



Wykorzystanie własności ciągu arytmetycznego w zadaniach na dowodzenie

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Infografika](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Wykorzystanie własności ciągu arytmetycznego w zadaniach na dowodzenie

Źródło: [Gerd Altmann](#) z [Pixabay](#), domena publiczna.

W starożytnej Grecji uczonych trudniących się zawodowo nauczaniem retoryki, matematyki czy fizyki, nazywano nauczycielami mądrości, czyli sofistami. Sofiści zasłynęli z umiejętności dowodzenia za wszelką cenę (nawet kosztem logiki i zdrowego rozsądku), słuszności postawionej tezy.

Obecnie sofizmat to pozornie poprawny argument, zawierający świadomie zatajone błędy logiczne.

Przykładem znanego sofizmu jest dowód, że $1 \text{ zł} = 1 \text{ gr}$.

$$1 \text{ zł} = 100 \text{ gr} = 10 \text{ gr} \cdot 10 \text{ gr} = 0,1 \text{ zł} \cdot 0,1 \text{ zł} = 0,01 \text{ zł} = 1 \text{ gr}$$

Sofizmat zatem prowadzi do fałszywej tezy, która wydaje się prawdziwa. Najczęściej sofizmat powstaje wtedy, gdy podane przesłanki nie wystarczają do uznania twierdzenia za dostatecznie uzasadniony lub któraś z przesłanek nie posiada uzasadnienia.

W tym materiale zajmiemy się dowodami związanymi z ciągiem arytmetycznym. W rozważaniach, które będziemy prowadzić odejdziemy trochę od ścisłych reguł obowiązujących w klasycznych dowodach (założenie – teza–dowód), na rzecz klarowności zapisów. Jednak będziemy przy tym pamiętać, aby prawdziwe były twierdzenia i wzory,

z których skorzystamy. Mamy więc nadzieję, że ten sposób unikniemy stworzenia nowego sofizmu.

Twoje cele

- Wykorzystasz wiadomości na temat ciągów arytmetycznych w zadaniach „na dowodzenie”.
- Przeanalizujesz treść zadania i dobierzesz odpowiedni model, związany z ciągiem arytmetycznym, do rozwiązania zadania.
- Przeprowadzisz rozumowania, także kilkietapowe, podasz argumenty uzasadniające poprawność rozumowania.

Przeczytaj

W matematyce każde stwierdzenie, aby stać się twierdzeniem, wymaga dowodu, czyli logicznego rozumowania, na podstawie którego z podanego założenia wynika teza.

Jeśli mamy implikację $A \Rightarrow B$, wówczas mówimy, że A jest warunkiem dostatecznym dla B oraz, że B jest warunkiem koniecznym dla A . Zatem warunek dostateczny (wystarczający) to każdy warunek, z którego dany fakt wynika, a warunek konieczny to wniosek wypływający z danego faktu.

Jeśli prawdziwa jest również implikacja odwrotna $A \Leftarrow B$, to mówimy, że A jest warunkiem dostatecznym i koniecznym dla B .

Analizując przykłady podane w tym materiale, wyodrębnij dla danego stwierdzenia warunek konieczny i dostateczny.

Na początek przypomnienie najważniejszych wzorów dotyczących ciągu arytmetycznego, z których będziemy korzystać.

Będziemy przy tym zakładać, że dany ciąg, np. ciąg (a_n) , jest określony dla $n \geq 1$ i $n \in \mathbb{N}$.

Definicja: Ciąg arytmetyczny

Ciągiem arytmetycznym nazywamy ciąg liczbowy co najmniej trzywyrazowy, w którym każdy wyraz, począwszy od drugiego, powstaje przez dodanie do wyrazu poprzedniego liczby r , zwanej różnicą ciągu.

Ciąg arytmetyczny (a_n)		
Wyraz ogólny ciągu	Zależność między trzema kolejnymi wyrazami ciągu	Suma n początkowych wyrazów ciągu
$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$	$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$	$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$

Pierwszy typ zadań, którym się zajmiemy dotyczy uzasadniania, że dany ciąg jest arytmetyczny.

Przykład 1

Udowodnimy, że jeżeli ciąg $(\frac{1}{a+b}, \frac{1}{a+c}, \frac{1}{c+b})$ jest arytmetyczny i $(a + b)(b + c)(c + b) \neq 0$ to ciąg (a^2, b^2, c^2) też jest ciągiem arytmetycznym.

