



## Wprowadzenie do algorytmów liczbowych

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Animacja](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



## Wprowadzenie do algorytmów liczbowych

Źródło: Rodion Kutsaev, dostępny w internecie: unsplash.com, domena publiczna.

W tym e-materiale powtarzamy wiadomości ze szkoły podstawowej.

Wyobraźmy sobie, że mamy wykonać z pozoru nieskomplikowane działanie – dodać do siebie  $n$  liczb. Dla  $n$  równego 5 lub 10 zapewne bez trudu zrobimy to w pamięci. Jednak co w sytuacji, gdy będziemy musieli dodać np. aż 100 liczb? Zadanie to wciąż nie będzie trudne, jednak zajmie nam sporo czasu, a do tego możemy się wielokrotnie pomylić. Lepszym rozwiązaniem będzie powierzenie tego zadania komputerowi, dzięki któremu otrzymamy pewny wynik i to znacznie szybciej.

Algorytm iteracyjny, któremu poświęcimy ten e-materiał, służy do zapisywania powtarzających się czynności. Wykorzystać możemy go właśnie w problemach matematycznych jak ten przedstawiony wcześniej.

Więcej informacji o algorytmach iteracyjnych znajdziesz w e-materiałach:

- [Algorytmy iteracyjne](#),
- [Algorytmy iteracyjne – obliczanie silni](#),
- [Algorytmy iteracyjne i liczbowe – potęgowanie liczb](#).

Więcej zadań? Sięgnij do e-materiału [Algorytmy iteracyjne i liczbowe – zadania maturalne](#).

**Twoje cele**

- Poznasz pojęcie licznika w algorytmach iteracyjnych.
- Zapiszesz algorytmy iteracyjne rozwiązujące problemy z wykorzystaniem ciągów liczbowych.
- Przeanalizujesz algorytmy obliczania średniej arytmetycznej i geometrycznej za pomocą schematu blokowego, listy kroków oraz pseudokodu.

# Przeczytaj

---

## Algorytmy liczbowe

Na lekcjach matematyki możesz się spotkać z różnymi zadaniami, w których należy kilkakrotnie wykonać określone działania. Rozwiązania takich problemów najlepiej zapisać za pomocą algorytmów iteracyjnych. Dzięki wykorzystaniu instrukcji iteracyjnych otrzymujemy krótki, zrozumiały algorytm, który po implementacji w danym języku programowania może zostać wykonany przez komputer. Rozważmy problem obliczania [średniej arytmetycznej](#).

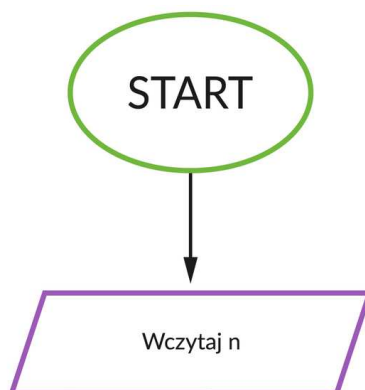
Wyobraź sobie, że chcesz obliczyć średnią arytmetyczną swoich ocen na świadectwie ukończenia szkoły. Aby rozwiązać to zadanie, musisz wykonać następujące działanie:

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}{n},$$

gdzie  $n$  jest liczbą twoich ocen, natomiast  $a_1, a_2, \dots, a_n$  to wartości ocen. Zatem średnia arytmetyczna jest sumą liczb podzieloną przez ich liczbę.

Naszym celem jest obliczenie średniej arytmetycznej. Zaczniemy od pobrania od użytkownika liczby  $n$  (czyli liczby wszystkich ocen, których średnią będziemy obliczać), a następnie na podstawie tej wiadomości wykonamy  $n$  [iteracji](#) pętli, w których będziemy kolejno dodawać pobierane liczby do sumy, zgodnie ze wzorem na średnią. Na końcu obliczymy iloraz otrzymanej sumy przez liczbę  $n$ .

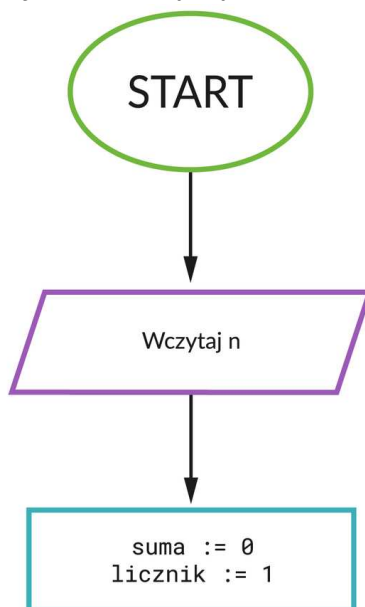
Zapiszmy rozwiązanie problemu w postaci schematu blokowego. Zaczniemy od wczytania liczby  $n$ .



Źródło: Contentplus.pl Sp. z o.o., licencja: CC BY-SA 4.0.

