



Reguła włączeń i wyłączeń

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Animacja](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Reguła włączeń i wyłączeń

Źródło: Michiel Annaert, dostępny w internecie: <https://unsplash.com/>.

W praktyce szkolnej rozwiązanie złożonego zadania z kombinatoryki polega zazwyczaj na stosowaniu **reguły dodawania** oraz **reguły mnożenia**.

Postępując według tej strategii dzielimy zadany problem na rozłączne przypadki, a w każdym z nich zliczanie wyników rozpatrywanego doświadczenia losowego przeprowadzamy w kolejnych etapach. Tym sposobem unikamy błędów spowodowanych np. wielokrotnym zliczaniem tego samego wyniku.

Pokażemy, że w pewnych sytuacjach w obliczeniach kombinatorycznych można i warto zastosować metodę, której sposób użycia określa reguła nazywana **zasadą włączeń i wyłączeń**.

Twoje cele

- Będziesz doskonalić umiejętność posługiwania się twierdzeniem o liczbie elementów sumy 2 zbiorów oraz o liczbie elementów sumy 3 zbiorów.
- Poznasz twierdzenie o liczbie elementów sumy 4 zbiorów, jego dowód oraz zastosowania w przykładowych zadaniach.
- Znajomość powyższych twierdzeń pozwoli Ci zrozumieć, jak działa *zasada włączeń i wyłączeń* w przypadku sumy zbiorów o liczbie składników większej od 4.
- Poznasz wzór (wraz z dowodem), opisujący jak stosować *zasadę włączeń i wyłączeń* w ogólnym przypadku.

- Nauczysz się, jak wykorzystać *zasadę włączeń i wyłączeń* do obliczenia, ile jest wśród liczb mniejszych od ustalonej dodatniej liczby całkowitej n takich liczb, które są względnie pierwsze z n .
- Nauczysz się również, jak wykorzystać *zasadę włączeń i wyłączeń* do obliczenia, ile spośród permutacji zbioru n -elementowego to tzw. *nieporządki*.

Przeczytaj

W poniższych przykładach będziemy korzystali z zależności opisującej liczbę elementów sumy pewnych zbiorów. Podchodząc do tego zadania w ogólnym przypadku będziemy zakładali, że zbiory składające się na taką sumę nie muszą być rozłączne.

Przypomnijmy na początku twierdzenie o liczbie elementów sumy dwóch zbiorów.

Twierdzenie: o liczbie elementów sumy dwóch zbiorów skończonych

Dla dowolnych dwóch zbiorów skończonych A oraz B prawdziwa jest równość:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Przykład 1

a) Rozpatrzmy zbiór A mający milion elementów, którymi są dodatnie liczby całkowite od 1 do 1000000.

Obliczymy, ile spośród elementów tego zbioru to liczby, które dadzą się zapisać w postaci kwadratu liczby naturalnej lub w postaci sześcianu liczby naturalnej.

Rozwiązanie

Oznaczmy:

- przez A_2 – zbiór tych elementów A , które dadzą się zapisać w postaci kwadratu liczby naturalnej,
- przez A_3 – zbiór tych elementów A , które dadzą się zapisać w postaci sześcianu liczby naturalnej.

Zauważmy, że:

- liczba n należy do zbioru A_2 wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia warunek $1 = 1^2 \leq n = k^2 \leq 1000000 = 1000^2$. Stąd $k = 1, 2, 3, \dots, 1000$ a więc $|A_2| = 1000$;
- liczba m należy do zbioru A_3 wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia warunek $1 = 1^3 \leq m = l^3 \leq 1000000 = 100^3$. Stąd $l = 1, 2, 3, \dots, 100$, a więc $|A_3| = 100$;
- liczba p należy do zbioru $A_2 \cap A_3$ wtedy i tylko wtedy, gdy jest szóstą potęgą liczby naturalnej, czyli gdy spełnia warunek $1 = 1^6 \leq p = q^6 \leq 1000000 = 10^6$. Stąd $q = 1, 2, 3, \dots, 10$, a więc $|A_2 \cap A_3| = 10$.

Korzystając z twierdzenia o liczbie elementów sumy dwóch zbiorów otrzymujemy zatem $|A_2 \cup A_3| = |A_2| + |A_3| - |A_2 \cap A_3| = 1000 + 100 - 10 = 1090$.

Ogółem jest więc 1090 elementów zbioru A , które dadzą się zapisać w postaci kwadratu liczby naturalnej lub w postaci sześcianu liczby naturalnej.

b) Rzucamy cztery razy symetryczną sześcienną kostką do gry. Obliczymy ile jest takich wyników tego doświadczenia, że największą wyrzuconą liczbą oczek jest 6 i najmniejszą jest 2.

Rozwiązanie

Rozpatrzmy wszystkie wyniki czterokrotnego rzutu kostką sześcienną, w których ani razu nie wypadła liczba oczek równa 1. Wtedy każdy wynik tego doświadczenia można zapisać jako 4-elementowy ciąg (w_1, w_2, w_3, w_4) , gdzie $w_1, w_2, w_3, w_4 \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$. Zatem wszystkich takich wyników jest tyle, ile jest 4-elementowych **wariacji z powtórzeniami** zbioru 5-elementowego, czyli 5^4 .

Mamy obliczyć, ile jest ciągów (w_1, w_2, w_3, w_4) , w których największy element to 6 i najmniejszy element to 2, co oznacza, że w takim ciągu każdy spośród elementów ze zbioru $\{2, 6\}$ ma wystąpić co najmniej raz.

Obliczymy, ile wśród rozpatrywanych ciągów jest takich, które **nie spełniają** tego warunku.

Oznaczmy w tym celu:

- przez A – zbiór tych ciągów, w których nie występuje liczba 6 (wtedy największa wyrzucona liczba oczek jest mniejsza od 6),
- przez B – zbiór tych ciągów, w których nie występuje liczba 2 (wtedy najmniejsza wyrzucona liczba oczek jest większa od 2).

Wynika stąd, że:

- $|A| = 4^4$ (tyle jest ciągów, w których zapisie mogą wystąpić jedynie liczby 2, 3, 4, 5),
- $|B| = 4^4$ (tyle jest ciągów, w których zapisie mogą wystąpić jedynie liczby 3, 4, 5, 6)
- $|A \cap B| = 3^4$ (tyle jest ciągów, w których zapisie mogą wystąpić jedynie liczby 3, 4, 5).

Zatem takich wśród rozpatrywanych ciągów, w których nie występuje liczba 6 lub nie występuje liczba 2 jest tyle, ile jest elementów zbioru $A \cup B$.

Korzystając ze wzoru na liczbę elementów sumy dwóch zbiorów otrzymujemy zatem, że $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 4^4 + 4^4 - 3^4$.

Oznacza to, że ciągów (w_1, w_2, w_3, w_4) , w których największy element to 6 i najmniejszy element to 2 jest

$$5^4 - (4^4 + 4^4 - 3^4) = 625 - (256 + 256 - 81) = 194.$$

Wobec tego są 194 wyniki 4-krotnego rzutu kostką, w których największą liczbą wyrzuconych oczek jest 6 i najmniejszą liczbą wyrzuconych oczek jest 2.

Uwaga. Wszystkie wyniki 4-krotnego rzutu kostką, które spełniają warunki zadania można podzielić na sześć rozłącznych przypadków:

1. dokładnie raz wypadły 2 oczka i dokładnie raz wypadło 6 oczek, a w pozostałych dwóch rzutach wypadały liczby oczek równe 3, 4 lub 5,
2. dokładnie dwa razy wypadły 2 oczka i dokładnie raz wypadło 6 oczek, a w pozostałym rzucie wypadała liczba oczek równa 3, 4 lub 5,
3. dokładnie dwa razy wypadło 6 oczek i dokładnie raz wypadły 2 oczka, a w pozostałym rzucie wypadała liczba oczek równa 3, 4 lub 5,
4. dokładnie dwa razy wypadły 2 oczka i dokładnie dwa razy wypadło 6 oczek,
5. dokładnie trzy razy wypadło 6 oczek i dokładnie raz wypadły 2 oczka,
6. dokładnie trzy razy wypadły 2 oczka i dokładnie raz wypadło 6 oczek.

