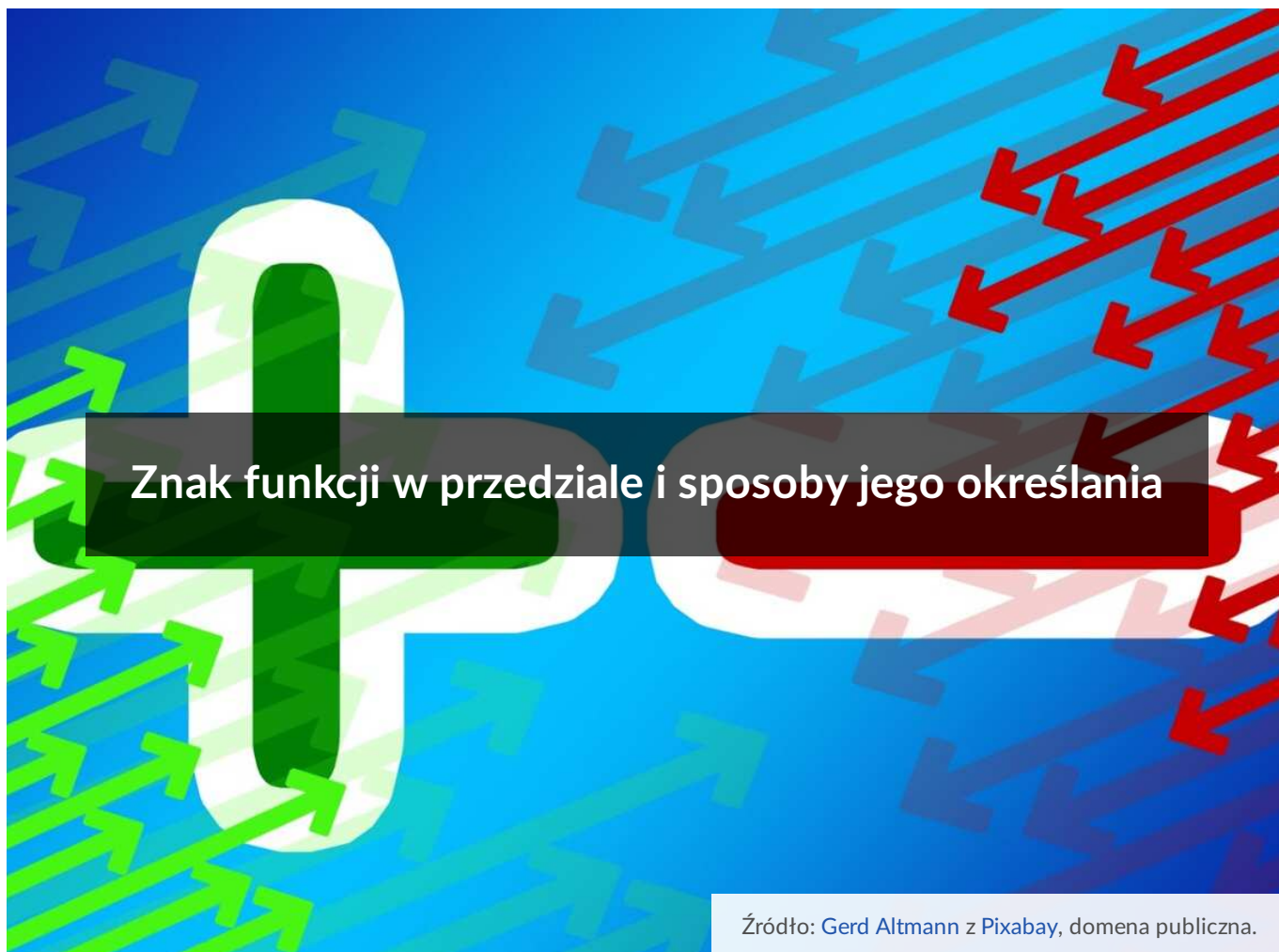




## Znak funkcji w przedziale i sposoby jego określania

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Galeria zdjęć interaktywnych](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Wykres funkcji dostarcza nam wielu informacji na temat własności funkcji. Możemy z niego odczytać, między innymi, dziedzinę funkcji, zbiór wartości funkcji, miejsca zerowe, współrzędne punktów przecięcia wykresu funkcji z osiami układu współrzędnych. Można również odczytać, dla jakich argumentów funkcja przyjmuje wartości dodatnie, a dla jakich wartości ujemne.

