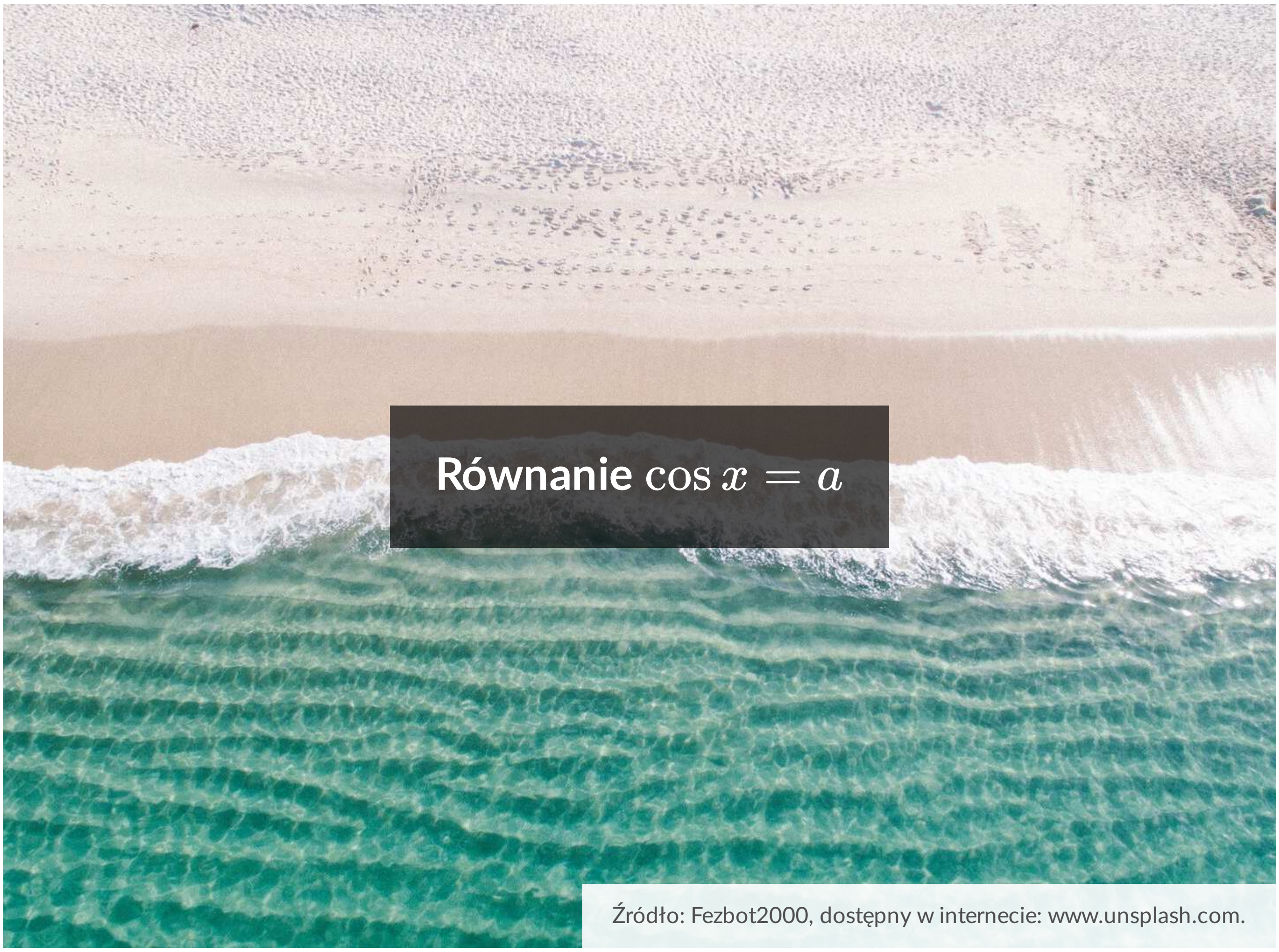
Równanie $\cos x = a$

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Animacja
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela



Źródło: Fezbot2000, dostępny w internecie: www.unsplash.com.