Ciąg $(\frac{1}{a+b}, \frac{1}{a+c}, \frac{1}{c+b})$ jest arytmetyczny, zatem ze związku między trzema kolejnymi wyrazami tego ciągu wynika, że

$$\frac{1}{a+c} = \frac{\frac{1}{a+b} + \frac{1}{c+b}}{2}$$

Przekształcamy zapisaną równość. Mnożymy obie strony równości przez 2 i ułamki sprowadzamy do wspólnego mianownika.

$$\frac{2}{a+c} = \frac{1}{a+b} + \frac{1}{c+b}$$

$$\frac{2}{a+c} = \frac{c+b+a+b}{(a+b)(c+b)}$$

Mnożymy „na krzyż” obie strony równości i wykonujemy wskazane działania.

$$2(ac + ab + bc + b^2) = (a + c)(a + c + 2b)$$

$$2ac + 2ab + 2bc + 2b^2 = a^2 + ac + 2ab + ac + c^2 + 2bc$$

Redukujemy wyrazy podobne.

$$2b^2 = a^2 + c^2$$

Dzielimy obie strony równości przez 2.

$$b^2 = \frac{a^2 + c^2}{2}$$

Otrzymany związek wskazuje na to, że ciąg (a^2, b^2, c^2) jest arytmetyczny.

Przykład 2

Dana jest funkcja $f(x) = 4x + 1$. Wykażemy, że ciąg

$$f(1), f(3), f(5), \dots, f(2k + 1), \dots$$

gdzie $k \in \mathbb{N}_+$ jest ciągiem arytmetycznym rosnącym.

Aby wykazać, że dany ciąg jest ciągiem arytmetycznym, zbadamy różnicę między kolejnymi wyrazami danego ciągu.

$$f(2n + 1) - f(2n - 1) = 4(2n + 1) + 1 - 4(2n - 1) - 1$$

$$f(2n + 1) - f(2n - 1) = 8n + 4 + 1 - 8n + 4 - 1 = 8$$

Badana różnica dla każdej liczby naturalnej n jest liczbą, a więc jest to ciąg arytmetyczny.

Ponieważ uzyskana liczba 8 jest dodatnia, zatem ciąg jest rosnący.

Drugi typ zadań na dowodzenie związany jest z własnościami sumy n -kolejnych wyrazów ciągu arytmetycznego.

Przykład 3

Ciąg arytmetyczny (a_n) określony jest wzorem $a_n = 22 - 4n$ dla $n = 1, 2, 3, \dots$

Udowodnimy, że liczba n , dla której suma n początkowych kolejnych wyrazów ciągu osiąga wartość największą jest liczbą pierwszą.

Wyznaczamy pierwszy wyraz ciągu i różnicę ciągu.

$$a_1 = 22 - 4 = 18$$

$$r = a_2 - a_1$$

$$r = (22 - 8) - 18 = -4$$

Zapisujemy sumę n -kolejnych wyrazów ciągu (a_n).

$$S = \frac{18+18+(n-1)\cdot(-4)}{2} \cdot n$$

$$S = -2n^2 + 20n$$

Rozważmy funkcję

$$Sn = -2n^2 + 20n, \text{ gdzie } n = 1, 2, 3, \dots$$

Jest to funkcja kwadratowa, która przyjmuje wartość największą dla

$$n = -\frac{20}{-2 \cdot 2} = 5.$$

Obliczamy wartość funkcji dla argumentu 5.

$$S(5) = -2 \cdot 5^2 + 20 \cdot 5 = 50$$

Zatem wartość wyrażenia $S = -2n^2 + 20n$ jest największa dla $n = 5$ i jest równa 50.

Liczba 5 jest liczbą pierwszą, c.n.d

Przykład 4

Ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym malejącym. Suma wyrazu pierwszego i piątego jest równa 2, a iloczyn pierwszego i czwartego wyrazu jest równy 1. Wykażemy, że należy dodać co najwyżej 9 początkowych wyrazów ciągu, aby suma tych wyrazów była liczbą nieujemną.

Oznaczmy:

a – pierwszy wyraz ciągu,

r – różnica ciągu.

