Jak obliczyć granicę funkcji w punkcie, korzystając z definicji Heinego?

Jak obliczyć granicę funkcji w punkcie, korzystając z definicji Heinego?

Źródło: dostępny w internecie: pixabay.com, domena publiczna.

Definicja Heinego granicy funkcji w punkcie opiera się o pojęcie granicy ciągu nieskończonego. Dlatego definicja ta może być użyta do obliczania granic pewnych funkcji w oparciu o twierdzenie o arytmetyce granic ciągów zbieżnych. Temat ten poświęcimy przedstawieniu przykładów obliczania granic funkcji w oparciu o definicję Heinego.

> **Twoje cele**
>
> - Obliczysz granicę wielomianów w punkcie, korzystając z definicji granicy według Heinego.
> - Obliczysz granicę funkcji wymiernych w punkcie, korzystając z definicji granicy według Heinego.
> - Obliczysz granicę innych funkcji elementarnych, korzystając z definicji granicy według Heinego.

Przeczytaj

Na początek przypomnijmy sobie definicję granicy funkcji w punkcie według Heinego. Niech $f : D_f \to \mathbb{R}$ oznacza funkcję, której dziedziną jest zbiór $D_f \subset \mathbb{R}$. Liczbę $g \in \mathbb{R}$ nazywamy granicą funkji f według Heinego w punkcie $x_0 \in \mathbb{R}$, jeśli dla dowolnego ciągu argumentów funkcji f o wyrazach różnych od x_0 oraz zbieżnego do x_0, ciąg wartości $f(x_n)$ jes zbieżny do liczby g.

Granica wielomianu w punkcie

Przykład 1

Obliczymy granicę wielomianu $W(x) = x^3 - x^2 + 3x - 2$ w punkcie $x_0 = 2$. W tym celu bierzemy dowolny ciąg argumentów (x_n) wielomianu W zbieżny do liczby 2, którego wyrazy są różne od 2. Obliczymy granicę ciągu wartości $(W(x_n))$. Mamy

$$\lim_{n\to+\infty} W(x_n) = \lim_{n\to+\infty} \left(x_n^3 - x_n^2 + 3x_n - 2\right).$$

Korzystając z twierdzenia o iloczynie granic ciągów zbieżnych oraz faktu, że $\lim_{n\to+\infty} x_n = 2$ otrzymujemy kolejno

- $\lim_{n\to+\infty} x_n^3 = \lim_{n\to+\infty}(x_n \cdot x_n \cdot x_n) = 2^3 = 8,$
- $\lim_{n\to+\infty} x_n^2 = \lim_{n\to+\infty}(x_n \cdot x_n) = 2^2 = 4,$
- $\lim_{n\to+\infty}(3x_n) = 3 \cdot \lim_{n\to+\infty} x_n = 3 \cdot 2 = 6.$

Z powyższych równości oraz z twierdzenia o sumie i różnicy granic ciągów zbieżnych mamy ostatecznie

$$\lim_{n\to+\infty} W(x_n) = \lim_{n\to+\infty}\left(x_n^3 - x_n^2 + 3x_n - 2\right) = 8 - 4 + 6 - 2 = 8.$$

Z dowolności wyboru ciągu (x_n) zbieżnego do 2, otrzymujemy

$$\lim_{x\to 2} W(x) = 8.$$

Zauważmy, że w powyższym przykładzie granica wielomianu $W(x)$ w punkcie 2 jest równa wartości tego wialomianu w tym punkcie. Okazuje się, że nie jest to przypadek i własność ta jest prawdziwa dla granicy dowolnego wielomainu w dowolnym punkcie. Możemy to sformułować następująco

Własność: Granica wielomianu w punkcie

Jeżeli $W : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest wielomianem stopnia $n \in \mathbb{N}$ oraz $x_0 \in \mathbb{R}$, to

$$\lim_{x\to x_0} W(x) = W(x_0).$$

Dowód powyższej własności opiera się na wykorzystaniu twierdzenia o arytmetyce granic ciągów zbieżnych i przebiega analogicznie do sposobu w jaki obliczyliśmy granicę w przykładzie 1.

Ciekawostka

Wielomiany nie są jedynymi funkcjami o powyższej własności. Funkcje, które posiadają granicę w punkcie x_0 równą $f(x_0)$ (tzn. równą wartości funkcji w tym punkcie) nazywamy funkcjami ciągłymi w punkcie x_0.