Poznałeś już wykres funkcji trygonometrycznej $y = \cos x$.

Poznałeś także podstawowe własności tego wykresu: środki symetrii i osie symetrii. Zapoznałeś się również z charakterystycznymi własnościami funkcji cosinus: jest funkcją okresową i jej zbiorem wartości jest przedział $\langle -1,\ 1\rangle$. Wykorzystamy opisane powyżej własności do rozwiązywania równań postaci: $\cos x = a$.

Twoje cele

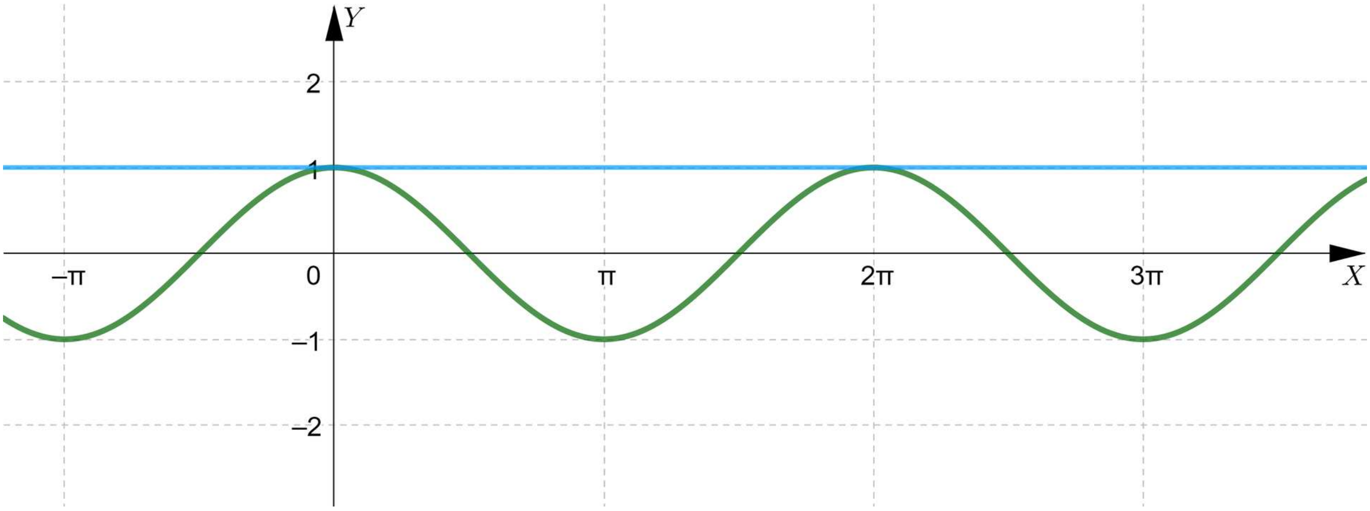
- Rozwiążesz równanie postaci: $\cos x = a$ w zadanym przedziale.
- Rozwiążesz równanie postaci: $\cos x = a$ w zbiorze liczb rzeczywistych.
- Rozwiążesz równanie postaci: $\cos(cx + d) = a$ w zbiorze liczb rzeczywistych.

Przeczytaj

Rozwiązywanie równań: $\cos x = 1, \cos x = -1$.