### Twoje cele

- Poznasz pojęcie znaku funkcji w przedziale.
- Poznasz sposoby określania znaku funkcji opisanej za pomocą wykresu oraz wzoru.
- Wskażesz przedział, w którym funkcja przyjmuje wartości dodatnie/ujemne.

# Przeczytaj

---

Jednym ze sposobów opisu funkcji jest przedstawienie jej za pomocą wykresu.

## Definicja: Wykres funkcji

Wykres funkcji  $f$  jest to zbiór wszystkich punktów płaszczyzny o współrzędnych  $(x, f(x))$ , w prostokątnym układzie współrzędnych, gdzie  $x$  jest elementem dziedziny tej funkcji, a  $f(x)$  jest wartością funkcji  $f$  dla argumentu  $x$ .

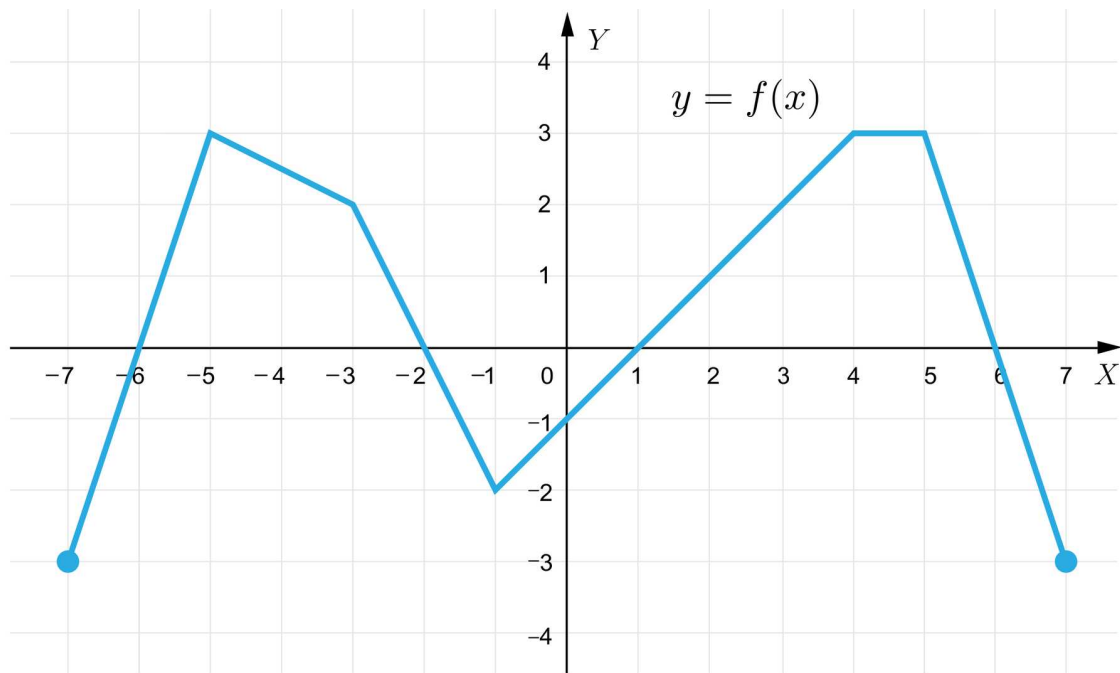
W prostokątnym układzie współrzędnych każdy punkt znajdujący się w pierwszej i drugiej ćwiartce układu współrzędnych ma drugą współrzędną dodatnią, a w trzeciej i czwartej ćwiartce ma drugą współrzędną ujemną. Linią podziału jest oś  $X$ . Oś  $X$  dzieli **wykres funkcji** w ten sposób, że każdy punkt wykresu, który leży powyżej osi  $X$  ma drugą współrzędną dodatnią. Wiemy, że druga współrzędną punktu należącego do wykresu funkcji, to wartość funkcji odpowiadająca danemu argumentowi. Możemy wtedy powiedzieć, że funkcja przyjmuje wartości dodatnie.

