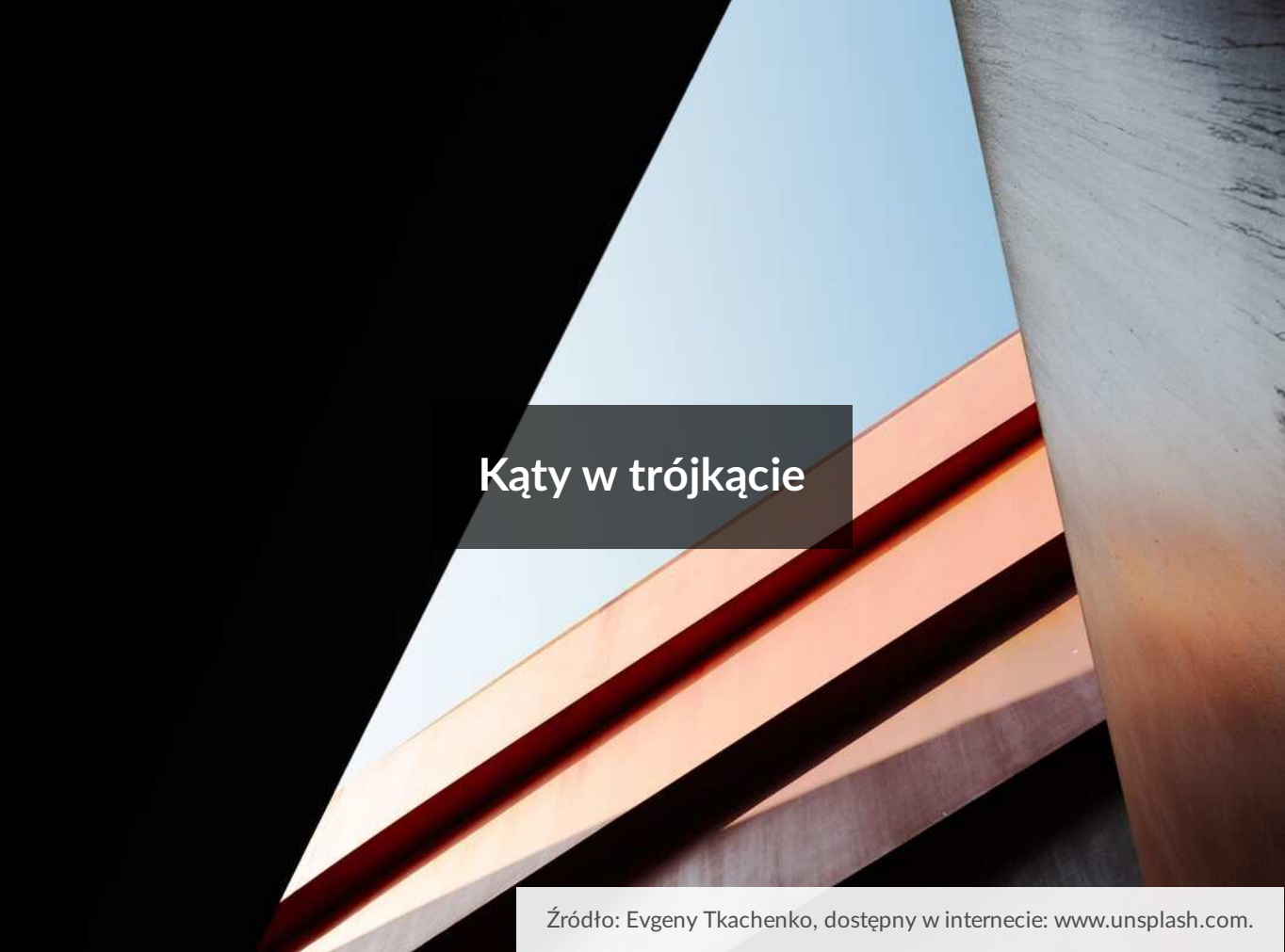




Kąty w trójkącie

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Prezentacja multimedialna](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Kąty w trójkącie

Źródło: Evgeny Tkachenko, dostępny w internecie: www.unsplash.com.

Kąty w trójkącie towarzyszą nam od początku nauki geometrii. Zagadnienie związane jest z podziałem trójkątów, np. ostrokątne, prostokątne, rozwartokątne, równoramienne poznajemy w szkole podstawowej. W szkole średniej, w przypadku trójkątów prostokątnych dodatkowo opisujemy proporcje boków w zależności od jednego z kątów ostrych wprowadzając funkcje trygonometryczne. Jednak to nie powyższe zagadnienia sprawiają najwięcej problemów uczniom. Najwięcej problemów w geometrii sprawia przejście od zadań rachunkowych do zadań na dowodzenie. W programie szkolnym nie jest przewidziane badanie, które z faktów geometrycznych możemy uznać za oczywiste (aksjomat), a które należy udowodnić. To już sprawia, że uczeń ma prawo nie rozumieć kiedy jakiś wniosek w dowodzie musi uzasadnić, a kiedy może uznać za oczywisty. Jednym z pierwszych i najważniejszych (dowodzonych) w szkole twierdzeń jest fakt, że suma miar kątów w trójkącie jest równa kątowi półpełnemu. Zaskakujące, jak dużo niebanalnych zadań można rozwiązać powołując się praktycznie tylko na to twierdzenie. Podczas tej lekcji będziemy odwoływać się tylko do najbardziej podstawowych faktów geometrii płaskiej.

Twoje cele

- Poznasz dowód twierdzenia o sumie kątów w trójkącie.
- Wyznaczysz sumę miar kątów wewnętrznych i zewnętrznych w wielokącie.
- Wyznaczysz miary kątów w pewnej grupie, charakterystycznych trójkątów.