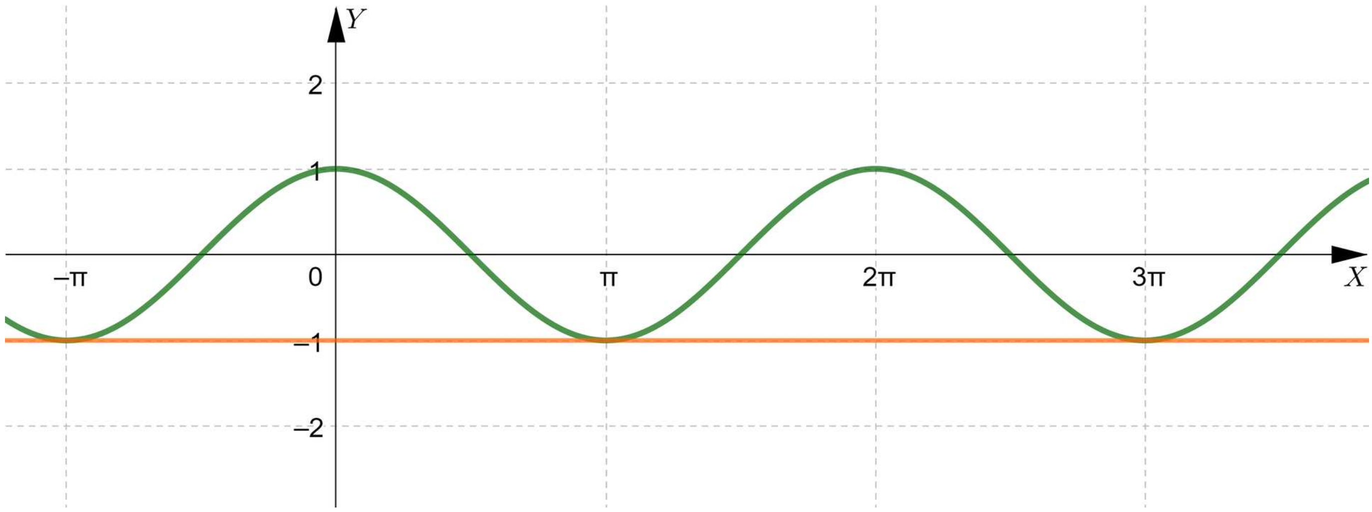
Rozpocznijmy rozwiązywanie równań postaci $\cos x = a$ od następującej obserwacji: ponieważ zbiorem wartości funkcji $y = \cos x$ jest przedział $\langle -1, 1\rangle$, zatem dla liczb $a \notin \langle -1, 1\rangle$ równanie $\cos x = a$ nie ma rozwiązań w zbiorze liczb rzeczywistych.

Na początek rozwiążemy równanie $\cos x = 1$.



Zauważmy, że w przedziale $\langle 0, 2\pi)$ funkcja $y = \cos x$ przyjmuje wartość 1 tylko dla argumentu $x = 0$. Funkcja $y = \cos x$ jest funkcją okresową o okresie zasadniczym $T = 2\pi$, zatem wszystkie rozwiązania równania mają postać: $x = 2k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Postępując analogicznie rozwiązujemy równanie $\cos x = -1$.



Rozwiązaniem równania $\cos x = -1$ jest każda liczba postaci $x = \pi + 2k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Rozwiązywanie równań: $\cos x = a$.

Aby rozwiązać równanie $\cos x = a$, wykorzystamy wykresy funkcji $y = \cos x$ i $y = a$. Na aplecie możemy poruszać suwakiem. Zwróćmy uwagę, że prosta $y = a$ przecina wykres w dwóch typach punktów: jedne z nich są pokolorowane na czerwono, pozostałe na pomarańczowo. Zauważmy, że punkty pokolorowane na czerwono są w równych odległościach równych 2π. Podobna sytuacja ma miejsce w przypadku punktów pokolorowanych na pomarańczowo. Zatem będą istnieć dwie serie rozwiązań.

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/D1DRrNkmZ

Pozostaje ustalić, jakie są zależności między punktami czerwonymi i pomarańczowymi.

Wykorzystajmy poniższy aplet.

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/D1DRrNkmZ

Poruszajmy suwakiem. Zauważmy, że punkt czerwony w czasie przesuwania suwaka jest położony symetrycznie do punktu pomarańczowego względem prostej o równaniu $x = 0$. Podobnie zachowują się pierwsze współrzędne tych punktów. Zatem ich współrzędne spełniają zależność: $x_2 = -x_1$.