W każdym z przypadków liczbę możliwości obliczamy stosując **regułę mnożenia**, a następnie – stosując **regułę dodawania** – obliczamy liczbę wszystkich możliwości.

Otrzymujemy tym sposobem, że jest ich

$$\binom{4}{1} \cdot \binom{3}{1} \cdot 3^2 + 2 \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{2}{1} \cdot 3 + \binom{4}{2} + 2 \cdot \binom{4}{3} = 194.$$

W kolejnym przykładzie skorzystamy z poznanego twierdzenia o liczbie elementów sumy trzech zbiorów.

Twierdzenie: o liczbie elementów sumy trzech zbiorów skończonych

Dla dowolnych trzech zbiorów skończonych A , B oraz C prawdziwa jest równość:

$$\begin{aligned} |A \cup B \cup C| &= \\ &= |A| + |B| + |C| - (|A \cap B| + |B \cap C| + |A \cap C|) + |A \cap B \cap C| \end{aligned}$$

Przykład 2

Rozpatrujemy wszystkie pięciocyfrowe liczby naturalne, w których zapisie dziesiętnym występują jedynie cyfry 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

Obliczymy, ile jest wśród nich takich liczb, które mają cyfrę parzystą na pierwszym lub na drugim, lub na trzecim miejscu zapisu dziesiętnego.

Rozwiązanie

Oznaczmy:

- przez A_1 – zbiór tych liczb, w których cyfra parzysta występuje na pierwszym miejscu zapisu dziesiętnego,
- przez A_2 – zbiór tych liczb, w których cyfra parzysta występuje na drugim miejscu zapisu dziesiętnego,
- przez A_3 – zbiór tych liczb, w których cyfra parzysta występuje na trzecim miejscu zapisu dziesiętnego.

Wtedy:

$|A_1| = 3 \cdot 7^4$ (tyle jest liczb, w których cyfra parzysta występuje na pierwszym miejscu zapisu dziesiętnego),

$|A_2| = 3 \cdot 7^4$ (tyle jest liczb, w których cyfra parzysta występuje na drugim miejscu zapisu dziesiętnego),

$|A_3| = 3 \cdot 7^4$ (tyle jest liczb, w których cyfra parzysta występuje na trzecim miejscu zapisu dziesiętnego),

$|A_1 \cap A_2| = 3^2 \cdot 7^3$ (tyle jest liczb, w których cyfra parzysta występuje na pierwszym i na drugim miejscu zapisu dziesiętnego),

$|A_1 \cap A_3| = 3^2 \cdot 7^3$ (tyle jest liczb, w których cyfra parzysta występuje na pierwszym i na trzecim miejscu zapisu dziesiętnego),

$|A_2 \cap A_3| = 3^2 \cdot 7^3$ (tyle jest liczb, w których cyfra parzysta występuje na drugim i na trzecim miejscu zapisu dziesiętnego),

$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 3^3 \cdot 7^2$ (tyle jest liczb, w których cyfra parzysta występuje na pierwszym i na drugim, i na trzecim miejscu zapisu dziesiętnego).

Korzystając ze wzoru na liczbę elementów sumy trzech zbiorów otrzymujemy zatem, że

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| =$$

$$= |A_1| + |A_2| + |A_3| - (|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3|) +$$

$$+ |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 3 \cdot 3^1 \cdot 7^4 - 3 \cdot 3^2 \cdot 7^3 + 3^3 \cdot 7^2 =$$

$$= 21609 - 9261 + 1323 = 13671.$$

Jest zatem 13671 szukanych liczb.

Uwaga 1. Zbiór wszystkich liczb 5-cyfrowych, które spełniają warunki zadania można podzielić na trzy rozłączne podzbiory:

- tych liczb, w których na dokładnie jednym z początkowych trzech miejsc zapisano cyfrę parzystą (jest ich ogółem $\binom{3}{1} \cdot 3 \cdot 4^2 \cdot 7^2$),

- tych liczb, w których na dokładnie dwóch spośród początkowych trzech miejsc zapisano cyfrę parzystą (jest ich ogółem $\binom{3}{2} \cdot 3^2 \cdot 4 \cdot 7^2$),
- tych liczb, w których na każdym z trzech początkowych miejsc zapisano cyfrę parzystą (jest ich ogółem $\binom{3}{3} \cdot 3^3 \cdot 7^2$).

Korzystając z reguły dodawania obliczamy liczbę wszystkich możliwości:

$$\binom{3}{1} \cdot 3^1 \cdot 4^2 \cdot 7^2 + \binom{3}{2} \cdot 3^2 \cdot 4^1 \cdot 7^2 + \binom{3}{3} \cdot 3^3 \cdot 7^2 = 13671.$$

Uwaga 2. Można też od razu zauważyć, że jeśli rozpatrywana liczba pięciocyfrowa **nie spełnia** warunków zadania, to na każdym z początkowych trzech miejsc zapisu dziesiętnego ma cyfrę nieparzystą. Oznacza to, że wszystkich takich liczb jest $4^3 \cdot 7^2$. Ponieważ wszystkich pięciocyfrowych liczb naturalnych, w których zapisie dziesiętnym występują jedynie cyfry 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 jest 7^5 , więc liczb spełniających warunki zadania jest $7^5 - 4^3 \cdot 7^2 = 7^2 \cdot (7^3 - 4^3) = 13671$.

Przykład 3

W pudełku znajdują się trzy kule ponumerowane od 1 do 3. Losujemy z tego pudełka pięć razy po jednej kuli, przy czym za każdym razem wrzucamy wylosowaną kulę z powrotem do pudełka.

Obliczymy, ile jest wszystkich wyników takiego losowania, w których każdą z możliwych do wylosowania kul wylosowano co najmniej raz.

Rozwiązanie

Zauważmy, że każdy wynik losowania opisanego w treści zadania można zapisać jako 5-elementowy ciąg $(w_1, w_2, w_3, w_4, w_5)$, gdzie $w_1, w_2, w_3, w_4, w_5 \in \{1, 2, 3\}$.

Zatem wszystkich możliwych wyników tego doświadczenia jest 3^5 .

Mamy obliczyć, ile jest ciągów $(w_1, w_2, w_3, w_4, w_5)$, w których każdy spośród elementów zbioru $\{1, 2, 3\}$ wystąpił co najmniej raz.

Obliczymy, ile jest takich wyników losowania, które **nie spełniają** tego warunku. W tym celu oznaczmy:

- przez A_1 – zbiór tych ciągów, w których nie występuje liczba 1,
- przez A_2 – zbiór tych ciągów, w których nie występuje liczba 2,
- przez A_3 – zbiór tych ciągów, w których nie występuje liczba 3.

Wynika stąd, że:

$|A_1| = |A_2| = |A_3| = 2^5$ (tyle jest ciągów, w których zapisie mogą wystąpić dokładnie dwa spośród trzech dopuszczalnych numerów: albo tylko 2 lub 3, albo tylko 1 lub 3, albo tylko 1 lub 2),

$|A_1 \cap A_2| = |A_1 \cap A_3| = |A_2 \cap A_3| = 1^5$ (tyle jest ciągów, w których zapisie może wystąpić tylko jedna z dopuszczalnych liczb: albo tylko 1, albo tylko 2, albo tylko 3),

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 0$$

(nie ma takiego ciągu, w którym nie wystąpi ani 1, ani 2, ani 3).

Wyników losowania, w których nie występuje liczba 1 lub nie występuje liczba 2, lub nie występuje liczba 3 jest tyle, ile jest elementów zbioru $A_1 \cup A_2 \cup A_3$.