Każdy punkt wykresu funkcji leżący poniżej osi  $X$  ma drugą współrzędną ujemną. Możemy wtedy powiedzieć, że funkcja przyjmuje wartości ujemne.

Przeanalizujemy poniższe przykłady, które pokażą nam, w jaki sposób możemy określać znak funkcji w przedziale, kiedy funkcja jest opisana za pomocą wykresu.

## Przykład 1

Funkcja  $f$  opisana jest za pomocą wykresu.



Odczytamy z wykresu dla jakich argumentów wartości funkcji są dodatnie, a dla jakich są ujemne.

**Rozwiązanie:**

dla  $x \in \langle -7, -6 \rangle$  – funkcja przyjmuje wartości ujemne,

dla  $x \in (-6, -2)$  – funkcja przyjmuje wartości dodatnie,

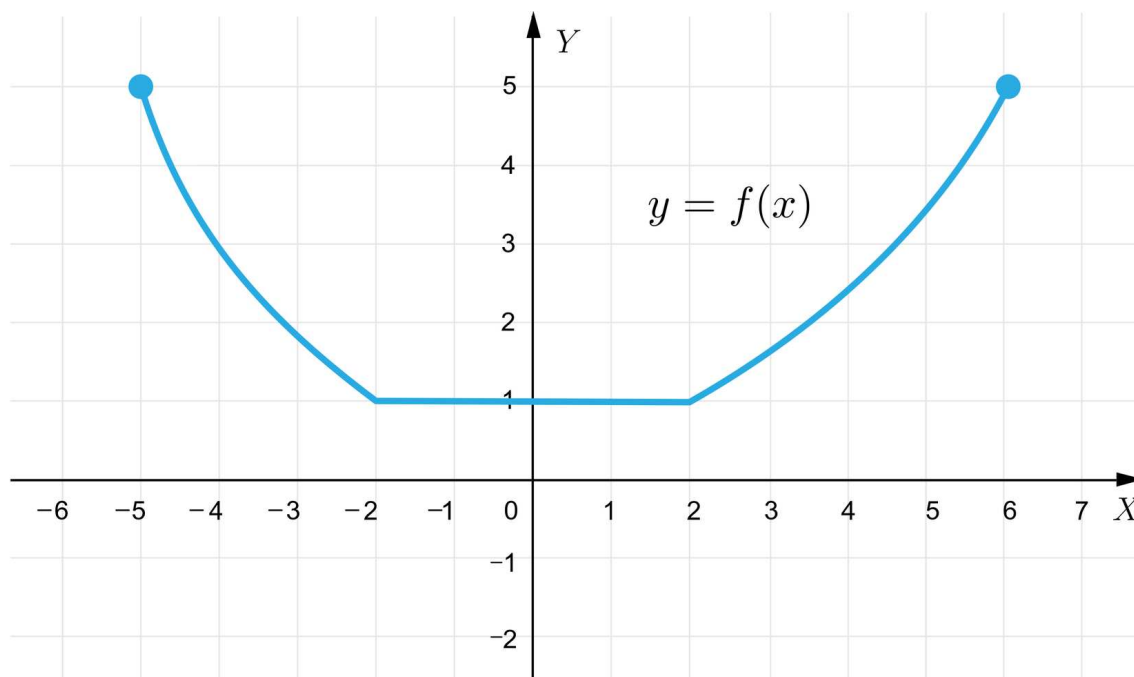
dla  $x \in (-2, 1)$  – funkcja przyjmuje wartości ujemne,

dla  $x \in (1, 6)$  – funkcja przyjmuje wartości dodatnie,

dla  $x \in (6, 7)$  – funkcja przyjmuje wartości ujemne.

**Przykład 2**

Funkcja  $f$  opisana jest za pomocą wykresu.



Odczytamy z wykresu dla jakich argumentów znak funkcji jest dodatni.