Przykład 2

Obliczymy granicę

$$\lim_{x \to -2} W(x),$$

gdzie

$$W(x) = x^4 + 2x^3 - 3x - 5.$$

Na mocy powyższej własności

$$\lim_{x \to -2} W(x) = W(-2) = 16 - 16 + 6 - 5 = 1.$$

Granica funkcji wymiernej w punkcie

Przykład 3

Obliczymy granicę funkcji $f(x) = \frac{x^2+3x-4}{x+2}$ w punkcie $x_0 = 1$. Zgodnie z definicją Heinego weźmy dowolny ciąg argumentów (x_n) funkcji f zbieżny do 1, którego wyrazy są różne od 1. Obliczymy granicę ciągu wartości $f(x_n)$. Z twierdzenia o iloczynie granic ciągów zbieżnych oraz faktu, że $\lim_{n \to +\infty} x_n = 1$ mamy kolejno

- $\lim_{n \to +\infty} x_n^2 = \lim_{n \to +\infty} (x_n \cdot x_n) = 1 \cdot 1 = 1,$
- $\lim_{n \to +\infty} (3x_n) = 3 \lim_{n \to +\infty} (x_n) = 3 \cdot 1 = 3.$

Stąd oraz z twierdzenia o sumie i różnicy ciągów zbieżnych

$$\lim_{n \to +\infty} \left(x_n^2 + 3x_n - 4\right) = 1 + 3 - 4 = 0.$$

Ponieważ

$$\lim_{n \to +\infty} (x_n + 2) = \lim_{n \to +\infty} x_n + 2 = 1 + 2 = 3,$$

więc z twierdzenia o ilorazie ciągów zbieżnych otrzymujemy ostatecznie

$$\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = \lim_{n \to +\infty} \frac{x_n^2+3x_n-4}{x_n+2} = \frac{0}{3} = 0.$$

Ponieważ ciąg (x_n) był dowolnym ciągiem argumentów zbieżnym do 1 więc z definicji Heinego granicy funkcji w punkcie

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 0.$$

Punkt w którym obliczamy granicę funkcji, nie musi należec do dziedziny tej funkcji. Spójrzmy na kolejny przykład.

Przykład 4

Obliczymy granicę funkcji $f(x) = \frac{x^2+x-6}{x+3}$ w punkcie $x_0 = -3$, który nie należy do dziedziny tej funkcji. Weźmy dowolny ciąg argumentów (x_n) funkcji f zbieżny do (-3). Z faktu, że jest to ciąg argumentów wynika wprost, że wyrazy tego ciągu są różne od (-3). Wyznaczymy pierwiastki licznika funkcji f. Ponieważ $\Delta = 1 + 24 = 25$, więc

$$x_1 = \frac{-1-5}{2} = -3,\ x_2 = \frac{-1+5}{2} = 2.$$

Licznik funkcji f możemy zatem zapisać w postaci iloczynowej

$$x^2 + x - 6 = (x+3)(x-2).$$

Stąd

$$f(x_n) = \frac{x_n^2+x_n-6}{x_n+3} = \frac{(x_n+3)(x_n-2)}{x_n+3} = x_n - 2.$$

Ponieważ $\lim_{n\to+\infty} x_n = -3$, więc

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \lim_{n\to+\infty}(x_n - 2) = -3 - 2 = -5.$$

Z definicji Heinego granicy fumkcji w punkcie wynika zatem, że

$$\lim_{x\to -3} f(x) = -5.$$

Granice innych typów funkcji w punkcie

Prawdziwa jest poniższa własność.

Własność: Granica ciągu $\sqrt{x_n}$

Jeżeli ciąg (x_n) jest zbieżny do granicy $g \in \langle 0, +\infty)$ oraz $x_n \geqslant 0$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$, to wówczas ciąg $(\sqrt{x_n})$ jest zbeżny do granicy $\sqrt{g}$.

Powyższą własność można uogólnić na pierwiastek stopnia trzeciego

Własność: Granica ciągu $\sqrt[3]{x_n}$

Jeżeli ciąg (x_n) jest zbieżny do granicy $g \in \mathbb{R}$, to wówczas ciąg $(\sqrt[3]{x_n})$ jest zbeżny do granicy $\sqrt[3]{g}$.

Ciekawostka

Powyższe własności możemy uogólnić na pierwiastki dowolnych stopni pamiętając, że pierwiastki stopni parzystych możemy obliczyć jedynie dla liczb większych lub równych zero a pierwiastki stopni nieparzystych możemy obliczyć dla każdej liczby rzeczywistej.
Przykład 5

Obliczymy granicę funkcji $f(x) = \frac{6}{\sqrt[3]{x^2-9}}$ w punkcie $x_0 = -1$, korzystając z definicji Heinego. Dziedziną funkcji f jest zbiór $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$. Weźmy dowolny ciąg argumentów (x_n) funkcji f zbieżny do (-1), którego wszystkie wyrazy są różne od (-1). Stąd i z twierdzenia o arytmetyce granic ciągów zbieżnych otrzymujemy

$$\lim_{n\to+\infty}\left(x_n^2 - 9\right) = \lim_{n\to+\infty}(x_n \cdot x_n) - 9 = 1 - 9 = -8.$$

Zatem

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[3]{x_n^2-9} = \sqrt[3]{-8} = -2.$$

Ostatecznie z twierdzenia o granicy ilorazu ciągów zbieżnych mamy

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{6}{\sqrt[3]{x_n^2-9}} = \frac{6}{-2} = -3.$$