Korzystając z zasady włączeń i wyłączeń otrzymujemy zatem, że

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| =$$

$$= |A_1| + |A_2| + |A_3| - (|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3|) +$$

$$+ |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 3 \cdot 2^5 - 3 \cdot 1^5 + 0 = 93.$$

Oznacza to, że ciągów $(w_1, w_2, w_3, w_4, w_5)$, w których każda z liczb 1, 2, 3 wystąpiła co najmniej raz jest

$$3^5 - (3 \cdot 2^5 - 3 \cdot 1^5 + 0) = 243 - 93 = 150.$$

Zatem jest 150 wyników losowania opisanego warunkami zadania.

Wykażemy teraz, że istnieje zależność opisująca liczbę elementów sumy dowolnych czterech zbiorów skończonych.

Twierdzenie: o liczbie elementów sumy czterech zbiorów skończonych

Dla dowolnych czterech zbiorów skończonych A, B, C oraz D prawdziwa jest równość:

$$\begin{aligned} |A \cup B \cup C \cup D| &= |A| + |B| + |C| + |D| + \\ &- (|A \cap B| + |A \cap C| + |A \cap D| + |B \cap C| + |B \cap D| + |C \cap D|) + \\ &+ (|A \cap B \cap C| + |A \cap B \cap D| + |A \cap C \cap D| + |B \cap C \cap D|) + \\ &- |A \cap B \cap C \cap D| \end{aligned}$$

Dowód

Dla dowodu wystarczy pokazać, że dowolny element sumy $A \cup B \cup C \cup D$ został po prawej stronie policzony dokładnie raz.

Rozpatrzmy więc cztery rozłączne przypadki.

(1) Weźmy pod uwagę taki element x , który należy do dokładnie jednego ze zbiorów A, B, C lub D .

Wtedy:

- do wartości sumy $|A| + |B| + |C| + |D|$ wnosi on dokładnie 1,
- nic nie wnosi do wartości sumy $|A \cap B| + |A \cap C| + |A \cap D| + |B \cap C| + |B \cap D| + |C \cap D|$,
- nic nie wnosi do wartości sumy $|A \cap B \cap C| + |A \cap B \cap D| + |A \cap C \cap D| + |B \cap C \cap D|$,
- nic nie wnosi do wartości wyrażenia $|A \cap B \cap C \cap D|$.

Zatem taki element x został policzony dokładnie raz.

(2) Weźmy pod uwagę taki element y , który należy do dokładnie dwóch zbiorów spośród A, B, C, D .

Wtedy:

- do wartości sumy $|A| + |B| + |C| + |D|$ wnosi on 2,
- do wartości sumy $|A \cap B| + |A \cap C| + |A \cap D| + |B \cap C| + |B \cap D| + |C \cap D|$ wnosi on 1,
- nic nie wnosi do wartości sumy $|A \cap B \cap C| + |A \cap B \cap D| + |A \cap C \cap D| + |B \cap C \cap D|$,
- nic nie wnosi do wartości wyrażenia $|A \cap B \cap C \cap D|$.

Zatem taki element do wyrażenia po prawej stronie wnosi wartość $2 - 1 = 1$, czyli y został policzony dokładnie raz.

(3) Weźmy pod uwagę taki element z , który należy do dokładnie trzech zbiorów spośród A, B, C, D .

Wtedy:

- do wartości sumy $|A| + |B| + |C| + |D|$ wnosi on 3,
- do wartości sumy $|A \cap B| + |A \cap C| + |A \cap D| + |B \cap C| + |B \cap D| + |C \cap D|$ wnosi on 3,
- do wartości sumy $|A \cap B \cap C| + |A \cap B \cap D| + |A \cap C \cap D| + |B \cap C \cap D|$ wnosi on 1,
- nic nie wnosi do wartości wyrażenia $|A \cap B \cap C \cap D|$.

Zatem taki element do wyrażenia po prawej stronie wnosi wartość $3 - 3 + 1 = 1$, czyli z został policzony dokładnie raz.

(4) Weźmy pod uwagę taki element t , który należy do każdego z czterech zbiorów spośród A, B, C, D .

Wtedy:

- do wartości sumy $|A| + |B| + |C| + |D|$ wnosi on 4,
- do wartości sumy $|A \cap B| + |A \cap C| + |A \cap D| + |B \cap C| + |B \cap D| + |C \cap D|$ wnosi on 6,
- do wartości sumy $|A \cap B \cap C| + |A \cap B \cap D| + |A \cap C \cap D| + |B \cap C \cap D|$ wnosi on 4,
- do wartości wyrażenia $|A \cap B \cap C \cap D|$ element t wnosi 1.

Zatem taki element do wyrażenia po prawej stronie wnosi wartość $4 - 6 + 4 - 1 = 1$, czyli t również został policzony dokładnie raz.

W ten sposób dowód został zakończony.

Przykład 4

a) Rozpatrzmy wszystkie czterocyfrowe liczby naturalne. Obliczmy, ile jest wśród nich takich liczb, które nie dzielą się ani przez 2, ani przez 3, ani przez 4, ani przez 5.

Rozwiązanie

Zaczynamy od ustalenia, że czterocyfrowych liczb naturalnych jest 9000.

Następnie obliczmy, ile jest takich liczb czterocyfrowych, które nie spełniają zadanego warunku.

W tym celu oznaczmy:

- przez A – zbiór czterocyfrowych liczb naturalnych podzielnych przez 2,
- przez B – zbiór czterocyfrowych liczb naturalnych podzielnych przez 3,
- przez C – zbiór czterocyfrowych liczb naturalnych podzielnych przez 4,
- przez D – zbiór czterocyfrowych liczb naturalnych podzielnych przez 5.

Korzystając z **reguły równoliczności** obliczamy, że:

$$|A| = \frac{1}{2} \cdot 9000 = 4500,$$

$$|B| = \frac{1}{3} \cdot 9000 = 3000,$$

$$|C| = \frac{1}{4} \cdot 9000 = 2250,$$

$$|D| = \frac{1}{5} \cdot 9000 = 1800,$$

$$|A \cap B| = \frac{1}{6} \cdot 9000 = 1500,$$

$$|A \cap C| = |C| = 2250,$$

$$\begin{aligned}
|A \cap D| &= \frac{1}{10} \cdot 9000 = 900, \\
|B \cap C| &= \frac{1}{12} \cdot 9000 = 750, \\
|B \cap D| &= \frac{1}{15} \cdot 9000 = 600, \\
|C \cap D| &= \frac{1}{20} \cdot 9000 = 450, \\
|A \cap B \cap C| &= |B \cap C| = 750, \\
|A \cap B \cap D| &= \frac{1}{30} \cdot 9000 = 300, \\
|A \cap C \cap D| &= |C \cap D| = 450, \\
|B \cap C \cap D| &= \frac{1}{60} \cdot 9000 = 150, \\
|A \cap B \cap C \cap D| &= |B \cap C \cap D| = 150.
\end{aligned}$$

Czterocyfrowych liczb naturalnych, które dzielą się przez 2 lub przez 3 lub przez 4 lub przez 5 jest tyle, ile jest elementów zbioru $A \cup B \cup C \cup D$.

Korzystając ze wzoru na sumę czterech zbiorów skończonych otrzymujemy zatem, że

$$\begin{aligned}
|A \cup B \cup C \cup D| &= |A| + |B| + |C| + |D| + \\
&- (|A \cap B| + |A \cap C| + |A \cap D| + |B \cap C| + |B \cap D| + |C \cap D|) + \\
&+ (|A \cap B \cap C| + |A \cap B \cap D| + |A \cap C \cap D| + |B \cap C \cap D|) + \\
&- |A \cap B \cap C \cap D| = 4500 + 3000 + 2250 + 1800 + \\
&- (1500 + 2250 + 900 + 750 + 600 + 450) + \\
&+ (750 + 300 + 450 + 150) - 150 = 6600.
\end{aligned}$$

Oznacza to, że czterocyfrowych liczb naturalnych, które nie dzielą się ani przez 2, ani przez 3, ani przez 4, ani przez 5 jest $9000 - 6600 = 2400$.