**Rozwiązanie:**

Analizując wykres zauważamy, że funkcja przyjmuje tylko wartości dodatnie.

Możemy to zapisać:

dla  $x \in \langle -5, 6 \rangle$  – funkcja przyjmuje wartości dodatnie.

Dziedziną funkcji  $f$  jest przedział  $\langle -5, 6 \rangle$ .

O funkcji  $f$  możemy powiedzieć, że ma stały znak. Dla wszystkich argumentów należących do dziedziny funkcji przyjmuje wyłącznie wartości dodatnie.

Powyższe przykłady pokazały nam, w jaki sposób możemy określić znak funkcji w przypadku, gdy funkcja opisana jest za pomocą wykresu.

W jaki sposób określimy znak funkcji, gdy jest ona opisana za pomocą wzoru?

Czy zawsze musimy najpierw naszkicować wykres tej funkcji, a następnie z wykresu odczytać znak funkcji?

Kolejne przykłady pokażą nam, że wystarczy rozwiązać odpowiednie nierówności.

**Przykład 3**

Funkcja  $f$  opisana jest za pomocą wzoru.

$$f(x) = 2x - 6, \text{ gdy } x \in \mathbb{R}.$$

Wyznamy te argumenty, dla których funkcja  $f$  przyjmuje wartości ujemne oraz te, dla których przyjmuje wartości dodatnie.

### Rozwiązanie:

Aby wyznaczyć te argumenty, dla których funkcja przyjmuje wartości ujemne należy rozwiązać nierówność  $f(x) < 0$ .

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow 2x - 6 < 0 \Leftrightarrow 2x < 6 \Leftrightarrow x < 3$$

Funkcja przyjmuje wartości ujemne dla  $x \in (-\infty, 3)$ .

Aby wyznaczyć te argumenty, dla których funkcja przyjmuje wartości dodatnie należy rozwiązać nierówność  $f(x) > 0$ .

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow 2x - 6 > 0 \Leftrightarrow 2x > 6 \Leftrightarrow x > 3$$

Funkcja przyjmuje wartości dodatnie dla  $x \in (3, \infty)$ .

### Przykład 4

Funkcja  $f$  opisana jest za pomocą wzoru.

$$f(x) = \begin{cases} |2x - 4| - 6, & \text{gdy } x < 2 \\ \sqrt{x} - 4, & \text{gdy } x \geq 2 \end{cases}$$

Określmy przedziały, w których funkcja przyjmuje wartości dodatnie oraz te, w których przyjmuje wartości ujemne.

### Rozwiązanie:

Funkcja  $f$  opisana jest za pomocą wzoru składającego się z dwóch wyrażeń.

Dla każdej części wzoru musimy rozwiązać dwie nierówności:

$$f(x) < 0 \text{ oraz } f(x) > 0.$$

$$f(x) = |2x - 4| - 6, \text{ gdy } x < 2.$$

$$|2x - 4| - 6 < 0 \Leftrightarrow |2x - 4| < 6 \Leftrightarrow -6 < 2x - 4 < 6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [(2x - 4 > -6) \wedge (2x - 4 < 6)] \Leftrightarrow [2x > -2 \wedge 2x < 10] \Leftrightarrow [x > -1 \wedge x < 5]$$

Rozwiązanie nierówności:  $x \in (-1, 5)$ . Po uwzględnieniu dziedziny otrzymujemy  $x \in (-1, 2)$ .

$$|2x - 4| - 6 > 0 \Leftrightarrow |2x - 4| > 6 \Leftrightarrow [(2x - 4 < -6) \vee (2x - 4 > 6)] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [(2x < -2) \vee (2x > 10)] \Leftrightarrow [(x < -1) \vee (x > 5)]$$

Rozwiązanie nierówności:  $x \in (-\infty, -1) \cup (5, \infty)$ . Po uwzględnieniu dziedziny otrzymujemy  $x \in (-\infty, -1)$ .