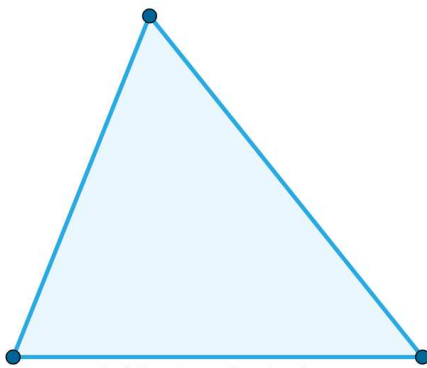
- Zastosujesz poznane fakty i twierdzenia do rozwiązywania zadań geometrycznych.

Przeczytaj

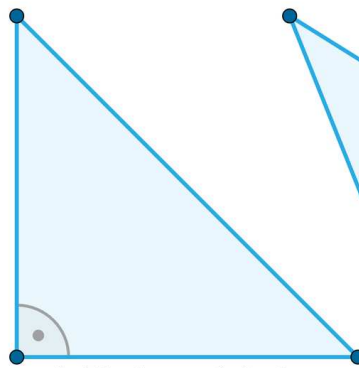
Podział trójkątów ze względu na kąty

Trójkąty możemy klasyfikować ze względu na ich kąty:

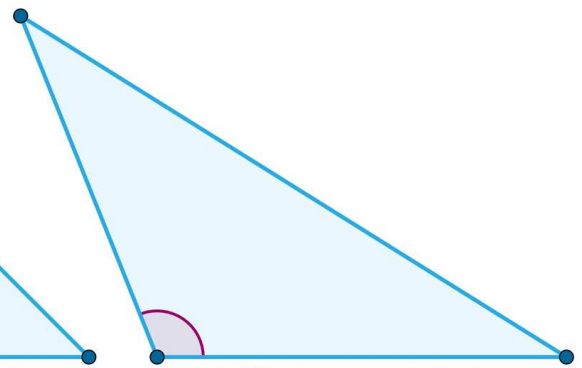
- **trójkąt ostrokątny** ma wszystkie kąty ostre,
- **trójkąt prostokątny** ma jeden kąt prosty,
- **trójkąt rozwartokątny** ma jeden kąt rozwarty.



trójkąt ostrokątny



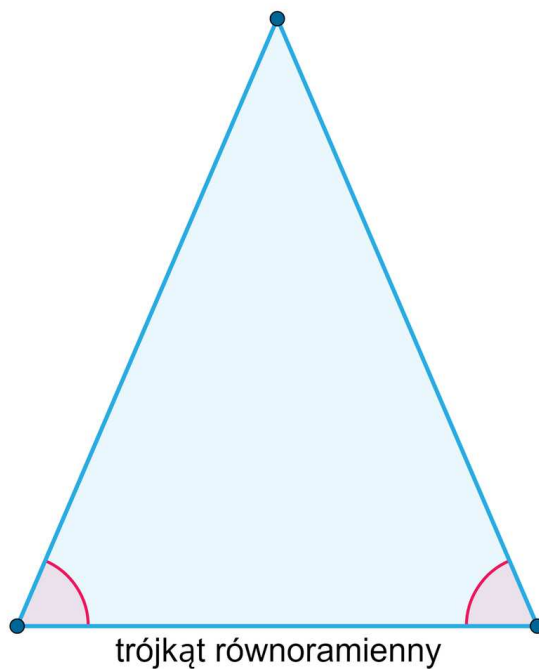
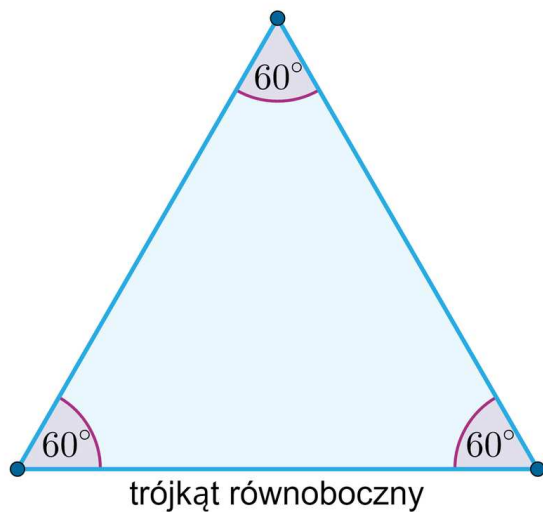
trójkąt prostokątny



trójkąt rozwartokątny

oraz długość boków:

- **trójkąt równoboczny** – trójkąt, którego wszystkie boki mają taką samą długość, szczególny przypadek trójkąta równoramiennego; jest przykładem wielokąta foremnego,
- **trójkąt równoramienny** – trójkąt o (co najmniej) dwóch bokach równej długości; te dwa boki zwane są ramionami trójkąta, trzeci bok jego podstawą. Kąty przy podstawie są przystające, a ich miara jest mniejsza od miary kąta prostego.

