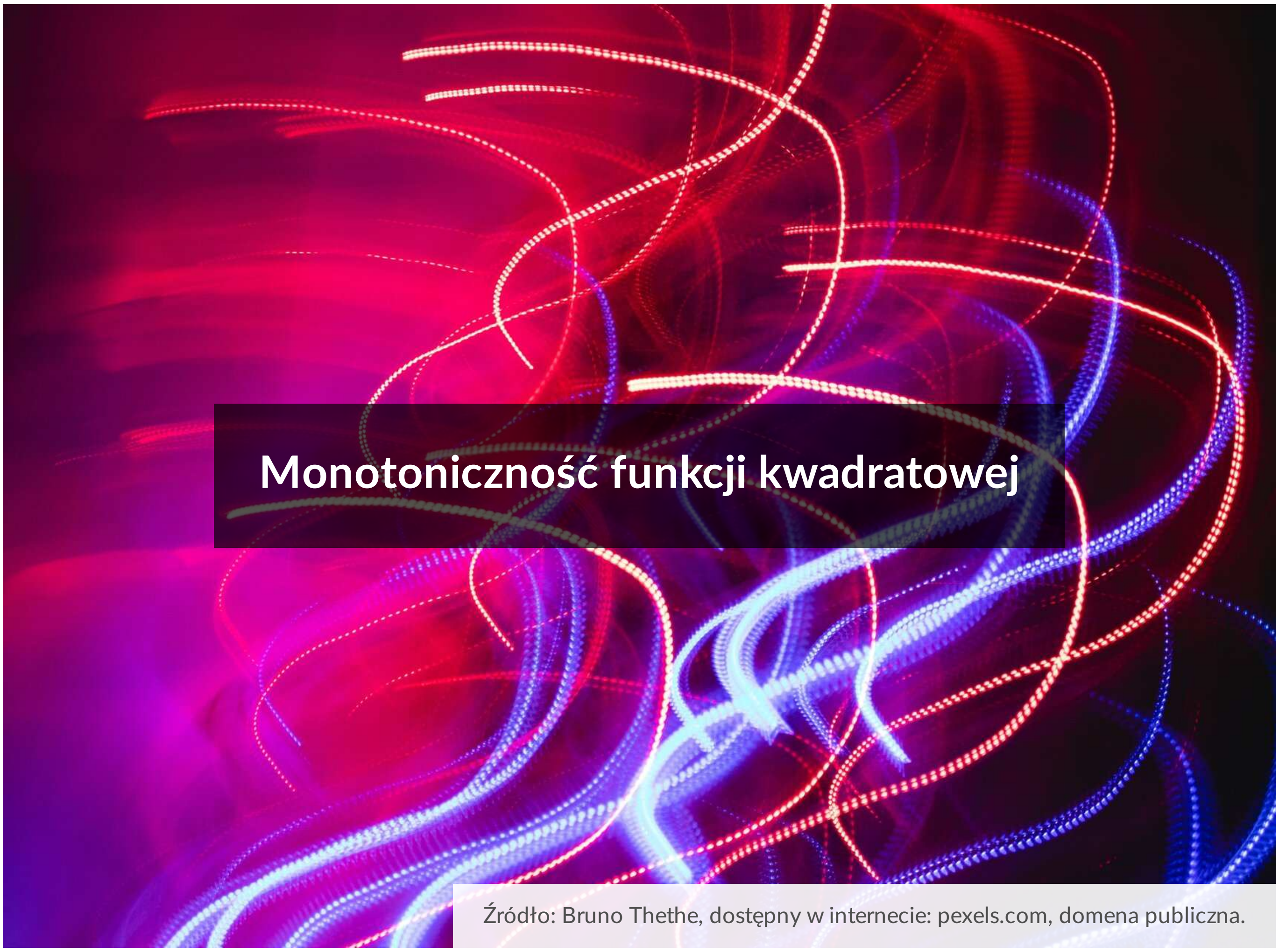
Monotoniczność funkcji kwadratowej



Źródło: Bruno Thethe, dostępny w internecie: pexels.com, domena publiczna.