Uwaga. Rozpatrując wszystkie reszty z dzielenia przez liczbę 60 (jest to najmniejsza wspólna wielokrotność liczb 2, 3, 4 oraz 5), stwierdzimy, że wśród nich jest dokładnie 16 reszt względnie pierwszych z każdą z liczb 2, 3, 4 oraz 5. Stąd na podstawie reguły równoliczności wnioskujemy, że czterocyfrowych liczb naturalnych, które nie dzielą się ani przez 2, ani przez 3, ani przez 4, ani przez 5 jest $\frac{16}{60} \cdot 9000 = 2400$.

b) Rozpatrzmy wszystkie **permutacje** sześćcioelementowego zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Obliczymy, ile spośród tych permutacji spełnia następujący warunek: wśród dowolnych trzech kolejnych wyrazów permutacji nie ma takiej trójki, która jest zapisana w porządku rosnącym.

Rozwiązanie

Każdą **permutację** sześćcioelementowego zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ można zapisać w postaci $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$.

Wszystkich takich **permutacji** jest $6! = 720$.

Mamy obliczyć, ile spośród tych **permutacji** spełnia następujący warunek: wśród

dowolnych trzech kolejnych wyrazów **permutacji** nie ma takiej trójki, która jest zapisana w porządku rosnącym.

Najpierw obliczymy, ile jest takich ciągów, które **nie spełniają** tego warunku.

W tym celu oznaczmy:

- przez A – zbiór tych **permutacji**, w których pierwsze trzy wyrazy są zapisane w porządku rosnącym,
- przez B – zbiór tych **permutacji**, w których wyrazy drugi, trzeci i czwarty są zapisane w porządku rosnącym,
- przez C – zbiór tych **permutacji**, w których wyrazy trzeci, czwarty i piąty są zapisane w porządku rosnącym,
- przez D – zbiór tych **permutacji**, w których wyrazy czwarty, piąty i szósty są zapisane w porządku rosnącym.

Zauważmy, że:

- ponieważ trzy liczby ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ możemy wybrać na $\binom{6}{3} = 20$ sposobów, następnie zapisać je w **permutacji** w porządku rosnącym na ustalonych trzech miejscach można tylko na jeden sposób, a uzupełnić pozostałe trzy miejsca w ciągu można na $3! = 6$ sposobów, więc
$$|A| = |B| = |C| = |D| = \binom{6}{3} \cdot 3! = 20 \cdot 6 = 120;$$
- ponieważ trzy liczby ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ możemy wybrać na $\binom{6}{3} = 20$ sposobów, zapisać je w **permutacji** w porządku rosnącym na ustalonych trzech miejscach można tylko na jeden sposób, a liczby na pozostałych trzech miejscach można ustawić w porządku rosnącym również na jeden sposób, więc
$$|A \cap D| = \binom{6}{3} = 20;$$
- ponieważ cztery liczby ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ możemy wybrać na $\binom{6}{4} = 15$ sposobów, zapisać je w **permutacji** na ustalonych czterech miejscach w porządku rosnącym można tylko na jeden sposób, a uzupełnić pozostałe dwa miejsca w ciągu można na $2! = 2$ sposoby, więc
$$|A \cap B| = |B \cap C| = |C \cap D| = \binom{6}{4} \cdot 2! = 15 \cdot 2 = 30;$$

- ponieważ pięć liczb ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ możemy wybrać na $\binom{6}{5} = 6$ sposobów, zapisać je w **permutacji** na ustalonych pięciu miejscach w porządku rosnącym można tylko na jeden sposób, a również na jeden sposób można uzupełnić pozostałe jedno miejsce w ciągu, więc

$$|A \cap C| = |B \cap D| = |A \cap B \cap C| = |B \cap C \cap D| = \binom{6}{5} = 6;$$

- ponieważ wszystkie liczby ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ możemy zapisać w **permutacji** w porządku rosnącym na jeden sposób, więc

$$|A \cap B \cap D| = |A \cap C \cap D| = |A \cap B \cap C \cap D| = 1.$$

Ponieważ wszystkich ciągów, w których co najmniej jedna trójka kolejnych wyrazów jest zapisana w porządku rosnącym jest tyle, ile jest elementów zbioru $A \cup B \cup C \cup D$, więc korzystając ze wzoru na sumę czterech zbiorów skończonych otrzymujemy, że

$$\begin{aligned} |A \cup B \cup C \cup D| &= |A| + |B| + |C| + |D| + \\ &- (|A \cap B| + |A \cap C| + |A \cap D| + |B \cap C| + |B \cap D| + |C \cap D|) + \\ &+ (|A \cap B \cap C| + |A \cap B \cap D| + |A \cap C \cap D| + |B \cap C \cap D|) + \\ &- |A \cap B \cap C \cap D| = 4 \cdot 120 - (3 \cdot 30 + 20 + 2 \cdot 6) + (2 \cdot 6 + 2 \cdot 1) - 1 = 371 \end{aligned}$$

Zatem takich **permutacji** danego zbioru, że wśród ich dowolnych trzech kolejnych wyrazów nie ma trójki zapisanej w porządku rosnącym jest $720 - 371 = 349$.

Podamy teraz wzór, który pozwala obliczać liczbę elementów sumy n zbiorów skończonych $A_1, A_2, \dots, A_n$.

(w rozwiązaniach powyższych przykładów wzór ten wystąpił w szczególnych przypadkach, gdy $n = 2, 3, 4$).

Twierdzenie: Zasada włączeń i wyłączeń

Dla dowolnych zbiorów skończonych $A_1, A_2, \dots, A_n$ prawdziwa jest równość

$$\begin{aligned} |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| &= |A_1| + |A_2| + \dots + |A_n| + \\ &- (|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + \dots + |A_1 \cap A_n| + \dots + |A_{n-1} \cap A_n|) + \\ &- (|A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| + \dots + |A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n|) + \\ &+ \dots + (-1)^{n-1} \cdot |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n| \end{aligned}$$

Dowód

W powyższym wzorze zapisujemy:

- z plusem – liczby elementów każdego z pojedynczo rozpatrywanych zbiorów,
- z minusem – liczby elementów każdego z możliwych iloczynów par rozpatrywanych zbiorów,
- z plusem – liczby elementów każdego z możliwych iloczynów trójek rozpatrywanych zbiorów,
- itd. aż do iloczynu wszystkich zbiorów, przy czym dla kolejnej grupy znak plus stawiamy wyłącznie wtedy, gdy zapisujemy iloczyny nieparzystej liczby rozpatrywanych zbiorów, a znak minus – wyłącznie wtedy, gdy zapisujemy iloczyny parzystej liczby rozpatrywanych zbiorów.

Dla dowodu wystarczy pokazać, że dowolny element sumy $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ został po prawej stronie policzony dokładnie raz.

Weźmy taki element sumy rozpatrywanych zbiorów, który należy do dokładnie k spośród nich ($1 \leq k \leq n$).

Pokażemy, że niezależnie od wartości k taki element został po prawej stronie wzoru policzony dokładnie raz.

Zauważmy, że:

- (1) element ten nie występuje w żadnym z iloczynów rozpatrywanych zbiorów, w którym zapisano więcej niż k z nich,
- (2) dla ustalonego i , gdzie $1 \leq i \leq k$, do wartości sumy, w której zapisane są wszystkie możliwe iloczyny i spośród rozpatrywanych zbiorów wyróżniony element wnosi $\binom{k}{i}$.

W szczególności ten element:

- do wartości sumy $|A_1| + |A_2| + \dots + |A_n|$ (w której występują liczby elementów każdego z pojedynczo rozpatrywanych zbiorów) wnosi $\binom{k}{1}$,
- do wartości sumy $|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + \dots + |A_1 \cap A_n| + \dots + |A_{n-1} \cap A_n|$ (w której występują liczby elementów każdego z możliwych iloczynów par rozpatrywanych zbiorów) wnosi $\binom{k}{2}$,
- do wartości sumy $|A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| + \dots + |A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n|$ (w której występują liczby elementów każdego z możliwych iloczynów trójek rozpatrywanych zbiorów) wnosi dokładnie $\binom{k}{3}$,
- ...