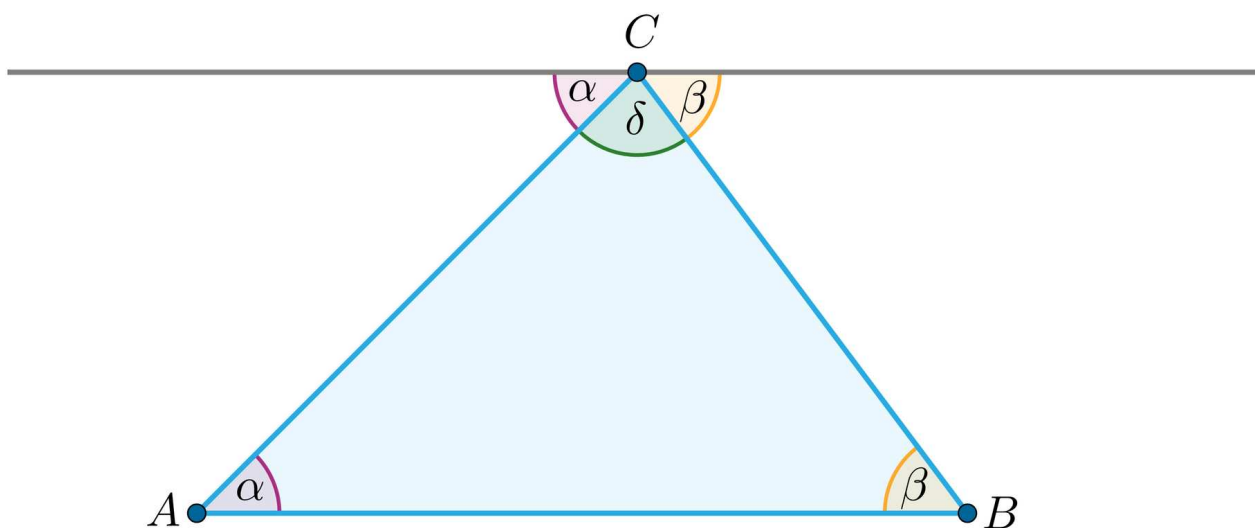


Twierdzenie: suma miar kątów wewnętrznych trójkąta

Suma miar kątów wewnętrznych trójkąta jest równa 180° .

Dowód

Rozpatrzmy trójkąt ABC . Narysujmy prostą przechodzącą przez wierzchołek C i równoległą do odcinka AB .

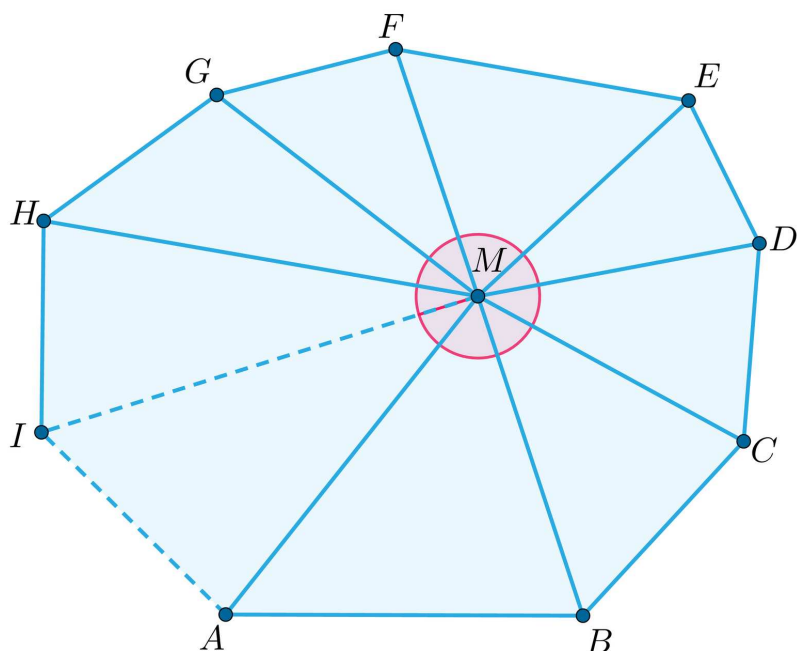


Z faktu, że kąty naprzemianległe mają równe miary, otrzymujemy $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$.

Przykład 1

Uzasadnimy, że suma miar kątów wewnętrznych n -kąta wypukłego jest równa $(n - 2) \cdot 180^\circ$.

Rozwiązanie



Obierzmy wewnątrz wielokąta punkt M . Łączymy ten punkt z kolejnymi wierzchołkami n -kąta. Otrzymujemy n trójkątów o wierzchołku M . Jeśli od sumy miar kątów wewnętrznych we wszystkich trójkątach odejmiemy **kąt** pełny przy wierzchołku M , to otrzymamy sumę miar kątów wewnętrznych n -kąta wypukłego równą $n \cdot 180^\circ - 360^\circ = (n - 2) \cdot 180^\circ$.

Uwaga!

Twierdzenie powyższe jest również prawdziwe w przypadku wielokątów wklęsłych. Jednak powyższy dowód, jak i wiele innych przytaczanych w podręcznikach do szkoły ponadpodstawowej, wymaga uzupełnienia.

Wniosek:

Miara kąta wewnętrznego w n -kącie foremnym jest równa

$$\frac{(n-2) \cdot 180^\circ}{n}.$$

Teraz przekonamy się, że przytaczany wyżej dowód na sumę miar kątów wewnętrznych w wielokącie wypukłym w przypadku wielokąta wklęsłego rzeczywiście wymaga uzupełnienia.