Każda funkcja, w szczególności funkcja kwadratowa, ma szereg różnych własności, które możemy odczytać ze wzoru lub wykresu. Własności funkcji kwadratowej wykorzystano między innymi budując gigantyczne, paraboliczne lustra, teleskopy i anteny w celu zbierania fal radiowych z kosmosu. Wiązki skierowane na paraboliczną powierzchnię skupiane są w centralnym punkcie. Tym punktem może być wierzchołek paraboli, będącej wykresem funkcji kwadratowej. W znajdowaniu takiego punktu może pomóc umiejętność określania monotoniczności funkcji kwadratowej. A rozwijanie tej umiejętności bedzie właśnie tematem tego materiału.

Twoje cele

- Wyznaczysz przedziały monotoniczności funkcji kwadratowej.
- Ustalisz, w jakim przedziale funkcja kwadratowa jest rosnąca, a w jakim malejąca.
- Odczytasz przedziały monotoniczności funkcji na podstawie jej wzoru lub wykresu.

Przeczytaj

Jeżeli mówimy o monotoniczności funkcji, to określamy przedziały, w których funkcja jest rosnąca, malejąca, stała, niemalejąca lub nierosnąca.

Czasami mówimy, że określamy maksymalne przedziały, w których funkcja jest monotoniczna.

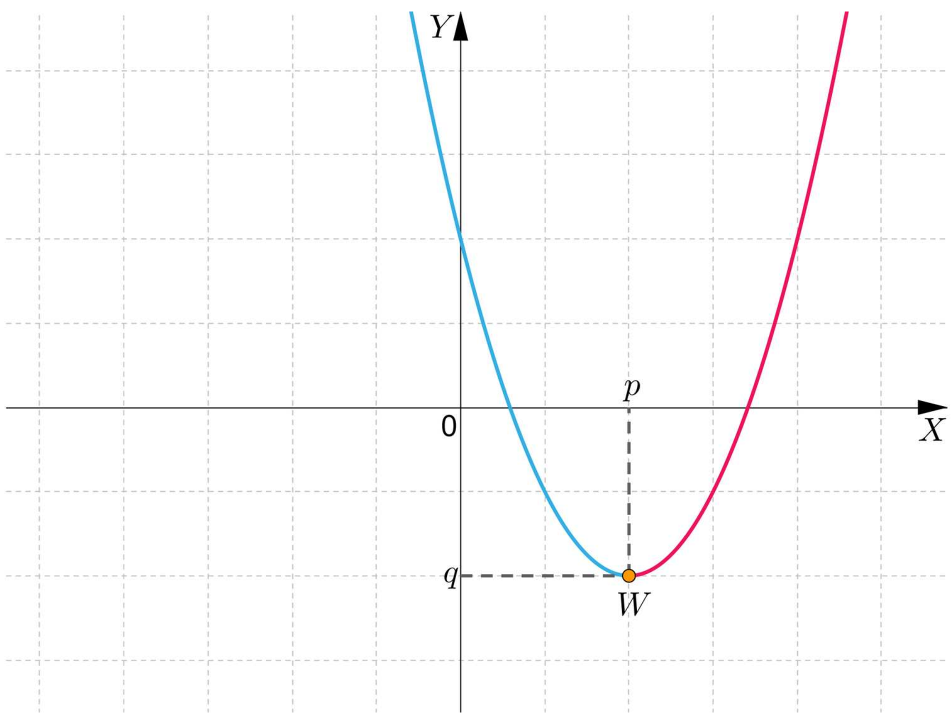
Mając daną parabolę, będącą wykresem funkcji kwadratowej możemy określić monotoniczność funkcji ze względu na to, jak skierowane są ramiona paraboli.

Jeżeli funkcja kwadratowa f jest określona wzorem $f(x) = ax^2 + bx + c$, gdzie a, b, $c \in \mathbb{R}$ oraz $a \neq 0$, to współrzędne wierzchołka $W = (p, q)$ paraboli, która jest wykresem tej funkcji, obliczamy ze wzorów:

$p = \frac{-b}{2a}$, $q = \frac{-\Delta}{4a}$, gdzie $\Delta = b^2 - 4ac$.