Analogicznie postępujemy z drugą częścią wzoru.

$$f(x) = \sqrt{x} - 4, \text{ gdy } x \geq 2.$$

$$\sqrt{x} - 4 > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} > 4 \Leftrightarrow x > 16$$

Rozwiązanie nierówności:  $x \in (16, \infty)$ . Po uwzględnieniu dziedziny otrzymujemy  $x \in (16, \infty)$ .

$$\sqrt{x} - 4 < 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} < 4 \Leftrightarrow x < 16$$

Rozwiązanie nierówności:  $x \in \langle 0, 16 \rangle$ . Po uwzględnieniu dziedziny otrzymujemy  $x \in \langle 2, 16 \rangle$ .

Otrzymane wyniki umieścimy w tabeli.

Przedział	Znak funkcji
$x \in (-\infty, -1)$	Funkcja przyjmuje wartości dodatnie.
$x \in (-1, 2)$	Funkcja przyjmuje wartości ujemne.
$x \in \langle 2, 16 \rangle$	Funkcja przyjmuje wartości ujemne.
$x \in (16, \infty)$	Funkcja przyjmuje wartości dodatnie.

### Ważne!

Funkcja opisana jest za pomocą wykresu, wtedy:

- funkcja przyjmuje wartości dodatnie, gdy jej wykres znajduje się nad osią  $X$
- funkcja przyjmuje wartości ujemne, gdy jej wykres znajduje się pod osią  $X$

Funkcja opisana jest za pomocą wzoru, wtedy:

- funkcja przyjmuje wartości dodatnie dla argumentów spełniających nierówność  $f(x) > 0$
- funkcja przyjmuje wartości ujemne dla argumentów spełniających nierówność  $f(x) < 0$

Funkcja ma stały znak, jeżeli dla wszystkich argumentów przyjmuje wyłącznie wartości ujemne lub wyłącznie wartości dodatnie.

## Słownik

wykres funkcji

zbiór wszystkich punktów płaszczyzny o współrzędnych  $(x, f(x))$ , w prostokątnym układzie współrzędnych, gdzie  $x$  jest elementem dziedziny tej funkcji, a  $f(x)$  jest wartością funkcji  $f$  dla argumentu  $x$

# Galeria zdjęć interaktywnych

---

## Polecenie 1

Przeanalizuj uważnie przykłady przedstawione w galerii zdjęć interaktywnych. Spróbuj je najpierw rozwiązać samodzielnie. Następnie porównaj swoje rozwiązania z przedstawionymi w galerii.

---

Po uważnym przeanalizowaniu przykładów przedstawionych w galerii, wykonaj samodzielnie poniższe polecenia.

## Polecenie 2

Funkcja  $f$  opisana jest za pomocą wzoru.

$$f(x) = x^2 + 3, \text{ gdy } x \in \mathbb{R}.$$

Wykaż, że funkcja  $f$  przyjmuje tylko wartości dodatnie dla każdego  $x \in \mathbb{R}$ .

### Polecenie 3

Funkcja  $f$  opisana jest za pomocą wzoru.

$$f(x) = \begin{cases} -x + 3, & \text{gdy } x < 3 \\ 4, & \text{gdy } x \geq 3 \end{cases}$$

Wskaż przedziały, w których funkcja przyjmuje wartości ujemne.

# Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Ćwiczenie 2



Ćwiczenie 3



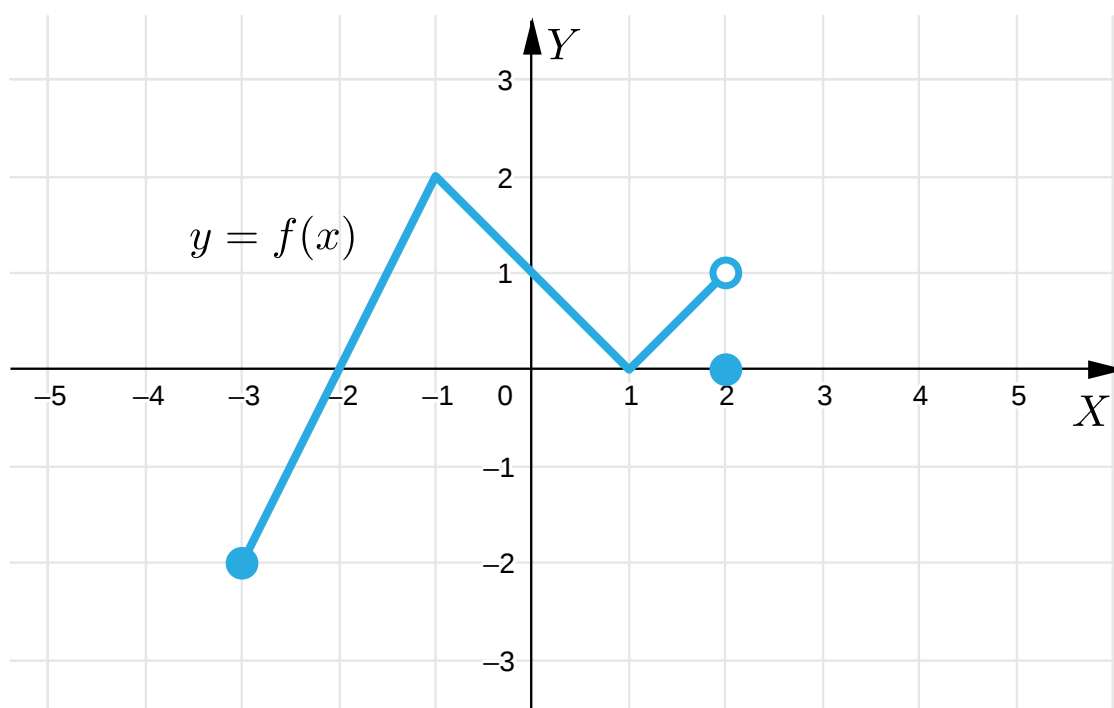
Ćwiczenie 4



Ćwiczenie 5



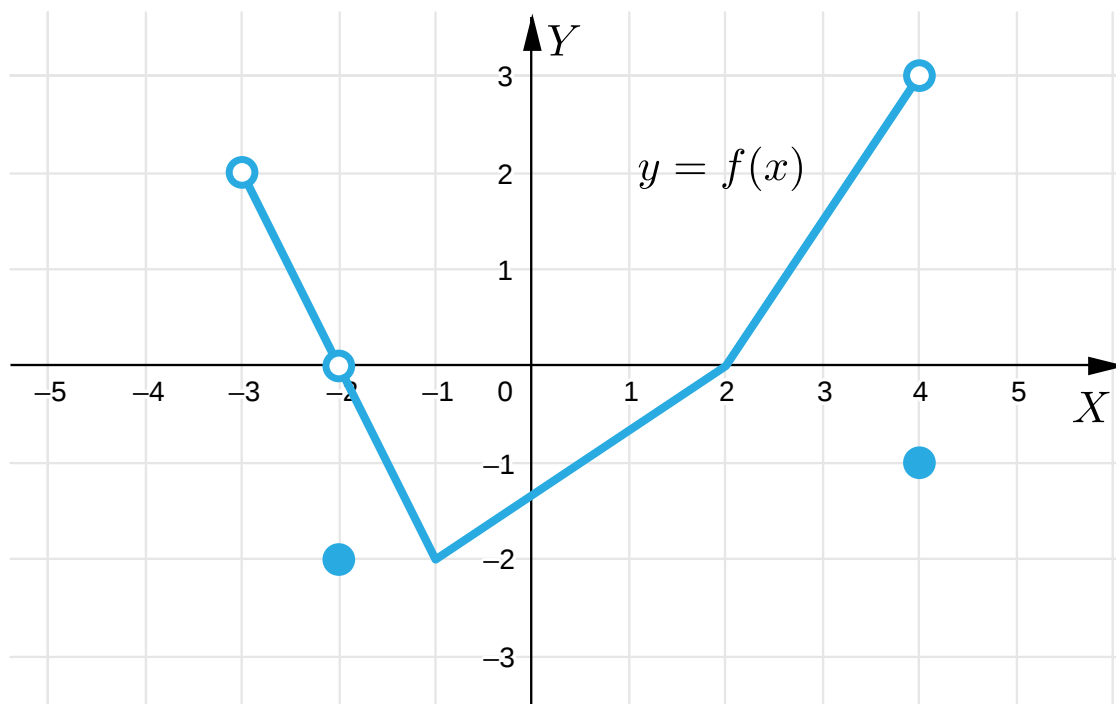
Rysunek przedstawia wykres funkcji  $f$ .