Z treści zadania wynika, że

$$a + a + 4r = 2 \text{ i } a(a + 3r) = 1.$$

Stąd:

$$a + 2r = 1$$

$$a = 1 - 2r$$

Podstawiamy wyznaczone a do drugiego z zapisanych równań.

$$(1 - 2r)(1 + r) = 1$$

Rozwiązujemy otrzymane równanie.

$$1 + r - 2r - 2r^2 = 1$$

$$2r^2 + r = 0$$

$$r(2r + 1) = 0$$

$$r = 0 \text{ lub } r = -\frac{1}{2}$$

Ciąg (a_n) jest ciągiem malejącym, więc $r \neq 0$, czyli $r = -\frac{1}{2}$.

Wyznaczamy pierwszy wyraz ciągu.

$$a = 1 - 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 2$$

Zapisujemy wzór na wyraz ogólny ciągu:

$$a_n = 2 + (n - 1) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$a_n = 2\frac{1}{2} - \frac{1}{2}n$$

Korzystamy ze wzoru na sumę n - kolejnych wyrazów ciągu arytmetycznego.

$$S_n = \frac{2 - \frac{1}{2}n + 2\frac{1}{2}}{2} \cdot n$$

$$S_n = -\frac{1}{4}n^2 + \frac{9}{4}n$$

Uzyskana suma ma być nieujemna, zatem zapiszemy i rozwiążemy odpowiednią nierówność.

$$-\frac{1}{4}n^2 + \frac{9}{4}n \geq 0 \text{ i } n = 1, 2, 3, \dots$$

$$n(n - 9) \leq 0$$

$$n \in \{1, 2, 3, 4, \dots, 9\}$$

C.n.d

Teraz zadanie, w których udowodnimy mniej znaną własność ciągu arytmetycznego.

Przykład 5

Udowodnimy, że dla dowolnych liczb a, b, c różnych od zera i takich, że ciąg (a^3, b^3, c^3) jest arytmetyczny, prawdziwa jest równość

$$\frac{1}{a^2+ab+b^2} + \frac{1}{b^2+bc+c^2} = \frac{2}{a^2+ac+c^2}$$

Oznaczmy:

r – różnica ciągu (a^3, b^3, c^3) .

Z własności ciągu arytmetycznego wynika, że różnica r wyraża się wzorem

$$r = b^3 - a^3 \text{ i } r = c^3 - b^3$$

Po dodaniu stronami zapisanych wyżej równości, otrzymujemy:

$$c^3 - a^3 = 2r.$$

- Jeśli $r = 0$ to $a = b = c$. Wtedy dowodzona równość jest oczywista.
- Jeśli $r \neq 0$ to we wszystkich ułamkach mianowniki są niepełnymi kwadratami dwumianów. Zatem możemy rozszerzyć każdy z ułamków tak, aby w mianowniku otrzymać różnicę sześcianów.
- Przekształcamy najpierw lewą stronę dowodzonej równości.

$$L = \frac{1}{a^2+ab+b^2} + \frac{1}{b^2+bc+c^2}$$

$$L = \frac{b-a}{(a^2+ab+b^2)(b-a)} + \frac{c-b}{(b^2+bc+c^2)(c-b)}$$

$$L = \frac{b-a}{b^3-a^3} + \frac{c-b}{c^3-b^3}$$

$$L = \frac{b-a}{r} + \frac{c-b}{r} = \frac{c-a}{r}$$

Teraz w podobny sposób przekształcimy prawą stronę dowodzonej równości.

$$P = \frac{2}{a^2+ac+c^2}$$

$$P = \frac{2(c-a)}{(a^2+ac+c^2)(c-a)}$$

$$P = \frac{2(c-a)}{c^3-a^3} = \frac{2(c-a)}{2r} = \frac{c-a}{r}$$

$$\text{Zatem } P = L$$

c.n.d

Słownik

ciąg arytmetyczny

ciągami arytmetycznymi nazywamy ciągi liczbowe co najmniej trzywyrazowe, w których każdy wyraz, począwszy od drugiego, powstaje przez dodanie do wyrazu poprzedniego liczby r , zwanej różnicą ciągu

Infografika

Polecenie 1

Zapoznaj się z infografiką. Znajdziesz w niej przykład dowodu jednej z własności ciągu arytmetycznego. Spróbuj najpierw samodzielnie udowodnić tę własność, a następnie porównaj z rozwiązaniem.