Ponieważ ciąg wartości funkcji jest zbieżny do tej samej granicy niezależnie od wyboru ciągu (x_n), więc na mocy definicji granicy Heinego funkcji w punkcie otrzymujemy, że

$$\lim_{x\to-1} \frac{6}{\sqrt[3]{x^2-9}} = -3.$$

Słownik

ciąg argumentów funkcji

Ciąg (x_n) którego wszystkie wyrazy należą do dziedziny funkcji f, tzn. ciąg spełniający warunek

$$\forall_{x\in\mathbb{N}} x_n \in D_f$$

ciąg wartości funkcji

Jeżeli ciąg (x_n) jest ciągiem argumentów funkcji $f : D_f \to \mathbb{R}$, to ciąg $(f(x_n))$ nazywamy ciągiem wartości funkcji f.

Animacja

Polecenie 1

Na poniższej animacji pokazano, w jaki sposób można obliczyć granicę funkcji, korzystając z definicji według Heinego. Zapoznaj się z przedstawionymi w niej przykładami, a następnie wykonaj zamieszczone poniżej polecenia.

Film dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/D1CLIM9Eg

Film nawiązujący do treści lekcji dotyczącej obliczania granicy z definicji Heinego.

Polecenie 2

Korzystając z definicji Heinego, oblicz granicę

$$\lim_{x \to -2} \frac{x+3}{1-2x}$$

Polecenie 3

Korzystając z definicji Heinego wykaż, że funkcja $f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{x-\pi}\right)$ nie posiada granicy w punkcie $x_0 = \pi$.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

Ćwiczenie 7

Ćwiczenie 8

Ćwiczenie 9

Dla nauczyciela

Autor: Mariusz Doliński

Przedmiot: Matematyka

Temat: Jak obliczyć granicę funkcji w punkcie, korzystając z definicji Heinego?

Grupa docelowa: III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

XIII. Optymalizacja i rachunek różniczkowy.

Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

1. oblicza granice funkcji (w tym jednostronne);

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- oblicza granicę wielomianów w punkcie korzystając z definicji granicy według Heinego,
- oblicza granicę funkcji wymiernych w punkcie korzystając z definicji granicy według Heinego,
- analizuje inne funkcje elementarne i oblicza ich granice wykorzystując definicję według Heinego.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona klasa;
- wykład;

- dyskusja.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

1. Uczniowie zapoznają się z treściami zapisanymi w sekcji „Przeczytaj".

Faza wstępna:

1. Nauczyciel prezentuje temat: „Jak obliczyć granicę funkcji w punkcie, korzystając z definicji Heinego?" oraz cele zajęć, omawiając lub ustalając razem z uczniami kryteria sukcesu.
2. Rozpoznawanie wiedzy uczniów. Uczniowie tworzą pytania dotyczące tematu zajęć, na które odpowiedzą w trakcie lekcji.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel prosi, aby wybrany uczeń przeczytał polecenie numer 1 z sekcji „Animacja". Uczniowie zapoznają się z materiałem i zapisują ewentualne problemy z jego zrozumieniem. Następnie dzielą się na grupy i ponownie analizują jego treść wspólnie wyjaśniając zaistniałe wątpliwości.
2. Prowadzący zapowiada uczniom, że w kolejnym kroku będą rozwiązywać ćwiczenia nr 1 i 2 z sekcji „Sprawdź się". Każdy z uczniów robi to samodzielnie. Po ustalonym czasie wybrani uczniowie przedstawiają rozwiązania. Nauczyciel w razie potrzeby koryguje odpowiedzi, dopowiada istotne informacje, udziela uczniom informacji zwrotnej.
3. Nauczyciel dzieli klasę na 4-osobowe grupy. Uczniowie rozwiązują ćwiczenia 3-5 na czas (od łatwiejszego do trudniejszych). Grupa, która poprawnie rozwiąże ćwiczenia jako pierwsza, wygrywa, a nauczyciel może nagrodzić uczniów ocenami za aktywność. Rozwiązania są prezentowane na forum klasy i omawiane krok po kroku.
4. Uczniowie wykonują ćwiczenia nr 6-8 z sekcji „Sprawdź się". Nauczyciel sprawdza poprawność wykonanych zadań, omawiając je wraz z uczniami.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Na koniec zajęć nauczyciel prosi uczniów o rozwinięcie zdania: „Na dzisiejszych zajęciach nauczyłam/łem się jak…”.

Praca domowa:

1. Zadanie dla kolegi/koleżanki. Uczniowie dobierają się w pary i opracowują zadania analogiczne do ćwiczeń 7 i 8 z sekcji „Sprawdź się”. Następnie przesyłają je do siebie mailem, rozwiązują i na następnej lekcji porównują wyniki.

Materiały pomocnicze:

- Przykłady ciągów zbieżnych

Wskazówki metodyczne:

- Medium w sekcji „Animacja” można wykorzystać jako materiał służący powtórzeniu materiału w temacie „Jak obliczyć granicę funkcji w punkcie, korzystając z definicji Heinego?”.