## Ćwiczenie 6



Rysunek przedstawia wykres funkcji  $f$ .



## Ćwiczenie 7



## Ćwiczenie 8



## Ćwiczenie 9



## Ćwiczenie 10



## Ćwiczenie 11



## Ćwiczenie 12



## Ćwiczenie 13



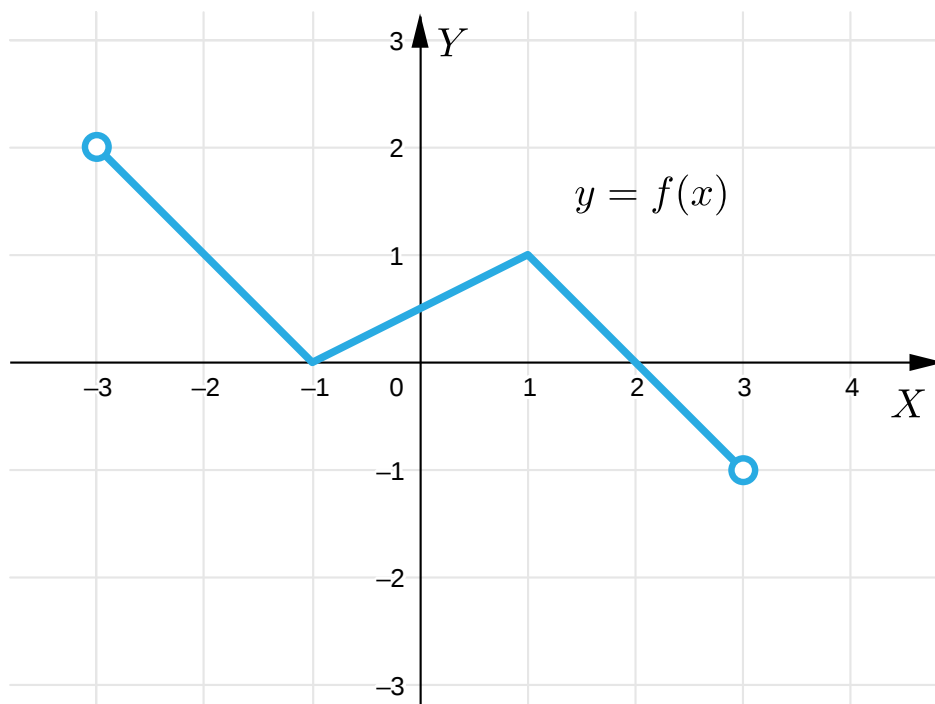
## Ćwiczenie 14



### Ćwiczenie 15



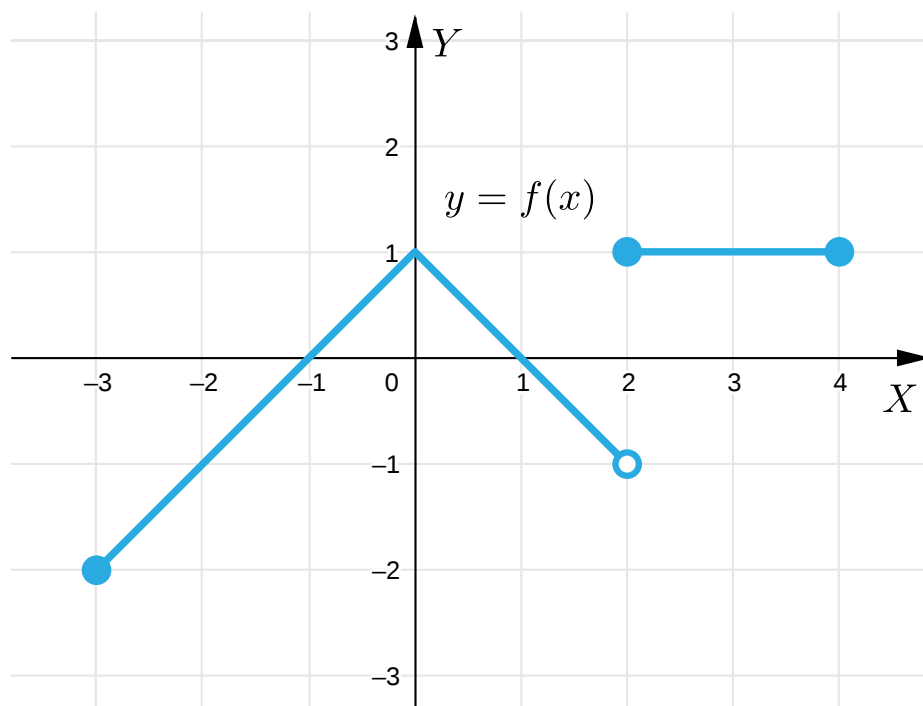
Rysunek przedstawia wykres funkcji  $f$ .