Polecenie 2

Ciąg $(x + y, 3x + 2y + 1, x^2 + 4y + 5x)$ jest arytmetyczny. Wykaż, że ciąg ten jest rosnący dla $x \in (-1, 3)$.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Zaznacz poprawną odpowiedź. Można udowodnić, że jeżeli ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym, to ciąg (b_n) o wyrazie ogólnym $b_n = a_{n+2} - a_n$:

- ☐ jest ciągiem malejącym
- ☐ nie jest ciągiem monotonicznym
- ☐ jest ciągiem rosnącym
- ☐ jest ciągiem stałym

Ćwiczenie 2



Zaznacz poprawną odpowiedź. Można udowodnić, że jeżeli ciągi (a, b, c) i (a^2, b^2, c^2) są ciągami arytmetycznymi to:

- ☐ $a + b = c$
- ☐ $a^2 + b^2 = c^2$
- ☐ $a = b = c$
- ☐ $a - b = c$

Ćwiczenie 3



Dana jest funkcja f określona wzorem $f(x) = -2x + 3$ i ciąg (a_n) taki, że:

$$a_1 = f(2), a_2 = f(4), a_3 = f(6), \dots, a_n = f(2n), \dots$$

Uzupełnij dowód tego, że ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym. Wpisz odpowiednie liczby.

$$a_{n+1} - a_n = \boxed{} \cdot (n+1) + \boxed{} - (-4n+3) =$$

Ćwiczenie 4



Ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym o wyrazach ujemnych. Uzupełnij dowód tego, że ciąg (S_n) jest ciągiem malejącym.

Przeciągnij odpowiednie wyrażenia.

Oznaczmy:

a – pierwszy wyraz ciągu (a_n) ,

r – różnica ciągu (a_n) .

Zapisujemy wzór ogólny ciągu (S_n) .

$$S_n = \frac{a+a+(n-1) \cdot r}{2} \cdot n$$

$$S_n = \boxed{\phantom{\frac{2a+(n-1) \cdot r}{2} \cdot n}}$$

Ciąg jest malejący, jeżeli różnica między dwoma kolejnymi wyrazami ciągu jest ujemna.

Badamy więc znak tej różnicy.

$$S_{n+1} - S_n = \boxed{\phantom{\frac{2a+(n+1-1) \cdot r}{2} \cdot (n+1)}} - \frac{a+a+(n-1) \cdot r}{2} \cdot n$$

Przekształcamy otrzymane wyrażenie.

$$S_{n+1} - S_n = \boxed{\phantom{\frac{2a+(n+1-1) \cdot r}{2} \cdot (n+1) - \frac{2a+(n-1) \cdot r}{2} \cdot n}}$$

$$S_{n+1} - S_n = \frac{2an+2a+n^2r+nr-2an-rn^2+rn}{2}$$

$$S_{n+1} - S_n = \boxed{} = a$$

$$S_{n+1} - S_n = \boxed{}$$

Wyrazy ciągu (a_n) są ujemne – czyli $a < 0$.

$$S_{n+1} - S_n = \boxed{}$$

Różnica dwóch kolejnych wyrazów ciągu jest ujemna, zatem ciąg jest malejący.

$$\frac{2a}{2}$$

$$\frac{2a+(n-1) \cdot r}{2} \cdot n$$

$$a < 0$$

$$\frac{2a(n+1)+nr(n+1)-2an-(n-1)rn}{2}$$

$$\frac{2a+(n+1-1) \cdot r}{2} \cdot (n+1)$$

$$a$$

Ćwiczenie 5



Suma trzech pierwszych wyrazów ciągu arytmetycznego jest równa 21. Iloczyn dwóch pierwszych wyrazów jest o 1 mniejszy od podwojonego wyrazu trzeciego.

Oznaczmy:

a – pierwszy wyraz ciągu,

r – różnicę ciągu.

Zaznacz, które stwierdzenie jest prawdziwe, a które fałszywe.

	Prawda	Fałsz
Można udowodnić, że $a + r = 7$.	☐	☐
Prawdą jest, że $a(a + 1) + 1 = 2(a + 2)$.	☐	☐
Z treści zadania wynika, że $a + r + a + 2r + a + 3r = 21$.	☐	☐
Można udowodnić, że różnica ciągu jest równa 4.	☐	☐
Można udowodnić, że pierwszy wyraz ciągu jest równy 4.	☐	☐

Ćwiczenie 6



Zaznacz poprawną odpowiedź. Ciąg $(a_1, a_2, \dots, a_n)$, gdzie $n \geq 3$ jest ciągiem arytmetycznym o wyrazach dodatnich. Można udowodnić, że prawdziwa jest równość