- do wartości sumy $|A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k| + \dots + |A_{n-k+1} \cap A_{n-k+2} \cap \dots \cap A_n|$ (w której występują liczby elementów każdego z możliwych iloczynów k spośród wszystkich rozpatrywanych zbiorów) wnosi $\binom{k}{k} = 1$.

Zatem liczba po prawej stronie wzoru jest równa

$$\begin{aligned} & \binom{k}{1} - \binom{k}{2} + \binom{k}{3} - \dots + (-1)^{k-1} \cdot \binom{k}{k} = \\ & = 1 + (-1) + \binom{k}{1} - \binom{k}{2} + \binom{k}{3} - \dots + (-1)^{k-1} \cdot \binom{k}{k} = \\ & = 1 - \left(1 - \binom{k}{1} + \binom{k}{2} - \binom{k}{3} + \dots + (-1)^k \cdot \binom{k}{k} \right) = \\ & = 1 - (1 + (-1))^k = 1 - 0 = 1. \end{aligned}$$

To spostrzeżenie kończy dowód.

Przykład 5

a) Rozpatrzmy losowe rozmieszczenie 7 kul (ponumerowanych od 1 do 7) w 5 różnych pudełkach (ponumerowanych od 1 do 5).

Na ile różnych sposobów można kule rozmieścić tak, aby w każdym pudełku znalazła się przynajmniej jedna z nich?

Rozwiązanie

Zauważmy, że każdy wynik losowania opisanego w treści zadania można zapisać jako 7-elementowy ciąg $(k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6, k_7)$, przy czym przez k_i , gdzie $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$, oznaczyliśmy numer pudełka do którego wpadła kula o numerze i .

Stąd $k_i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, a więc wszystkich możliwych rozmieszczeń 7 różnych kul w 5 różnych pudełkach jest 5^7 .

Mamy obliczyć, ile jest takich ciągów $(k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6, k_7)$, w których każdy spośród elementów ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ wystąpi co najmniej raz.

Obliczymy, ile jest takich wyników losowania, które nie spełniają tego warunku. W tym celu oznaczmy:

- przez A_1 – zbiór tych ciągów, w których nie występuje liczba 1,
- przez A_2 – zbiór tych ciągów, w których nie występuje liczba 2,
- przez A_3 – zbiór tych ciągów, w których nie występuje liczba 3,
- przez A_4 – zbiór tych ciągów, w których nie występuje liczba 4,
- przez A_5 – zbiór tych ciągów, w których nie występuje liczba 5.

Wobec tego wszystkich ciągów, w których nie występuje co najmniej jedna z liczb 1, 2, 3, 4, 5 jest tyle, ile jest elementów zbioru $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5$.

Ponieważ:

- $|A_1| = |A_2| = |A_3| = |A_4| = |A_5| = 4^7$
- $|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_1 \cap A_4| + |A_1 \cap A_5| + \dots + |A_4 \cap A_5| = 3^7$
- $|A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| + \dots + |A_3 \cap A_4 \cap A_5| = 2^7$
- $|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_5| + \dots + |A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5| = 1^7$
- $|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5| = 0$
(zbiór $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5$ jest, oczywiście, pusty),

więc korzystając z zasady włączeń i wyłączeń otrzymujemy, że

$$\begin{aligned} |A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5| &= |A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4| + |A_5| + \\ &- (|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + \dots + |A_4 \cap A_5|) + \\ &+ (|A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| + \dots + |A_3 \cap A_4 \cap A_5|) + \\ &- (|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_5| + \dots + |A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5|) + \\ &+ |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5| = \binom{5}{1} \cdot 4^7 - \binom{5}{2} \cdot 3^7 + \binom{5}{3} \cdot 2^7 - \binom{5}{4} \cdot 1^7 + \\ &+ \binom{5}{5} \cdot 0 = 81920 - 21870 + 1280 - 5 + 0 = 61325 \end{aligned}$$

Oznacza to, że takich ciągów $(k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6, k_7)$, w których każdy spośród elementów ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ wystąpi co najmniej raz jest $5^7 - 61325 = 78125 - 61325 = 16800$.

Zatem jest 16800 rozmieszczeń 7 różnych kul w 5 różnych pudełkach tak, aby w każdym pudełku znalazła się przynajmniej jedna kula.

b) Obliczymy, ile jest 7-cyfrowych liczb naturalnych, w których zapisie dziesiętnym występuje dokładnie 5 różnych cyfr.

Rozwiązanie

I sposób.

Oznaczmy przez x pierwszą (od lewej) cyfrę zapisu dziesiętnego siedmiocyfrowej liczby naturalnej, a jej kolejne cyfry przez – odpowiednio – $c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7$.

Wtedy kolejne (od lewej) cyfry liczby spełniającej warunki zadania tworzą ciąg

$(x, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7)$.

Cyfrę x możemy wybrać dowolnie ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, czyli na 9 sposobów. Pozą nią na pozostałych 6 miejscach mamy zapisać 4 inne cyfry – oznaczmy je przez y, z, t, v .

Ponieważ wybierając je dopuszczamy wykorzystanie cyfry 0, więc te 4 cyfry różne od x możemy wybrać na $\binom{9}{4} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4 \cdot 3 \cdot 2} = 126$ sposobów.

Wszystkich możliwości zapisania tak wybranych 5 cyfr na miejscach $c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7$ jest tyle, ile jest sześćoelementowych **wariacji z powtórzeniami** ze zbioru $\{x, y, z, t, v\}$, czyli 5^6 .

Zauważmy, że do rozwiązania zadania wystarczy jeszcze obliczyć, ile jest ciągów $(c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7)$, w których każdy spośród elementów ze zbioru $\{y, z, t, v\}$ wystąpi co najmniej raz.

Obliczymy, ile jest wszystkich ciągów $(c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7)$, które nie spełniają tego warunku.

W tym celu oznaczmy:

- przez Y – zbiór tych ciągów, w których nie występuje cyfra y ,
- przez Z – zbiór tych ciągów, w których nie występuje cyfra z ,
- przez T – zbiór tych ciągów, w których nie występuje cyfra t ,
- przez V – zbiór tych ciągów, w których nie występuje cyfra v .

Wobec tego wszystkich ciągów, w których nie występuje co najmniej jedna z cyfr y, z, t, v jest tyle, ile jest elementów zbioru $Y \cup Z \cup T \cup V$.

Ponieważ:

$$|Y| = |Z| = |T| = |V| = 4^6,$$

$$|Y \cap Z| = |Y \cap T| = |Y \cap V| = |Z \cap T| = |Z \cap V| = |T \cap V| = 3^6,$$

$$|Y \cap Z \cap T| = |Y \cap Z \cap V| = |Y \cap T \cap V| = |Z \cap T \cap V| = 2^6,$$

$$|Y \cap Z \cap T \cap V| = 1^6,$$

więc korzystając z zasady włączeń i wyłączeń otrzymujemy, że

$$\begin{aligned} &|Y \cup Z \cup T \cup V| = \\ &+ (|Y| + |Z| + |T| + |V|) + \\ &- (|Y \cap Z| + |Y \cap T| + |Y \cap V| + |Z \cap T| + |Z \cap V| + |T \cap V|) + \\ &+ (|Y \cap Z \cap T| + |Y \cap Z \cap V| + |Y \cap T \cap V| + |Z \cap T \cap V|) + \\ &- |Y \cap Z \cap T \cap V| = \\ &= + \binom{4}{1} \cdot 4^6 - \binom{4}{2} \cdot 3^6 + \binom{4}{3} \cdot 2^6 - \binom{4}{4} \cdot 1^6 = \\ &= 16384 - 4374 + 256 - 1 = 12265. \end{aligned}$$

Oznacza to, że takich ciągów $(c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7)$, w których każdy spośród elementów ze zbioru $\{y, z, t, v\}$ wystąpi co najmniej raz jest

$$5^6 - \left(\binom{4}{1} \cdot 4^6 - \binom{4}{2} \cdot 3^6 + \binom{4}{3} \cdot 2^6 - \binom{4}{4} \cdot 1^6 \right) = 15625 - 12265 = 3360.$$

Ostatecznie stwierdzamy, że wszystkich siedmiocyfrowych liczb naturalnych, w których zapisie dziesiętnym występuje dokładnie 5 różnych cyfr jest

$$9 \cdot \binom{9}{4} \cdot \left(5^6 - \left(\binom{4}{1} \cdot 4^6 - \binom{4}{2} \cdot 3^6 + \binom{4}{3} \cdot 2^6 - \binom{4}{4} \cdot 1^6 \right) \right) = 9 \cdot 126 \cdot 3360 = 3810240.$$

II sposób.