> **Twierdzenie: o rozwiązywaniu równania trygonometrycznego.**
>
> Możemy zatem zapisać algorytm szukania rozwiązań równania $\cos x = a$. Znajdujemy jedno rozwiązanie x_0 takie, że $\cos x_0 = a$. Zapisujemy pierwszą serię rozwiązań: $x = x_0 + 2k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$. Znajdujemy drugie rozwiązanie $-x_0$. Zapisujemy drugą serię rozwiązań: $x = -x_0 + 2k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.
>
> Uwaga: W przypadku równań $\cos x = 1$, $\cos x = -1$ jest tylko jedna seria rozwiązań.

Teraz pokażemy kilka zastosowań podanego algorytmu.

> **Przykład 1**
>
> Rozwiążemy w zbiorze liczb rzeczywistych równanie: $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Najpierw znajdziemy rozwiązanie równania $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ w przedziale $<0, \pi>$.

Ponieważ $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, korzystając ze wzoru redukcyjnego $\cos(\pi - x) = -\cos x$ otrzymujemy $\cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Zatem poszukiwanym x jest liczba $\frac{5\pi}{6}$.

Z parzystości funkcji cosinus otrzymujemy, że $\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Wobec tego rozwiązaniami równania $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ są: $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ lub $x = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Przykład 2

Rozwiążemy równanie: $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ w przedziale $\langle -2\pi, 5\pi \rangle$.

Korzystając z rozwiązania przykładu 1 poszukamy rozwiązań, które znajdują się w przedziale $\langle -2\pi, 5\pi \rangle$. Są to: $-\frac{7\pi}{6}, -\frac{5\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{17\pi}{6}, \frac{19\pi}{6}, \frac{29\pi}{6}$.

Przykład 3

Rozwiążemy równanie $2\cos\Big(3x - 1\Big) = -\sqrt{2}$ w przedziale $\langle -\pi, \pi \rangle$.

Przekształcamy równanie do postaci: $\cos\Big(3x - 1\Big) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Podstawmy $z = 3x - 1$, czyli otrzymujemy równanie $\cos z = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Znajdujemy jedno rozwiązanie: $z_0 = \frac{3\pi}{4}$. Zatem rozwiązaniami równania $\cos z = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ są: $z = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ lub $z = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Ponieważ $z = 3x - 1$, wówczas rozwiązaniami równania $2\cos\Big(3x - 1\Big) = -\sqrt{2}$ są: $x = \frac{1}{3} + \frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3}$ lub $x = \frac{1}{3} - \frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3}$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Pozostaje wybrać rozwiązania z przedziału $\langle -\pi, \pi \rangle$:
$\frac{1}{3} - \frac{13\pi}{12}, \frac{1}{3} - \frac{5\pi}{12}, \frac{1}{3} + \frac{\pi}{4}, \frac{1}{3} - \frac{\pi}{4}, \frac{1}{3} - \frac{11\pi}{12}, \frac{1}{3} + \frac{5\pi}{12}$.

A teraz pokażemy, jak można rozwiązywać równania trygonometryczne z parametrem.

Przykład 4

Dla jakich wartości parametru $a \in \mathbb{R}$ równanie $\cos\big(3x+7\big) = a^2 + 3a + 1$ ma przynajmniej jedno rozwiązanie?

Ponieważ zbiorem wartości funkcji $y = \cos(3x+7)$ jest przedział $\langle -1, 1\rangle$, zatem muszą być spełnione dwie nierówności: $-1 \leq a^2 + 3a + 1$ i $a^2 + 3a + 1 \leq 1$.

Wówczas $0 \leq a^2 + 3a + 2$ i $a^2 + 3a \leq 0$. Wobec tego otrzymujemy $0 \leq (a+1)(a+2)$ i $a(a+3) \leq 0$. Stąd otrzymujemy odpowiedź: $a \in \langle -3, -2\rangle$ lub $a \in \langle -1, 0\rangle$.