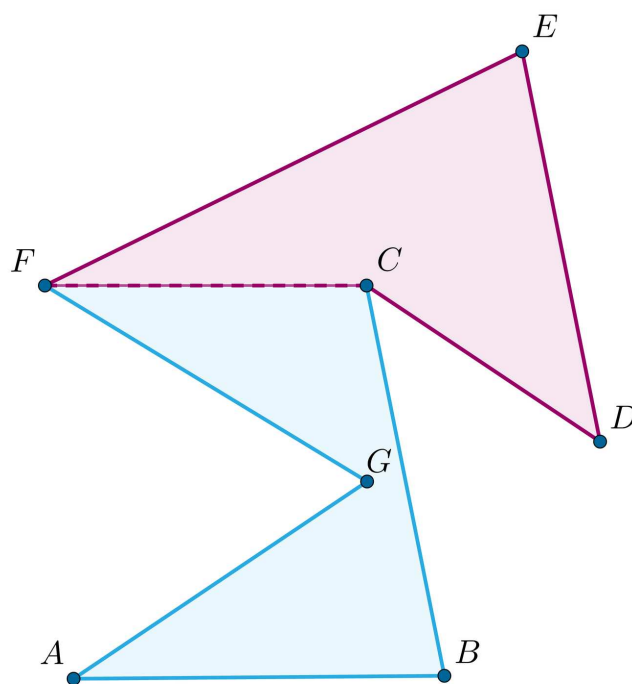
Przykład 2

Podamy przykład wielokąta, dla którego nie istnieje taki punkt M w jego wnętrzu, że odcinki łączące go z wierzchołkami znajdujące się wewnątrz tego wielokąta, dzielą ten wielokąt na trójkąty.

Rozwiązanie

Przypomnijmy, że przytoczony dowód na sumę miar kątów wewnętrznych w n -kącie opierał się na zsumowaniu kątów wewnętrznych wszystkich trójkątów o wspólnym wierzchołku M .

Rozważmy wielokąt:



Jeżeli wybierzemy punkt M , który znajduje się pod odcinkiem CF (lub na nim), to widzimy, że nie istnieje wewnątrz tego wielokąta trójkąt MCD . Gdy wybierzemy punkt M , który znajduje się nad odcinkiem CF (lub na nim), wówczas wewnątrz tego wielokąta nie istnieje trójkąt MAB .

Powyższy przykład pokazuje, że rozumowania z poprzedniego przykładu nie możemy zastosować do dowolnego wielokąta.

Przykład 3

Wyznamy sumę miar **kątów zewnętrznych** w trójkącie, czworokącie, n -kącie.

Rozwiązanie

Pokażemy, że suma ta nie zależy od liczby wierzchołków wielokąta wypukłego. Suma kąta wewnętrznego i jednego przyległego do niego kąta zewnętrznego jest równa 180° .

Pamiętajmy, że do kąta wewnętrznego przylegają dwa kąty zewnętrzne. Wnioskujemy stąd, że suma kątów wewnętrznych i połowy wszystkich kątów zewnętrznych w n -kącie jest równa $n \cdot 180^\circ$. Ponadto znamy już wzór na sumę kątów wewnętrznych:

$(n - 2) \cdot 180^\circ$. Zatem suma wszystkich kątów zewnętrznych jest równa $2 \cdot [n \cdot 180^\circ - (n - 2) \cdot 180^\circ] = 2 \cdot 360^\circ = 720^\circ$.

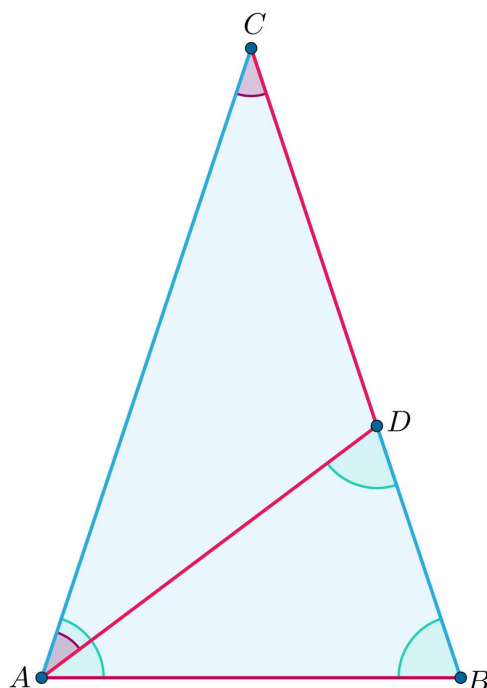
Inny, bardzo ładny dowód powyższego faktu, opiera się na pojęciu kąta skierowanego, czyli takiego, w którym rozróżniamy kolejność ramion kąta. Można sobie wyobrazić, że „spacerując” po obwodzie wielokąta w każdym wierzchołku skręcamy o kąt, którego miara jest równa kątowi zewnętrznemu. Oczywiście przechodząc cały obwód i wracając do punktu wyjścia obrócimy się o kąt 360° . Powtarzając spacer w przeciwnym kierunku również obrócimy się o kąt 360° . Zatem suma wszystkich kątów zewnętrznych w n -kącie wypukłym wynosi 720° .

Przykłady zadań związanych z wyznaczaniem miar kątów w trójkącie

Przykład 4

Trójkąt równoramienny ABC , w którym $|AC| = |BC|$ rozcięto odcinkiem AD na dwa trójkąty równoramienne BDA i CAD tak, że $|AB| = |AD| = |CD|$. Wyznamy miary kątów trójkąta ABC .

Rozwiązanie



Oznaczmy przez α kąt przy wierzchołku C . Z założeń wiemy, że $|\angle CAD| = |\angle ACD| = \alpha$, więc $|\angle ADC| = 180^\circ - 2\alpha$. Kąt ADB jest przyległy do kąta

ADC , więc jego miara jest równa 2α . Ponadto, z warunków zadania wiemy, że $|\sphericalangle ADB| = |\sphericalangle ABD| = |\sphericalangle BAC| = 2\alpha$. Teraz wystarczy, że zsumujemy kąty wewnętrzne w trójkącie ABC lub ABD i otrzymujemy $\alpha + 2\alpha + 2\alpha = 180^\circ$, czyli: $5\alpha = 180^\circ$. Ostatecznie otrzymujemy $72^\circ, 72^\circ, 36^\circ$.