### Ćwiczenie 16



Rysunek przedstawia wykres funkcji  $f$ .



# Dla nauczyciela

---

**Autor:** Anna Jeżewska

**Przedmiot:** Matematyka

**Temat:** Znak funkcji w przedziale i sposoby jego określania

**Grupa docelowa:**

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

**Podstawa programowa:**

V. Funkcje. Zakres podstawowy.

Uczeń:

2) oblicza wartość funkcji zadanej wzorem algebraicznym.

**Kształtowane kompetencje kluczowe:**

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje w zakresie wielojęzyczności
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

**Cele operacyjne:**

Uczeń:

- wykorzystuje pojęcie znaku funkcji w przedziale w zadaniach algebraicznych
- określa znak funkcji w przedziale opisanej za pomocą wykresu oraz wzoru
- wskazuje przedział, w którym funkcja przyjmuje wartości dodatnie/ujemne

**Strategie nauczania:**

- konstruktywizm

**Metody i techniki nauczania:**

- diamentowe uszeregowanie
- dyskusja

## Formy pracy:

- praca indywidualna
- praca w parach
- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

## Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami i dostępem do Internetu, słuchawki
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda

## Przebieg lekcji

### Faza wstępna:

1. Nauczyciel podaje temat i cele lekcji oraz ustala z uczniami kryteria osiągnięcia sukcesu.
2. Uczniowie, metodą diamentowego uszeregowania, porządkują swoje wiadomości dotyczące wyznaczania dziedziny i zbioru wartości funkcji.
3. Po zakończonej pracy umieszczają swoje prace w widocznym miejscu w sali lekcyjnej.

### Faza realizacyjna:

1. Uczniowie parami analizują przykłady zamieszczone w sekcji „Przeczytaj”.
2. Po upływie wyznaczonego czasu łączą się w większe grupy i porównują uzyskane wiadomości.
3. Uczniowie oglądają galerię zdjęć interaktywnych przedstawiającą sposoby określania znaku funkcji i rozwiązują samodzielnie wskazane polecenia.
4. Uczniowie wykonują ćwiczenia interaktywne wskazane przez nauczyciela i wspólnie omawiają odpowiedzi.

### Faza podsumowująca:

1. Jeden z uczniów podsumowuje zajęcia, zwracając uwagę na nabyte umiejętności.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazując na mocne i słabe strony pracy uczniów.
3. Nauczyciel ocenia indywidualną pracę i zaangażowanie poszczególnych uczniów.

### Praca domowa:

1. Uczniowie rozwiązują w domu ćwiczenia, których nie rozwiązywali w czasie zajęć.
2. Zadanie dla chętnych:  
Wyznacz przedziały, w których funkcja przyjmuje wartości dodatnie. Funkcja  $f$  opisana jest za pomocą wzoru  $f(x) = x^3 - 2$ , gdy  $x \in \mathbb{R}$ .

## **Materiały pomocnicze:**

[Funkcja i jej własności](#)

## **Wskazówki metodyczne:**

Nauczyciel może wykorzystać galerię zdjęć interaktywnych do pracy w parach lub w grupach. Galerię można wykorzystać też na lekcji podsumowującej własności funkcji.