Słownik

rozwiązanie równania z jedną niewiadomą

liczba spełniająca równanie, czyli liczba, która po podstawieniu za zmienną daje równość liczby po prawej i lewej stronie równania.

zbiór rozwiązań równania z jedną niewiadomą

zbiór liczb spełniających równanie.

Animacja

Polecenie 1

Zapozna się z filmem, a następnie wykonaj polecenia.

Trwa wczytywanie danych ..

Film dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/D16wJbIHl

Film nawiązujący do treści materiału dotyczącego równań typu kosinus x równa się a.

Polecenie 2

Rozwiąż równanie: $\cos 2x = \cos 4x$ w zbiorze liczb rzeczywistych.

Polecenie 3

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

Ćwiczenie 7

Ćwiczenie 8

Dla nauczyciela

Autor: Jacek Dymel

Przedmiot: Matematyka

Temat: Równanie $\cos x = a$

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:
Treści nauczania – wymagania szczegółowe:
VII. Trygonometria. Zakres podstawowy. Uczeń:
Zakres rozszerzony 2) posługuje się wykresami funkcji trygonometrycznych: sinus, cosinus, tangens;
Zakres rozszerzony 3) wykorzystuje okresowość funkcji trygonometrycznych;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- rozwiązuje równanie postaci: $\cos x = a$ w zadanym przedziale,
- rozwiązuje równanie postaci: $\cos x = a$ w zbiorze liczb rzeczywistych,
- rozwiązuje równanie postaci: $\cos(cx + d) = a$ w zbiorze liczb rzeczywistych,
- analizuje metody rozwiązywania równań postaci: $\cos x = a$.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona klasa;
- gra dydaktyczna;

- dyskusja.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

1. Uczniowie zapoznają się z treściami zapisanymi w sekcji „Przeczytaj”.

Faza wstępna:

1. Nauczyciel prosi wybraną osobę o odczytanie tematu lekcji tj. „Równanie $\cos x = a$”, a następnie określa cele i kryteria sukcesu.
2. Nauczyciel prosi o przygotowanie w parach pytań związanych z tematem. Czego się uczniowie chcą dowiedzieć? Co ich interesuje w związku z tematem lekcji?

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel czyta polecenie numer 2 - „Rozwiąż równanie: $\cos 2x = \cos 4x$ w zbiorze liczb rzeczywistych” z sekcji „Animacja”. Uczniowie zapoznają się z treścią materiału, następnie na forum klasy wspólnie wyjaśniają ewentualne wątpliwości.
2. Uczniowie wykonują wspólnie ćwiczenia nr 1-2 z sekcji „Sprawdź się”. Nauczyciel sprawdza poprawność wykonanych ćwiczeń, omawiając je wraz z uczniami.
3. W dalszej części uczniowie wykonują w grupach ćwiczenia 3-5. Po zakończeniu każdego ćwiczenia wybrana grupa prezentuje swoje rozwiązanie na forum klasy.
4. Uczniowie indywidualnie wykonują ćwiczenia nr 6-8. Następnie konsultują swoje rozwiązania z innym uczniem i ustalają jedną wersję odpowiedzi.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Nauczyciel ponownie odczytuje temat lekcji: „Równanie $\cos x = a$” i inicjuje krótką rozmowę na temat kryteriów sukcesu. Czego się uczniowie nauczyli? Na koniec prosi chętnego ucznia o podsumowanie i – jeśli to potrzebne – uzupełnia informacje.

Praca domowa:

1. Uczniowie wykonują ćwiczenia interaktywne, które nie zostały dokończone na zajęciach.

Wykresy i własności funkcji trygonometrycznych

Wskazówki metodyczne:

- Medium w sekcji „Animacja” można wykorzystać jako materiał służący powtórzeniu materiału w temacie „Równanie $\cos x = a$”.