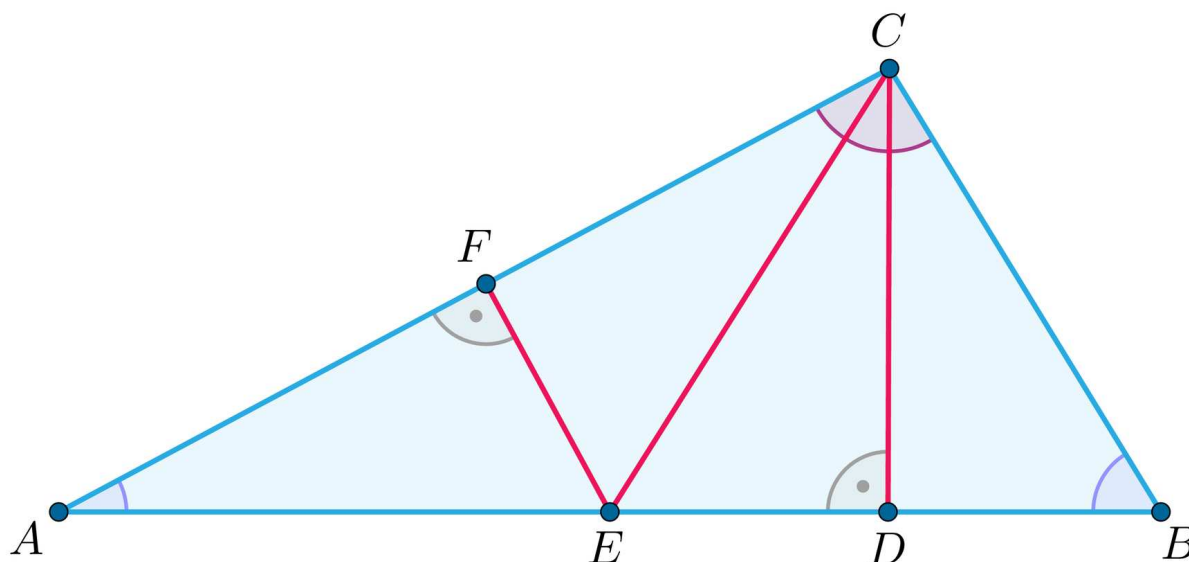
Przykład 5

W trójkącie ABC środkowa i wysokość opuszczone z wierzchołka C dzielą ten kąt na trzy równe części. Wyznamy miary kątów tego trójkąta.

Rozwiązanie

Oznaczmy spodek wysokości przez D , a punkt przecięcia środkowej z odcinkiem AB przez E .

Z punktu E prowadzimy prostopadłą do boku AC . Ich przecięcie oznaczamy przez F .



Trójkąty BDC , EDC są prostokątne, ponadto mają wspólny odpowiadający bok i równe kąty ($\sphericalangle ECD = \sphericalangle DCB$), więc są przystające (**kbk**). Podobnie trójkąty EDC i EFC ($\sphericalangle ECD = \sphericalangle FCE$). Zatem $|EF| = |ED| = |DB| = \frac{1}{2}|EB| = \frac{1}{2}|AE|$.

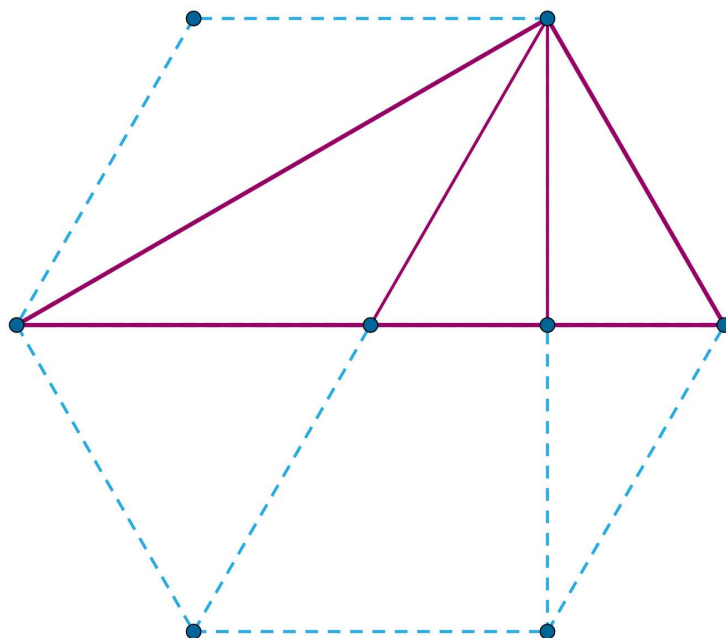
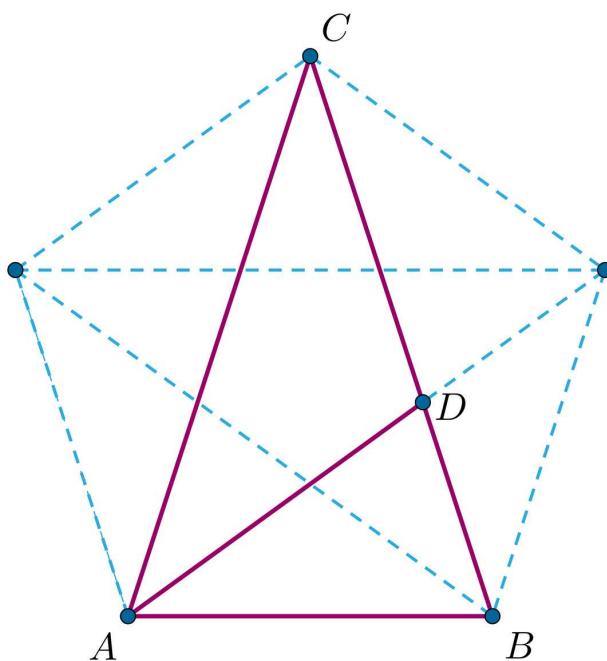
Wynika z tego, że trójkąt AEF jest połową trójkąta równobocznego o boku AE . Zatem $|\sphericalangle EAF| = |\sphericalangle BAC| = 30^\circ$