$\frac{1}{a_1 \cdot a_2} + \frac{1}{a_2 \cdot a_3} + \dots + \frac{1}{a_{n-1} \cdot a_n} = A$, gdzie:

☐ $A = \frac{n-1}{a_1 \cdot a_n}$

☐ $A = \frac{n}{a_1 \cdot a_n}$

☐ $A = \frac{n^2}{a_1 \cdot a_n}$

☐ $A = \frac{n+1}{a_1 \cdot a_n}$

Ćwiczenie 7



Wykaż, że jeżeli ciąg liczb dodatnich (a^2, b^2, c^2) jest ciągiem arytmetycznym, to ciąg $(\frac{1}{a+b}, \frac{1}{a+c}, \frac{1}{c+b})$ jest również ciągiem arytmetycznym.

Ćwiczenie 8



Wykaż, że jeżeli liczby dodatnie a, b, c tworzą w tej kolejności ciąg arytmetyczny, to liczby $\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}, \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{c}}, \frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{a}}$, w tej kolejności, również tworzą ciąg arytmetyczny.

Dla nauczyciela

Autor: Justyna Cybulska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Wykorzystanie własności ciągu arytmetycznego w zadaniach na dowodzenie

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

VI. Ciągi. Zakres podstawowy.

Uczeń:

- 1) oblicza wyrazy ciągu określonego wzorem ogólnym;
- 3) w prostych przypadkach bada, czy ciąg jest rosnący, czy malejący;
- 4) sprawdza, czy dany ciąg jest arytmetyczny lub geometryczny;
- 5) stosuje wzór na n -ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- wykorzystuje wiadomości na temat ciągów arytmetycznych w zadaniach „na dowodzenie”
- analizuje treść zadania i dobiera odpowiedni model, związany z ciągiem arytmetycznym, do rozwiązywania zadania
- prowadzi rozumowania, także kilkietapowe, podaje argumenty uzasadniające poprawność rozumowania

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- lekcja bez słów
- grafitti
- drzewo ewaluacji

Formy pracy:

- praca w grupach
- praca w parach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każdy uczeń miał do dyspozycji komputer
- kartony, mazaki

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Ta lekcja ma być lekcją, w czasie której ani nauczyciel, ani uczniowie nie używają słów.
2. Zatem początkiem zajęć jest infografika, na podstawie której uczniowie ustalają (bez słów) temat i kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie samodzielnie zapoznają się z materiałami zapisanymi w sekcji „Przeczytaj”. Teraz łączą się w pary. Ich zadaniem jest udowodnienie twierdzeń zapisanych w ćwiczeniu 1 i ćwiczeniu 2 (uczniowie muszą nadal porozumiewać się bez słów).
2. Uczniowie, którzy udowodnili któreś z twierdzeń mogą zapisać swój dowód na tablicy. Jeśli któraś z par ma inny sposób dowodzenia, też go zapisuje. Nauczyciel powinien tak stymulować pracę uczniów, aby na tablicy pojawiło się kilka różnych dowodów danego twierdzenia.
3. Uczniowie nadal pracują w parach i rozwiązują ćwiczenia interaktywne.
4. Podsumowaniem tej części zajęć powinno być sporządzenie, przez uczniów pracujących w czwórkach, grafitti obrazującego typy dowodzonych twierdzeń związanych z ciągiem arytmetycznym i sposoby ich dowodzenia.

Faza podsumowująca:

1. Na gałęziach drzewa ewaluacji (drzewo przygotowuje wcześniej nauczyciel) uczniowie zapisują ukształtowane umiejętności. Pod drzewem ewentualne pytania, problemy,

które im się nasunęły w czasie zajęć.

2. Nauczyciel odpowiada na pytania uczniów (nadal bez słów), ocenia pracę par i grup.

Praca domowa:

Zadaniem ucznia jest wymyślenie i udowodnienie własnego twierdzenia dotyczącego ciągu arytmetycznego (twierdzenie może uczeń nazwać swoim nazwiskiem, np. twierdzenie Malinowskiego o sumie 4 wyrazów ciągu arytmetycznego).

Materiały pomocnicze:

[Ciągi – własności ciągów arytmetycznych](#)

Wskazówki metodyczne:

Infografika może być wykorzystana w czasie zajęć pokazujących różne sposoby dowodzenia twierdzeń matematycznych.