pierwiastków. Następnie łączą się w grupy 4 osobowe i porównują swoje wiadomości.
2. Teraz uczniowie pracują w grupach 6 osobowych i omawiają przykłady z sekcji „Przeczytaj”.
3. Uczniowie oglądają film samouczek i porównują wzory z tymi, które wyprowadzili sami.
4. Uczniowie w parach wykonują ćwiczenia interaktywne wskazane przez nauczyciela. Wspólnie omawiają odpowiedzi.

Faza podsumowująca:

1. Jako podsumowanie nauczyciel zadaje uczniom pytania dotyczące określania związków między pierwiastkami równania kwadratowego.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, udzielając im tym samym informacji zwrotnej.

Praca domowa:

Zadaniem uczniów jest rozwiązanie polecenia 2.

Materiały pomocnicze:

Równanie kwadratowe

Wskazówki metodyczne:

Film samouczek może być wykorzystany do stworzenia prezentacji multimedialnej.