Do określenia maksymalnych przedziałów monotoniczności funkcji kwadratowej stosujemy następujące zależności:

- dla $a > 0$:

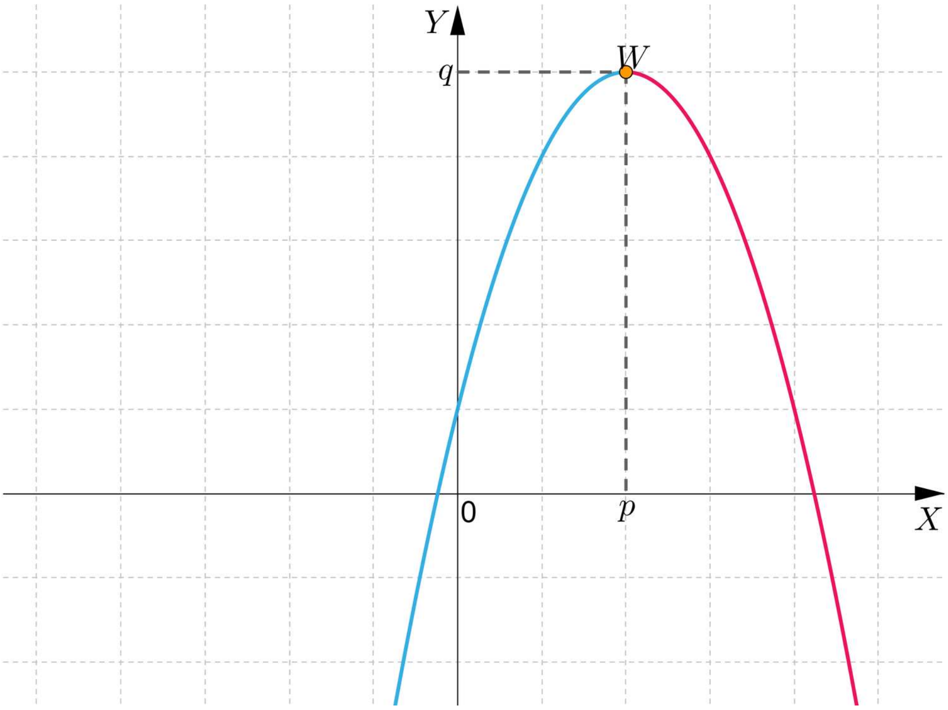


Funkcja jest:

- malejąca w przedziale $(-\infty, p\rangle$,

- rosnąca w przedziale $\langle p, \infty)$.

- dla $a < 0$:



Funkcja jest:

- rosnąca w przedziale $(-\infty, p\rangle$,

- malejąca w przedziale $\langle p, \infty)$.

Wniosek:

Funkcja kwadratowa nie jest monotoniczna w całej swojej dziedzinie, ale jest monotoniczna przedziałami.

Na przykład dla funkcji kwadratowej f określonej wzorem $f(x) = 2x^2 - 1$ mamy:

$f(-2) = 2 \cdot (-2)^2 - 1 = 7$

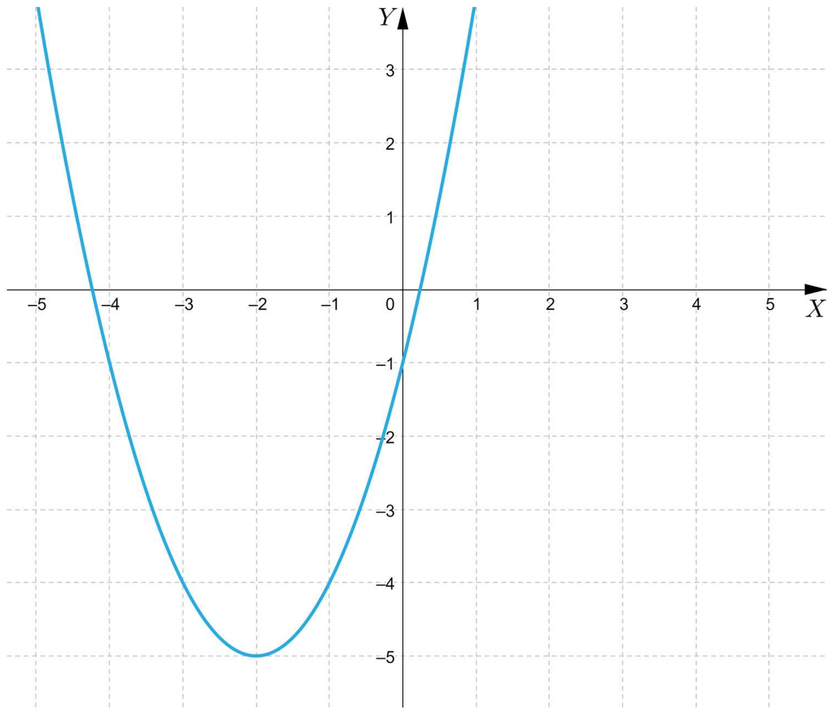
$f(0) = 2 \cdot 0^2 - 1 = -1$

$f(3) = 2 \cdot 3^2 - 1 = 17$

Zauważmy, że $f(-2) > f(0) < f(3)$, zatem funkcja nie jest monotoniczna w całej swojej dziedzinie.

Przykład 1

Odczytamy maksymalne przedziały monotoniczności funkcji kwadratowej, której wykres przedstawiono na poniższym rysunku.



Rozwiązanie:

Niech W będzie wierzchołkiem paraboli, przedstawionej na rysunku. Zatem $W = (-2, -5)$.

Wobec tego:

- maksymalny przedział, w którym funkcja f jest malejąca to $(-\infty, -2\rangle$,
- maksymalny przedział, w którym funkcja f jest rosnąca to $\langle -2, \infty)$.

Przykład 2

Wyznaczymy maksymalne przedziały monotoniczności funkcji kwadratowej f określonej wzorem $f(x) = -2x^2 + \frac{1}{3}x - 1$.

Rozwiązanie:

W celu wyznaczenia maksymalnych przedziałów monotoniczności funkcji f, obliczymy pierwszą współrzędną wierzchołka paraboli, która jest wykresem tej funkcji. Otrzymujemy:

$p = \frac{-\frac{1}{3}}{2 \cdot (-2)} = \frac{1}{12}$.

Ponieważ $a = -2 < 0$, więc ramiona paraboli są skierowane do dołu.

Zatem:

- maksymalny przedział, w którym funkcja f jest rosnąca to $\left(-\infty, \frac{1}{12}\right\rangle$,
- maksymalny przedział, w którym funkcja f jest malejąca to $\left\langle \frac{1}{12}, \infty\right)$.

Jeżeli funkcja kwadratowa f jest zapisana za pomocą wzoru w postaci kanonicznej $f(x) = a(x-p)^2 + q$, to przedziały monotoniczności tej funkcji możemy określić na podstawie wartości współczynników a oraz p.

Przykład 3

Wyznaczymy maksymalne przedziały monotoniczności funkcji f określonej wzorem $f(x) = -(x+4)^2 - 3$.

Rozwiązanie:

Ze wzoru funkcji odczytujemy, że $a = -1$ oraz $p = -4$.

Ponieważ $a < 0$, zatem:

- maksymalny przedział, w którym funkcja f jest rosnąca to $(-\infty, -4\rangle$,
- maksymalny przedział, w którym funkcja f jest malejąca to $\langle -4, \infty)$.

Jeżeli znamy maksymalny przedział, w którym funkcja kwadratowa jest rosnąca lub malejąca, to możemy wyznaczyć wartości współczynników we wzorze tej funkcji.

Przykład 4

Dana jest funkcja kwadratowa f określona wzorem $f(x) = \frac{1}{3}x^2 + bx + 1$. Wyznaczymy wartość współczynnika b, jeżeli wiadomo, że maksymalny przedział, w którym funkcja jest rosnąca to $\langle 3, \infty)$.

Rozwiązanie:

Ponieważ maksymalny przedział, w którym funkcja f jest rosnąca to $\langle 3, \infty)$, zatem pierwsza współrzędna wierzchołka p paraboli, będącej wykresem funkcji kwadratowej wynosi $p = 3$.

Jeżeli wykorzystamy wzór na p, to otrzymujemy równanie na współczynnik b:

$3 = \frac{-b}{2 \cdot \frac{1}{3}}$, zatem $b = -2$.

Przykład 5

Wyznaczymy wartości współczynników a i b we wzorze funkcji kwadratowej $f(x) = ax^2 + bx - 1$, jeżeli wiadomo, że maksymalny przedział, w którym funkcja jest malejąca to $(-\infty, -2\rangle$ oraz do wykresu tej funkcji należy punkt o współrzędnych $(2, 2)$.