Podobnie jak w sposobie I, oznaczmy przez x pierwszą (od lewej) cyfrę zapisu dziesiętnego siedmiocyfrowej liczby naturalnej. Cyfrę x możemy wybrać dowolnie ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, czyli na 9 sposobów.

Cyfry na pozostałych 9 miejscach możemy zapisać na jeden z czterech rozłącznych sposobów:

(1) na 2 z tych 6 miejsc zapisujemy cyfrę x , następnie wybieramy 4 cyfry z dostępnych 9 i rozmieszczamy je na pozostałych 4 miejscach;

ogółem jest w tym przypadku $\binom{6}{2} \cdot \binom{9}{4} \cdot 4! = 15 \cdot 126 \cdot 24 = 45360$ możliwości,

(2) na jednym z tych 6 miejsc zapisujemy cyfrę x , następnie wybieramy z 9 dostępnych jedną cyfrę i zapisujemy ją na 2 spośród pozostałych 5 miejsc, na koniec wybieramy 3 cyfry z 8 pozostałych i rozmieszczamy je na 3 miejscach;

ogółem jest w tym przypadku $\binom{6}{1} \cdot \binom{9}{1} \cdot \binom{5}{2} \cdot \binom{8}{3} \cdot 3! = 6 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 56 \cdot 6 = 181440$,

(3) wybieramy jedną cyfrę z 9 dostępnych i zapisujemy ją na 3 spośród rozpatrywanych 6 miejsc, następnie wybieramy 3 cyfry z 8 pozostałych i rozmieszczamy je na pozostałych 3 miejscach;

ogółem jest w tym przypadku $\binom{9}{1} \cdot \binom{6}{3} \cdot \binom{8}{3} \cdot 3! = 9 \cdot 20 \cdot 56 \cdot 6 = 60480$ możliwości,

(4) wybieramy z 9 dostępnych dwie cyfry i dla każdej z nich znajdujemy 2 miejsca spośród 6 miejsc, następnie wybieramy 2 cyfry z 7 pozostałych i rozmieszczamy je na 2 miejscach;

ogółem jest w tym przypadku $\binom{9}{2} \cdot \binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{7}{2} \cdot 2! = 36 \cdot 15 \cdot 6 \cdot 21 \cdot 2 = 136080$ możliwości.

Wobec tego, korzystając z [reguły mnożenia](#) oraz z [reguły dodawania](#) otrzymujemy, że wszystkich liczb spełniających warunki zadania jest

$$9 \cdot (45360 + 181440 + 60480 + 136080) = 3810240.$$

Przykład 6

Obliczymy, ile jest dodatnich liczb całkowitych względnie pierwszych z liczbą 5544, które nie są większe od 5544.

Rozwiązanie

Oznaczmy przez A zbiór wszystkich dodatnich liczb całkowitych, które nie są większe od 5544: $A = \{1, 2, 3, \dots, 5544\}$.

Zapiszmy teraz liczbę 5544 w postaci rozkładu na czynniki pierwsze:

$$5544 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 11.$$

Zatem liczba całkowita $d \in A$ jest względnie pierwsza z liczbą 5544 wtedy i tylko wtedy, gdy d nie dzieli się przez żadną z liczb: 2, 3, 7, 11.

Obliczymy, ile jest takich liczb w zbiorze A , które **nie są** względnie pierwsze z liczbą 5544.

Zauważmy, że każda taka liczba dzieli się przez co najmniej jedną z liczb ze zbioru $\{2, 3, 7, 11\}$.

Przyjmujemy oznaczenia:

- A_2 – podzbiór zbioru A , w którym znajdują się wszystkie liczby podzielne przez 2,
- A_3 – podzbiór zbioru A , w którym znajdują się wszystkie liczby podzielne przez 3,
- A_7 – podzbiór zbioru A , w którym znajdują się wszystkie liczby podzielne przez 7,
- A_{11} – podzbiór zbioru A , w którym znajdują się wszystkie liczby podzielne przez 11.

Korzystając z [reguły równoliczności](#) obliczamy:

$$|A_2| = \frac{1}{2} \cdot 5544 = 2772,$$

$$|A_3| = \frac{1}{3} \cdot 5544 = 1848,$$

$$|A_7| = \frac{1}{7} \cdot 5544 = 792,$$

$$|A_{11}| = \frac{1}{11} \cdot 5544 = 504,$$

$$|A_2 \cap A_3| = \frac{1}{2 \cdot 3} \cdot 5544 = 924,$$

$$|A_2 \cap A_7| = \frac{1}{2 \cdot 7} \cdot 5544 = 396,$$

$$|A_2 \cap A_{11}| = \frac{1}{2 \cdot 11} \cdot 5544 = 252,$$

$$|A_3 \cap A_7| = \frac{1}{3 \cdot 7} \cdot 5544 = 264,$$

$$|A_3 \cap A_{11}| = \frac{1}{3 \cdot 11} \cdot 5544 = 168,$$

$$|A_7 \cap A_{11}| = \frac{1}{7 \cdot 11} \cdot 5544 = 72,$$

$$|A_2 \cap A_3 \cap A_7| = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 7} \cdot 5544 = 132,$$

$$|A_2 \cap A_3 \cap A_{11}| = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 11} \cdot 5544 = 84,$$

$$|A_2 \cap A_7 \cap A_{11}| = \frac{1}{2 \cdot 7 \cdot 11} \cdot 5544 = 36,$$

$$|A_3 \cap A_7 \cap A_{11}| = \frac{1}{3 \cdot 7 \cdot 11} \cdot 5544 = 24,$$

$$|A_2 \cap A_3 \cap A_7 \cap A_{11}| = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11} \cdot 5544 = 12.$$

Wobec tego korzystając z zasady włączeń i wyłączeń otrzymujemy, że

$$\begin{aligned} |A_2 \cup A_3 \cup A_7 \cup A_{11}| &= |A_2| + |A_3| + |A_7| + |A_{11}| + \\ &- (|A_2 \cap A_3| + |A_2 \cap A_7| + |A_2 \cap A_{11}| + |A_3 \cap A_7| + |A_3 \cap A_{11}| + \\ &+ |A_7 \cap A_{11}|) + (|A_2 \cap A_3 \cap A_7| + |A_2 \cap A_3 \cap A_{11}| + |A_2 \cap A_7 \cap A_{11}| + \\ &+ |A_3 \cap A_7 \cap A_{11}|) - |A_2 \cap A_3 \cap A_7 \cap A_{11}| = \\ &= (2772 + 1848 + 792 + 504) - (924 + 396 + 252 + 264 + 168 + 72) + \\ &+ (132 + 84 + 36 + 24) - 12 = 5916 - 2076 + 276 - 12 = 4104. \end{aligned}$$

Zatem dodatnich liczb całkowitych względnie pierwszych z liczbą 5544, które nie są większe od 5544 jest $5544 - 4104 = 1440$.

Warto sprawdzić, że odpowiedź do zadania można również zapisać w postaci $5544 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{7}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{11}\right)$,

Uwaga. Rozpatrzmy dodatnią liczbę całkowitą n , w której rozkładzie na czynniki pierwsze występują (z niezerowym wykładnikiem) wyłącznie parami różne liczby pierwsze $p_1, p_2, \dots, p_k$.

Oznaczamy wtedy przez $\varphi(n)$ funkcję (nazywaną **funkcją Eulera** lub **tocjentem**), która rozpatrywanej liczbie całkowitej n przypisuje liczbę liczb względnie pierwszych z n , które nie są większe od n .