$$|\sphericalangle BEF| = 120^\circ \quad |\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle DEC| = |\sphericalangle CEF| = \frac{1}{2} \cdot 120^\circ = 60^\circ$$

$$|\sphericalangle ACB| = 90^\circ.$$

Ciekawostka

Rysunki do powyższych dwóch przykładów to wybrane wierzchołki, boki lub przekątne pewnych wielokątów foremnych. Powyższa obserwacja może nam znacząco ułatwić zarówno konstrukcję założeń zadania, jak i odkrywanie zależności niezbędnych do jego rozwiązania.



Słownik

trójkąt

figura wyznaczona przez trzy punkty nieleżące na jednej prostej, każdy z tych punktów jest wierzchołkiem trójkąta a odcinki łączące wierzchołki nazywamy bokami

kąt

obszar powstały z rozcięcia płaszczyzny przez sumę dwóch różnych półprostych o wspólnym początku, wraz z tymi półprostymi; półproste nazywane są ramionami kąta, wspólny początek półprostych nazywany jest wierzchołkiem kąta

kąt zewnętrzny

kąt przyległy do danego kąta wewnętrznego wielokąta; jeżeli dany kąt wewnętrzny w pewnym wierzchołku wielokąta nie jest wypukły, to nie istnieje kąt zewnętrzny do niego w tym wierzchołku

Prezentacja multimedialna

Polecenie 1

Zapoznaj się z dowodami przedstawionymi w prezentacji multimedialnej.

Polecenie 2

Dany jest trójkąt ABC . Kąt przyległy do kąta CAB ma miarę 3 razy większą od miary kąta CBA . Udowodnij, że $|\sphericalangle ACB| = 2 \cdot |\sphericalangle CBA|$

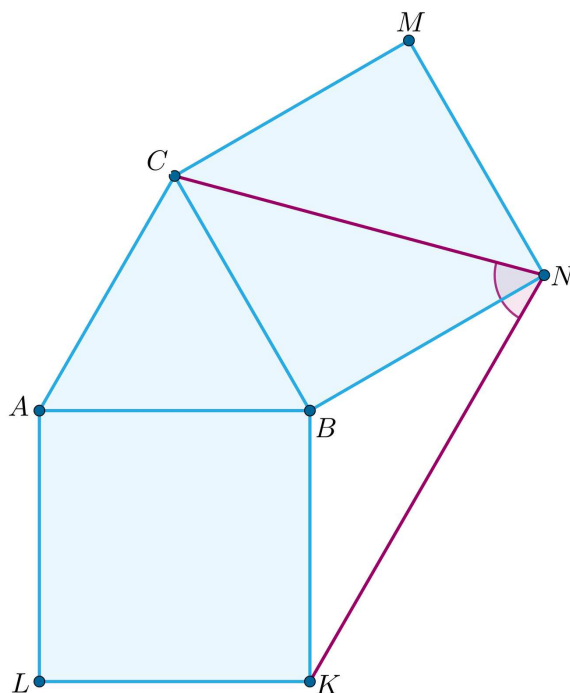
Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Na bokach AB i BC trójkąta równobocznego ABC zbudowano kwadraty $ALKB$ i $BNMC$.



Zaznacz poprawną odpowiedź. Jaka jest miara kąta CNK ?

☐ 60°

☐ 75°

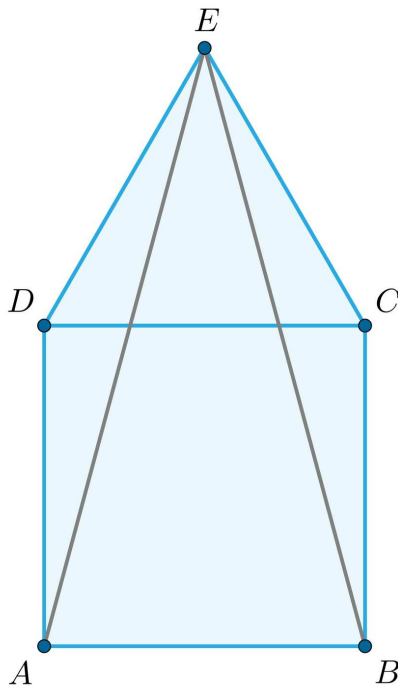
☐ 90°

☐ 45°

Ćwiczenie 2



Na płaszczyźnie dany jest kwadrat $ABCD$ i trójkąt równoboczny DCE , którego wnętrze jest na zewnątrz kwadratu.



Wskaż zdania prawdziwe.