Rozwiązanie:

Ponieważ maksymalny przedział, w którym funkcja jest malejąca to $(-\infty, -2\rangle$, zatem $p = -2$, czyli $-2 = \frac{-b}{2a}$.

Ponieważ punkt o współrzędnych $(2, 2)$ należy do wykresu tej funkcji, zatem: $2 = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 - 1$.

Otrzymujemy układ równań:

$$\begin{cases} -2 = \frac{-b}{2a} \\ 2 = 4a + 2b - 1 \end{cases}$$

Pierwsze równanie przekształcamy do postaci $b = 4a$, a po podstawieniu do drugiego równania, otrzymujemy równanie, z którego wyznaczymy wartość współczynnika a:

$2 = 4a + 8a - 1$, czyli $a = \frac{1}{4}$.

Zatem $b = 4 \cdot \frac{1}{4} = 1$.

Monotoniczność funkcji kwadratowej możemy określać także korzystając z definicji funkcji monotonicznej.

Przykład 6

Wykażemy, że funkcja kwadratowa f określona wzorem $f(x) = \sqrt{3}x^2 - 3$ jest malejąca w przedziale $(-\infty, 0\rangle$.

Rozwiązanie:

Niech $x_1, x_2 \in (-\infty, 0\rangle$ oraz $x_1 < x_2$.

Wówczas:

$f(x_1) = \sqrt{3} \cdot {x_1}^2 - 3$

$f(x_2) = \sqrt{3} \cdot {x_2}^2 - 3$

$f(x_2) - f(x_1) = \sqrt{3} \cdot {x_2}^2 - 3 - \left(\sqrt{3} \cdot {x_1}^2 - 3\right) =$

$= \sqrt{3} \cdot {x_2}^2 - 3 - \sqrt{3} \cdot {x_1}^2 + 3 = \sqrt{3} \cdot {x_2}^2 - \sqrt{3} \cdot {x_1}^2 =$

$= \sqrt{3} \cdot (x_2 - x_1) \cdot (x_1 + x_2)$

Zauważmy, że $\sqrt{3} \cdot (x_2 - x_1) \cdot (x_1 + x_2) < 0$, zatem $f(x_1) > f(x_2)$.

Stąd wobec dowolności x_1 oraz x_2 wnioskujemy, że funkcja f jest malejąca w przedziale $(-\infty, 0\rangle$.

Przykład 7

Wyznaczymy, dla jakich wartości parametru m, gdzie $m \in \mathbb{R}$, funkcja kwadratowa f określona wzorem $f(x) = -x^2 + mx - 2$ jest rosnąca w przedziale $\left(-\infty, m^2 - 3m + 1\right\rangle$.

Rozwiązanie:

Obliczamy wartość p pierwszej współrzędnej wierzchołka paraboli, będącej wykresem funkcji f:

$p = \frac{-m}{2\cdot(-1)} = \frac{m}{2}$

Jeżeli funkcja kwadratowa f jest rosnąca w przedziale $\left(-\infty, m^2 - 3m + 1\right\rangle$, to do wyznaczenia wartości parametru m rozwiązujemy nierówność:

$\frac{m}{2} \geq m^2 - 3m + 1$

Nierówność przekształcamy do postaci:

$2m^2 - 7m + 2 \leq 0$

Obliczamy $m_1 = \frac{7-\sqrt{33}}{4}$ oraz $m_2 = \frac{7+\sqrt{33}}{4}$.

Rozwiązaniem nierównoncści jest zbiór liczb $m \in \left\langle \frac{7-\sqrt{33}}{4}, \frac{7+\sqrt{33}}{4} \right\rangle$.

Zatem funkcja f jest rosnąca w przedziale $\left(-\infty, m^2 - 3m + 1\right\rangle$, gdy $m \in \left\langle \frac{7-\sqrt{33}}{4}, \frac{7+\sqrt{33}}{4} \right\rangle$.