Wtedy

$$\varphi(n) = n \cdot \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{p_k}\right).$$

Dowód z wykorzystaniem zasady włączeń i wyłączeń przebiega podobnie, jak w rozwiązywaniu powyższego przykładu.

Przykład 7

Rozpatrzmy losowe rozmieszczenie 7 kul (ponumerowanych od 1 do 7) w 7 różnych pudełkach (również ponumerowanych od 1 do 7).

Obliczymy, na ile różnych sposobów można dane kule rozmieścić w tych pudełkach tak, aby w każdym pudełku znalazła się dokładnie jedna kula, której numer jest różny od numeru pudełka.

Rozwiązanie

Zauważmy, że każdy wynik rozmieszczenia 7 parami różnych kul w 7 parami różnych pudełkach można zapisać jako 7-elementową **permutację** $(k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6, k_7)$ zbioru

$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, gdzie przez k_i , dla $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ oznaczyliśmy numer pudełka do którego wpadła kula o numerze i .

Wobec tego wszystkich możliwych rozmieszczeń 7 parami różnych kul w 7 parami różnych pudełkach jest $7! = 5040$.

Mamy obliczyć, ile jest **permutacji** $(k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6, k_7)$, w których $k_i \neq i$ dla $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$.

Obliczymy, ile jest takich **permutacji**, które **nie spełniają** tego warunku.

W tym celu oznaczmy:

- przez A_1 – zbiór tych **permutacji**, w których $k_1 = 1$ (wtedy kula z numerem 1 wpadła do pudełka numer 1),
- przez A_2 – zbiór tych **permutacji**, w których $k_2 = 2$ (wtedy kula z numerem 2 wpadła do pudełka numer 2),
- przez A_3 – zbiór tych **permutacji**, w których $k_3 = 3$ (wtedy kula z numerem 3 wpadła do pudełka numer 3),
- przez A_4 – zbiór tych **permutacji**, w których $k_4 = 4$ (wtedy kula z numerem 4 wpadła do pudełka numer 4),
- przez A_5 – zbiór tych **permutacji**, w których $k_5 = 5$ (wtedy kula z numerem 5 wpadła do pudełka numer 5),
- przez A_6 – zbiór tych **permutacji**, w których $k_6 = 6$ (wtedy kula z numerem 6 wpadła do pudełka numer 6),
- przez A_7 – zbiór tych **permutacji**, w których $k_7 = 7$ (wtedy kula z numerem 7 wpadła do pudełka numer 7).

Zatem wszystkich **permutacji** opisujących sytuację, gdy co najmniej jedna z kul wpadła do pudełka o tym samym numerze jest tyle, ile jest elementów zbioru

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 \cup A_6 \cup A_7.$$

Ponieważ:

$$|A_1| = |A_2| = |A_3| = |A_4| = |A_5| = |A_6| = |A_7| = 6!$$

$$|A_1 \cap A_2| = |A_1 \cap A_3| = \dots = |A_6 \cap A_7| = 5!$$

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = |A_1 \cap A_3 \cap A_4| = \dots = |A_5 \cap A_6 \cap A_7| = 4!$$

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| = \dots = |A_4 \cap A_5 \cap A_6 \cap A_7| = 3!$$

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5| = \dots = |A_3 \cap A_4 \cap A_5 \cap A_6 \cap A_7| = 2!$$

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5 \cap A_6| = \dots = |A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5 \cap A_6 \cap A_7| = 1!$$

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5 \cap A_6 \cap A_7| = 1$$

więc korzystając z zasady włączeń i wyłączeń otrzymujemy stąd, że

$$\begin{aligned}
 &|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 \cup A_6 \cup A_7| = \\
 &= (|A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4| + |A_5| + |A_6| + |A_7|) + \\
 &- (|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + \dots + |A_6 \cap A_7|) + \\
 &+ (|A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| + \dots + |A_5 \cap A_6 \cap A_7|) + \\
 &- (|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| + \dots + |A_4 \cap A_5 \cap A_6 \cap A_7|) + \\
 &+ (|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5| + \dots + |A_3 \cap A_4 \cap A_5 \cap A_6 \cap A_7|) + \\
 &- (|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5 \cap A_6| + \dots + |A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5 \cap A_6 \cap A_7|) + \\
 &+ |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5 \cap A_6 \cap A_7| = \\
 &= \binom{7}{1} \cdot 6! - \binom{7}{2} \cdot 5! + \binom{7}{3} \cdot 4! - \binom{7}{4} \cdot 3! + \binom{7}{5} \cdot 2! - \binom{7}{6} \cdot 1! + \binom{7}{7} \cdot 1 = \\
 &= 7! - \frac{7!}{2!} + \frac{7!}{3!} - \frac{7!}{4!} + \frac{7!}{5!} - \frac{7!}{6!} + \frac{7!}{7!} = \\
 &= 5040 - 2520 + 840 - 210 + 42 - 7 + 1 = 3186.
 \end{aligned}$$

Oznacza to, że wszystkich sposobów rozmieszczenia danych kul w pudełkach tak, aby w każdym pudełku znalazła się dokładnie jedna kula, która ma numer różny od numeru pudełka jest $5040 - 3186 = 1854$.

Otrzymany wynik można również zapisać w postaci

$$\begin{aligned}
 1854 &= 5040 - 3186 = 7! - \left(7! - \frac{7!}{2!} + \frac{7!}{3!} - \frac{7!}{4!} + \frac{7!}{5!} - \frac{7!}{6!} + \frac{7!}{7!} \right) = \\
 &= \frac{7!}{2!} - \frac{7!}{3!} + \frac{7!}{4!} - \frac{7!}{5!} + \frac{7!}{6!} - \frac{7!}{7!} = 7! \cdot \left(\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} \right).
 \end{aligned}$$

Uwaga. **Permutacja** $(k_1, k_2, \dots, k_n)$ zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$, której wyrazy spełniają warunek $k_i \neq i$ dla $i = 1, 2, \dots, n$ nazywana jest *nieporządkiem*.

Liczbę nieporządków danego zbioru n -elementowego oznacza się przez D_n lub za pomocą symbolu $!n$, nazywanego *podsiłnią* (lub *dolną siłnią*).

Wówczas

$$D_n = !n = n! \cdot \left(\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \dots + \frac{1}{n!} \right)$$

Dowód z wykorzystaniem zasady włączeń i wyłączeń przebiega podobnie, jak w rozwiązaniu powyższego przykładu.

Słownik

permutacja zbioru n -elementowego

każdy ciąg utworzony ze wszystkich elementów zbioru n -elementowego

liczba wszystkich permutacji zbioru n -elementowego

liczba wszystkich permutacji zbioru n -elementowego jest równa $P_n = n!$

reguła dodawania

jeżeli zbiory $A_1, A_2, \dots, A_n$ są parami rozłączne, to liczba elementów zbioru $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ jest równa sumie liczb elementów każdego ze zbiorów $A_1, A_2, \dots, A_n$: $|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \dots + |A_n|$

reguła równoliczności

dwa zbiory A i B są równoliczne (mają tyle samo elementów) jeżeli ich elementy można przyporządkować wzajemnie jednoznacznie, to znaczy: każdemu elementowi zbioru A przyporządkujemy dokładnie jeden element zbioru B oraz każdemu elementowi zbioru B przyporządkujemy dokładnie jeden element zbioru A

reguła mnożenia

liczba wszystkich możliwych wyników doświadczenia polegającego na wykonaniu po kolei n czynności, z których pierwsza może zakończyć się na jeden z k_1 sposobów, druga – na jeden z k_2 sposobów, trzecia – na jeden z k_3 sposobów i tak dalej do n -tej czynności, która może zakończyć się na jeden z k_n sposobów, jest równa $k_1 \cdot k_2 \cdot \dots \cdot k_n$

wariacja z powtórzeniami

k -wyrazowy ciąg o elementach wybieranych dowolnie (czyli z powtórzeniami) ze zbioru n -elementowego

liczba wszystkich k -elementowych wariacji z powtórzeniami zbioru n -elementowego

liczba wszystkich k -elementowych wariacji z powtórzeniami zbioru n -elementowego jest równa n^k

Animacja

Polecenie 1

Zapoznaj się z przedstawioną poniżej animacją.