☐ $|\sphericalangle EAB| = 70^\circ$

☐ $|\sphericalangle AEB| = 20^\circ$

☐ $|\sphericalangle EAD| = 15^\circ$

☐ $|\sphericalangle EDA| = 150^\circ$

Ćwiczenie 3

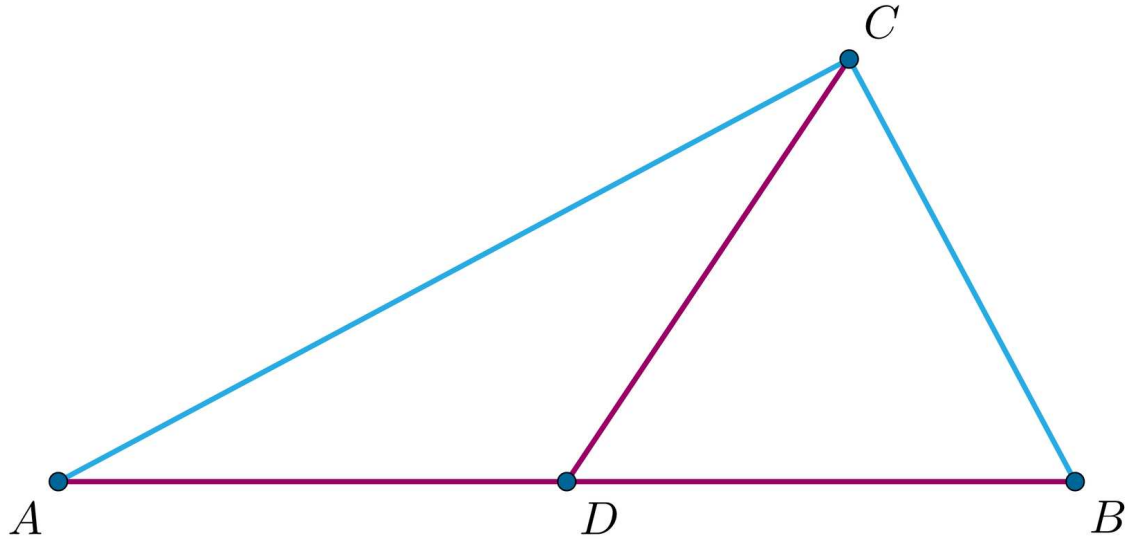


Udowodnij, że w każdym trójkącie istnieje kąt, który ma miarę nie mniejszą niż 60° .

Ćwiczenie 4



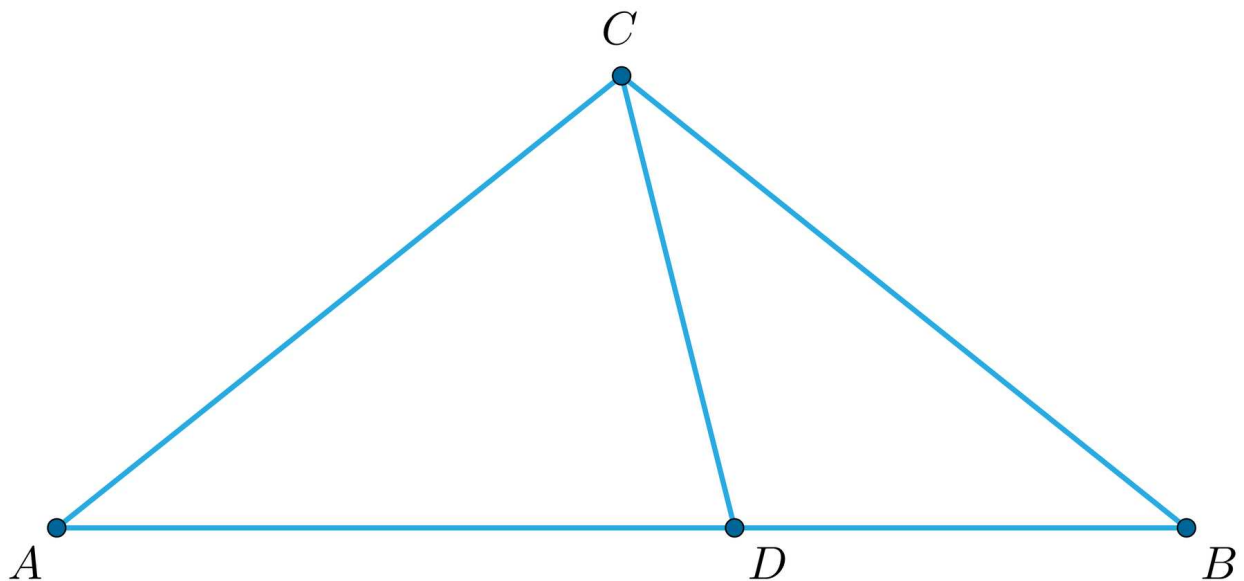
Udowodnij, że jeżeli środkowa trójkąta ma długość równą połowie długości boku, do którego została poprowadzona, to trójkąt jest prostokątny.



Ćwiczenie 5



Trójkąt równoramienny ABC , w którym $|AC| = |BC|$, rozcięto odcinkiem CD na dwa trójkąty równoramienne DCA i BCD tak, że $|AC| = |AD|$ oraz $|CD| = |BD|$. Wyznacz miarę kąta CAB .



Ćwiczenie 6



Wykaż, że w trójkącie prostokątnym dwusieczna kąta prostego jest dwusieczną kąta utworzonego przez wysokość i środkową, poprowadzone z wierzchołka kąta prostego.

Ćwiczenie 7



Dwusieczne kątów BAC oraz BCA trójkąta ABC przecinają się w punkcie I . Wiedząc, że $|\sphericalangle AIB| = \delta$, wyznacz miarę kąta ACB . Uporządkuj etapy rozwiązania.

Uwzględniając, że $\alpha + \beta = 360^\circ - 2\delta$, otrzymujemy
 $|\sphericalangle ACB| = 180^\circ - (\alpha + \beta) = 2\delta - 180^\circ$.