Słownik

monotoniczność funkcji

własność funkcji, która określa zmianę wartości tej funkcji wraz ze wzrostem argumentów

funkcja kwadratowa

funkcja określona na zbiorze $\mathbb{R}$ wzorem $f(x) = ax^2 + bx + c$, gdzie a, b, $c \in \mathbb{R}$ oraz $a \neq 0$

Schemat interaktywny

Polecenie 1

Przeanalizuj działanie schematu interaktywnego, dotyczącego wyznaczania przedziałów monotoniczności funkcji kwadratowej określonej wzorem w postaci ogólnej, a następnie wykonaj poniższe polecenia.

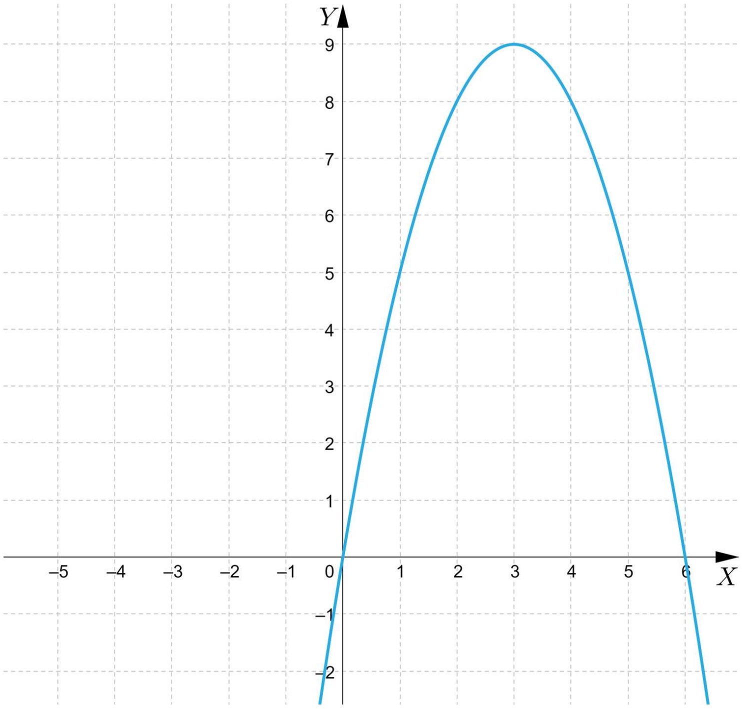
Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DMGYyC4tI

Polecenie 2

Wyznacz maksymalne przedziały monotoniczności funkcji f:

a) określonej za pomocą wzoru $f(x) = 2x^2 + 3x - 1$,

b) jeżeli jej wykres przedstawiono na poniższym rysunku.



Polecenie 3

W poniższym schemacie przygotuj algorytm określający monotoniczność funkcji kwadratowej na podstawie jej wzoru $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Sprawdź się

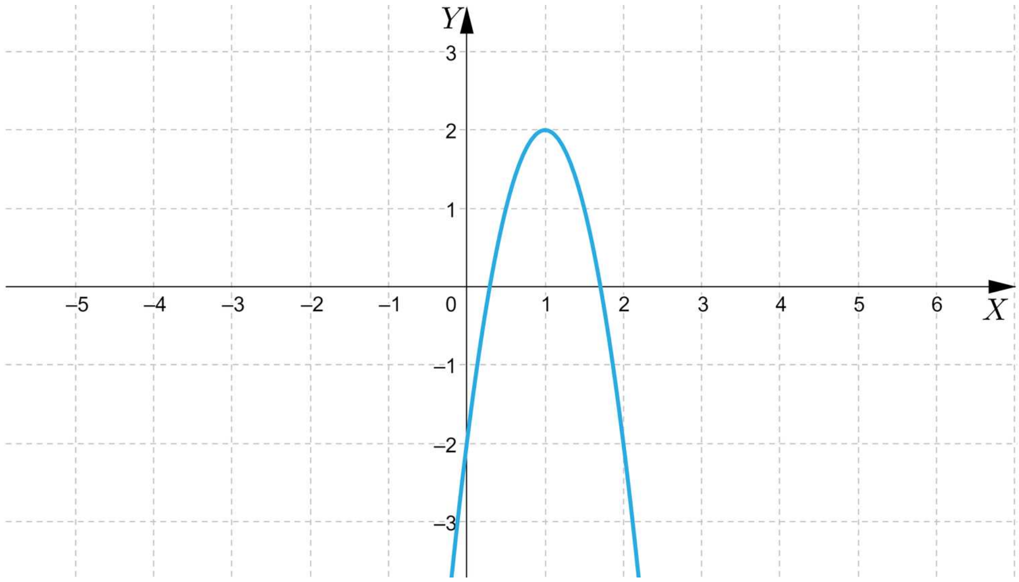
Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

Na rysunku przedstawiono parabolę, będącą wykresem funkcji kwadratowej. Wybierz zdania, które są prawdziwe.



Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

Ćwiczenie 7

Wiadomo, że funkcja kwadratowa f przyjmuje wartości ujemne tylko dla argumentów z przedziału $(-3, 5)$. Określ przedziały monotoniczności funkcji f.

Ćwiczenie 8

Dana jest funkcja f określona wzorem $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + bx + 2$. Wyznacz wartość współczynnika b, jeżeli wiadomo, że maksymalny przedział, w którym funkcja f jest malejąca to $(-\infty, 3\rangle$.

Dla nauczyciela

Autor: Tomasz Wójtowicz

Przedmiot: Matematyka

Temat: Monotoniczność funkcji kwadratowej

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:
Treści nauczania – wymagania szczegółowe:
V. Funkcje. Zakres podstawowy. Uczeń:
8) interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji kwadratowej w postaci ogólnej, kanonicznej i iloczynowej (jeśli istnieje);

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- ustala, w jakim przedziale funkcja kwadratowa jest rosnąca, a w jakim malejąca,
- opisuje sposób postępowania do wyznaczania przedziałów monotoniczności funkcji kwadratowej,
- stosuje poznaną wiedzę do rozwiązywania problemów matematycznych.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja;
- metoda kota i myszy.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Przedstawienie tematu zajęć: „Monotoniczność funkcji kwadratowej” oraz wspólne z uczniami ustalenie kryteriów sukcesu.
2. Uczniowie przygotowują w parach pytania związane z tematem. Czego się uczniowie chcą dowiedzieć? Co ich interesuje w związku z tematem lekcji?

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie indywidualnie przypominają wiadomości na temat monotoniczności funkcji.
2. Uczniowie w parach zapoznają się z treścią sekcji „Przeczytaj”, a następnie metodą kot i mysz rozwiązują przykłady. Mysz stara się jak najlepiej rozwiązać zadania, a kot sprawdza ich poprawność. Po 2 nieudanych próbach kot „łapie mysz”, która odpada z gry. Aby gra toczyła się dalej - role uczniów odwracają się i mysz staje się kotem - procedura się powtarza.
3. Uczniowie zapoznają się indywidualnie z treścią sekcji „Schemat interaktywny” i wykonują zawarte w tej części polecenia. Zapisują ewentualne pytania dotyczące napotkanych trudności, po czym następuje dyskusja, w trakcie której nauczyciel wyjaśnia niezrozumiałe elementy z materiału.
4. Uczniowie wykonują pierwsze dwa ćwiczenia interaktywne z sekcji „Sprawdź się”. Wyniki pracy omawiane są na forum klasy i komentowane przez nauczyciela.
5. W kolejnym kroku uczniowie realizują w parach ćwiczenia 3-5, po ich wykonaniu porównują otrzymane wyniki z inną parą.
6. Uczniowie wykonują ćwiczenia nr 6-8 z sekcji „Sprawdź się”. Nauczyciel sprawdza poprawność wykonanych zadań, omawiając je wraz z uczniami.

Faza podsumowująca:

1. Wybrany uczeń podsumowuje zajęcia, zwracając uwagę na nabyte umiejętności, odnosząc się do wyświetlonych na tablicy interaktywnej celów z sekcji „Wprowadzenie”.

Praca domowa:

1. Uczniowie opracowują FAQ (minimum 3 pytania i odpowiedzi prezentujące przykład i rozwiązanie) do tematu lekcji („Monotoniczność funkcji kwadratowej”).

Materiały pomocnicze:

- Monotoniczność funkcji

Wskazówki metodyczne:

- Materiał w sekcji „Schemat interaktywny” można potraktować jako zadania domowe dotyczące omawianego tematu.
- „Schemat interaktywny” można wykorzystać do realizacji lekcji dotyczącej określania własności funkcji kwadratowej.