Przeanalizuj zaprezentowane w niej rozwiązanie zadania.

Jest w nim pokazane, jak zastosować zasadę włączeń i wyłączeń do obliczenia, ile jest wszystkich wyników pięciokrotnego rzutu sześcienną kostką do gry, w których suma liczb uzyskanych oczek jest równa 19.

Trwa wczytywanie danych...

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D1DaDEzJ7>

Film nawiązujący do treści materiału dotyczącej metody włączeń i wyłączeń.

Korzystając z rozwiązania zadania omówionego w animacji rozwiąż samodzielnie następujące zadanie.

Polecenie 2

Wykaż, że są 342 czterocyfrowe liczby naturalne, których suma cyfr jest równa 12.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Zaznacz poprawną odpowiedź. Sumę wszystkich dwucyfrowych liczb naturalnych, które dzielą się przez 3 lub dzielą się przez 7 oznaczamy przez s .
Wówczas:

☐ $s = 2208$

☐ $s = 2418$

☐ $s = 2198$

☐ $s = 2393$

Ćwiczenie 2



Rozpatrzmy czterokrotny rzut symetryczną sześcienną kostką do gry. Oblicz, ile jest takich wyników tego doświadczenia, że co najmniej raz wypadły dwa oczka i co najmniej raz wypadły cztery oczka.
Wpisz poprawną liczbę.

Odpowiedź:

Ćwiczenie 3



Rozpatrzmy wszystkie permutacje pięcioelementowego zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Ile jest wśród rozpatrywanych permutacji takich, że wśród ich dowolnych czterech kolejnych wyrazów nie ma czwórki zapisanej w porządku malejącym? Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐ 120

☐ 112

☐ 110

☐ 111

Ćwiczenie 4



W pudełku znajduje się 8 kul, ponumerowanych od 1 do 8. Losujemy z tego pudełka 6 razy po jednej kuli, zwracając ją każdorazowo do pudełka.

Oblicz, ile jest takich wyników tego losowania, że kula z numerem podzielny przez 3 zostanie wylosowana za drugim razem lub za czwartym razem, lub za szóstym razem.

Zakoduj poniżej kolejno cyfry setek, dziesiątek oraz jedności otrzymanego wyniku.

Odpowiedź:

Ćwiczenie 5



Zaznacz wszystkie poprawne odpowiedzi. Rozpatrujemy wszystkie siedmiocyfrowe liczby naturalne, które zostały zapisane przy użyciu cyfr ze zbioru $\{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Oznaczamy przez n liczbę tych spośród rozpatrywanych liczb, w których zapisie każda z dopuszczalnych cyfr wystąpiła co najmniej raz.

Wynika stąd, że:

☐ $n > 7^5$

☐ $n < 6^5$

☐ $n < 20000$

☐ $n > 10000$

Ćwiczenie 6



Oznaczamy:

- przez A – zbiór wszystkich liczb względnie pierwszych z liczbą 999, które nie są większe od 999,
- przez B – zbiór wszystkich liczb względnie pierwszych z liczbą 1000, które nie są większe od 1000,
- przez C – zbiór wszystkich liczb względnie pierwszych z liczbą 1001, które nie są większe od 1001,
- przez D – zbiór wszystkich liczb względnie pierwszych z liczbą 1002, które nie są większe od 1002.

Uporządkuj od najmniejszej do największej liczby $|A|$, $|B|$, $|C|$, $|D|$.



Ćwiczenie 7



Oblicz, ile jest 7-cyfrowych liczb naturalnych, w których zapisie dziesiętnym występują dokładnie 4 różne cyfry.

Odp.

Ćwiczenie 8



Rozpatrzmy zbiory:

A – zbiór wszystkich sześciocyfrowych liczb naturalnych, których suma cyfr jest równa 25,

B – zbiór wszystkich siedmiocyfrowych liczb naturalnych, których suma cyfr jest równa 17,

C – zbiór wszystkich ośmiocyfrowych liczb naturalnych, których suma cyfr jest równa 13,

D – zbiór wszystkich dziewięciocyfrowych liczb naturalnych, których suma cyfr jest równa 11.

Dopasuj do siebie równe liczby.

$|B|$

67353

$|D|$

50016

$|C|$

47631

$|A|$

43741

Ćwiczenie 9



W najstarszej grupie w Przedszkolu Św. Mikołaja jest sześcioro dzieci. Ich rodzice (a każde z tej szóstki dzieci ma innych rodziców) wspólnie postanowili, że na przypadające za miesiąc Mikołajki każda rodzina przygotowuje jedną paczkę z prezentem.

Po miesiącu, szóstego grudnia, każde z dzieci wylosowało dla siebie jeden z przygotowanych prezentów.

Na ile sposobów dzieci z najstarszej grupy w tym przedszkolu mogły rozlosować między sobą przygotowane przez rodziców prezenty, jeżeli wiadomo, że żadne z nich nie dostało prezentu przygotowanego przez swoich rodziców? Wpisz poprawną liczbę.

Odpowiedź:

Dla nauczyciela

Autor: Paweł Kwiatkowski

Przedmiot: Matematyka

Temat: Reguła włączeń i wyłączeń

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

XI. Kombinatoryka.

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto: Zakres rozszerzony

1) oblicza liczbę możliwych sytuacji, spełniających określone kryteria, z wykorzystaniem reguły mnożenia i dodawania (także łącznie) oraz wzorów na liczbę: permutacji, kombinacji i wariacji, również w przypadkach wymagających rozważenia złożonego modelu zliczania elementów;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- posługuje się twierdzeniem o liczbie elementów sumy 2 zbiorów oraz o liczbie elementów sumy 3 zbiorów;
- dowodzi twierdzenie o liczbie elementów sumy 4 zbiorów oraz stosuje je w zadaniach;
- dowodzi wzór opisujący jak stosować zasadę włączeń i wyłączeń w ogólnym przypadku;
- wykorzystuje zasadę włączeń i wyłączeń do obliczenia, ile jest wśród liczb mniejszych od ustalonej dodatniej liczby całkowitej n takich liczb, które są względnie pierwsze z n ;
- wykorzystuje zasadę włączeń i wyłączeń do obliczenia, ile spośród permutacji zbioru n -elementowego to tzw. nieporządki.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona klasa;
- rozmowa nauczająca w oparciu o treści zawarte w sekcji „Animacja” i ćwiczenia interaktywne;
- dyskusja.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel określa temat lekcji: „Reguła włączeń i wyłączeń” oraz cele, wybrana osoba formułuje kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie metodą tekstu przewodniego analizują treści z sekcji „Przeczytaj”. Po zapoznaniu się z każdym z przykładów zgłaszają pytania i napotkane ewentualne problemy, które omawiane są na forum klasy.
2. Nauczyciel prosi uczniów, aby zapoznali się z treścią materiału w sekcji „Animacja”. Następnie na forum klasy wspólnie wyjaśniają ewentualne wątpliwości.
3. W dalszej części uczniowie wykonują w grupach ćwiczenia 3-5. Po zakończeniu każdego ćwiczenia wybrana grupa prezentuje swoje rozwiązanie na forum klasy.
4. Uczniowie rozwiązują indywidualnie ćwiczenia nr 6, 7 i 8. Nauczyciel sprawdza poprawność wykonanych, omawiając je wraz z uczniami.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.

2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, udzielając im tym samym informacji zwrotnej. Wybrany uczeń podsumowuje zajęcia, zwracając uwagę na nabyte umiejętności.

Praca domowa:

1. Uczniowie wykonują ćwiczenia nr 1 i 2 z sekcji „Sprawdź się”.

Materiały pomocnicze:

- [Liczba zdarzeń w doświadczeniach losowych](#)

Wskazówki metodyczne:

- Medium w sekcji „Animacja” można wykorzystać jako materiał służący powtórzeniu materiału w temacie „Reguła włączeń i wyłączeń”.