Stosując twierdzenie o sumie kątów w trójkącie ABI , otrzymujemy
 $\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \delta = 180^\circ$.



Oznaczmy kąty przy wierzchołkach A i B odpowiednio $|\sphericalangle BAC| = \alpha$ i
 $|\sphericalangle ABC| = \beta$.



Stosując twierdzenie o sumie kątów w trójkącie ABC , otrzymujemy
 $\alpha + \beta + |\sphericalangle ACB| = 180^\circ$.



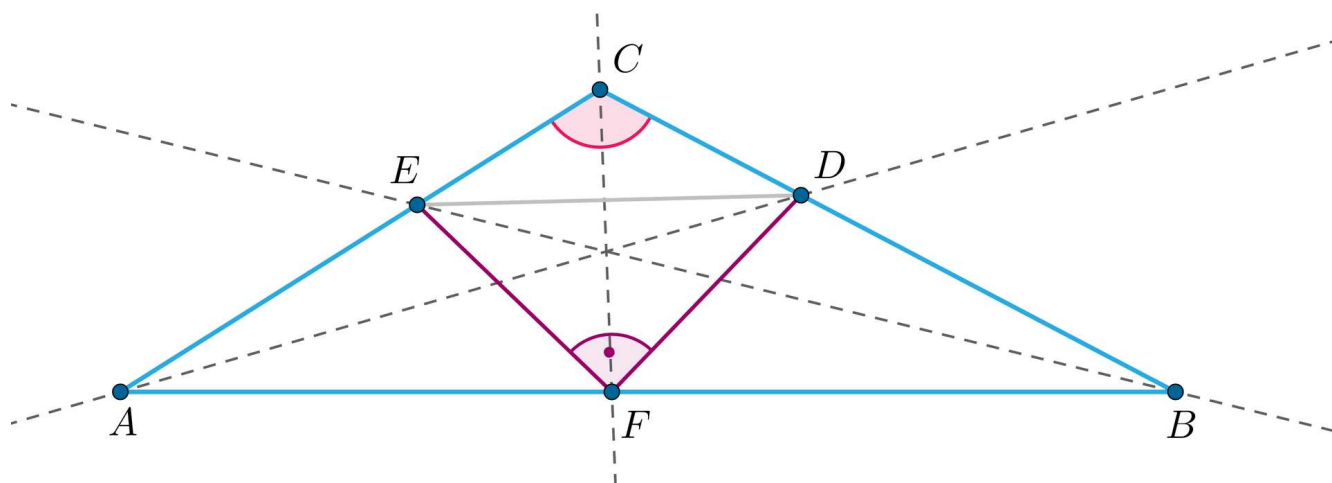
Po przekształceniu uzyskujemy, że $\alpha + \beta = 360^\circ - 2\delta$.



Ćwiczenie 8



Udowodnij, że w trójkącie, w którym jeden z kątów ma miarę 120° spodki dwusiecznych są wierzchołkami trójkąta prostokątnego.



Dla nauczyciela

Autor: Paweł Dziuba

Przedmiot: Matematyka

Temat: Kąty w trójkącie

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

VIII. Planimetria. Zakres podstawowy. Uczeń:

2. rozpoznaje trójkąty ostrokątne, prostokątne i rozwartokątne przy danych długościach boków (m.in. stosuje twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa i twierdzenie cosinusów); stosuje twierdzenie: w trójkącie naprzeciw większego kąta wewnętrznego leży dłuższy bok;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- udawadnia twierdzenia o sumie kątów w trójkącie,
- wyznacza sumę miar kątów wewnętrznych i zewnętrznych w wielokącie,
- wyznacza miary kątów w pewnej grupie, charakterystycznych trójkątów,
- stosuje poznane fakty i twierdzenia do rozwiązywania zadań geometrycznych.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm
- konektywizm

Metody i techniki nauczania:

- metoda tekstu przewodniego
- metoda myszy i kota
- dyskusja

Formy pracy:

- praca indywidualna
- praca w grupach
- praca całego zespołu

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do internetu,
- projektor multimedialny,
- e-podręcznik,
- arkusze papieru, pisaki

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

- Nauczyciel wprowadza uczniów w temat lekcji: Kąty w trójkącie.
- Następnie uczniowie tworzą mapy myśli zawierającą klasyfikację trójkątów.
- Nauczyciel podaje cele lekcji, a uczniowie proponują kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

- Uczniowie w parach zapoznają się z treścią sekcji „Przeczytaj”, a następnie z przykładami przedstawionymi w prezentacji multimedialnej.
- Następnie metodą kot i mysz rozwiązują ćwiczenia interaktywne w sekcji „Sprawdź się”. Mysz stara się jak najlepiej rozwiązać zadania, a kot sprawdza ich poprawność. Po dwóch nieudanych próbach kot „łapie mysz”, która odpada z gry. Aby gra toczyła się dalej – role uczniów odwracają się i mysz staje się kotem – procedura się powtarza.

Faza podsumowująca:

- Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
- Wybrany uczeń podsumowuje zajęcia, zwracając uwagę na nabyte umiejętności.

Praca domowa:

- Zadanie dla kolegi/koleżanki. Uczniowie dobierają się w pary i opracowują zadania analogiczne do ćwiczeń 1 i 2 z sekcji „Sprawdź się”. Następnie przesyłają je do siebie mailem, rozwiązują i na następnej lekcji porównują wyniki.

Materiały pomocnicze:

- [Trójkąty i ich własności](#)
- [Własności i rodzaje trójkątów](#)

Wskazówki metodyczne:

Prezentacja multimedialna może być wykorzystana na lekcji jako podsumowanie i utrwalenie wiedzy na temat „Kąty w trójkącie”.