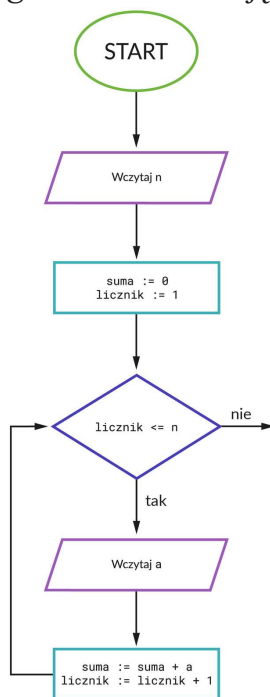
Następnie zmiennej `suma` nadajemy wartość początkową 0. Do niej będziemy dodawać kolejne wartości ocen. Utworzymy także zmienną `licznik`, której nadamy wartość 1. Licznik to bardzo ważna zmienna używana w algorytmach iteracyjnych. Dzięki niej możemy

kontrolować zachowanie pętli, zawiera ona bowiem wartość określającą liczbę wykonanych iteracji pętli, czyli wskazuje, ile razy zostały powtórzone określone instrukcje. Z każdą kolejną iteracją wartość zmiennej `licznik` jest zwiększana o 1. W naszym przypadku rozpoczynamy od iteracji pierwszej, a skończymy na iteracji n-tej.



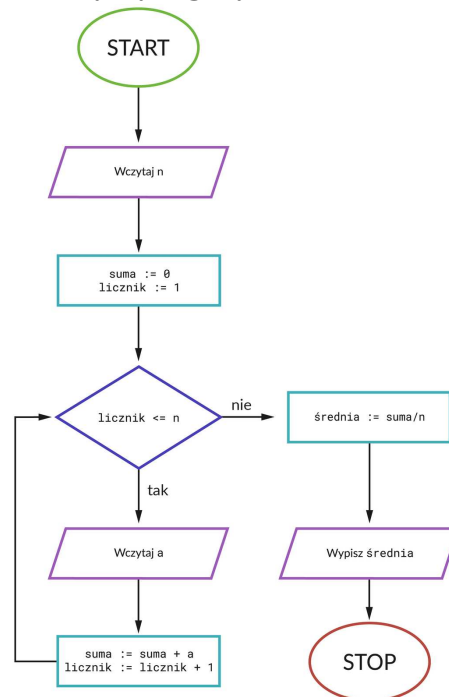
Źródło: Contentplus.pl Sp. z o.o., licencja: CC BY-SA 3.0.

Kolejnym krokiem jest sprawdzenie, czy nasz licznik jest mniejszy lub równy n, a więc czy wykonano już n iteracji pętli (czy zostało pobranych i dodanych już do siebie n liczb). Jeżeli warunek ten jest spełniony, to znaczy, że pozostała nam do dodania co najmniej jedna liczba. Pobieramy ją zatem od użytkownika, a następnie dodajemy ją do zmiennej `suma` i zwiększamy licznik o 1, aby zapisać, że kolejna iteracja została wykonana. Wtedy ponownie wracamy do sprawdzenia warunku, zgodnie z definicją pętli.



Źródło: Contentplus.pl Sp. z o.o., licencja: CC BY-SA 3.0.

Jeżeli warunek nie jest spełniony (czyli licznik osiągnął wartość większą od  $n$ ), to znaczy, że zostało wykonanych już  $n$  iteracji pętli. Możemy wtedy podzielić obliczoną sumę wszystkich liczb przez ich liczbę, zgodnie ze wzorem na średnią arytmetyczną. Po tej operacji wypisujemy średnią i kończymy algorytm.



Źródło: Contentplus.pl Sp. z o.o., licencja: CC BY-SA 3.0.

Schemat blokowy przedstawia kompletny algorytm obliczania średniej arytmetycznej  $n$  liczb podanych przez użytkownika. W przypadku naszego zadania, w którym musimy obliczyć średnią arytmetyczną wszystkich ocen ze świadectwa ukończenia szkoły, opracowany program:

- pobierze od użytkownika liczbę wszystkich ocen,
- następnie wykona  $n$  iteracji wczytujących kolejne oceny i dodających je do zmiennej *suma*,
- podzieli wartość zmiennej *suma* przez liczbę wszystkich ocen i wypisze ją na ekran.

Z kolejnych części e-materiału dowiesz się, w jaki sposób analogicznie opracować schemat blokowy i pseudokod algorytmu obliczającego średnią geometryczną, a następnie wykonasz samodzielnie kilka zadań związanych z tworzeniem algorytmów liczbowych.

## Słownik

**algorytm liczbowy**

algorytm wykorzystujący działania na liczbach

**iteracja**

czynność powtarzania tej samej operacji określoną liczbę razy lub do momentu, w którym zadany warunek zostanie spełniony

## licznik

zmienna określająca aktualną liczbę wykonanych iteracji pętli

## średnia arytmetyczna

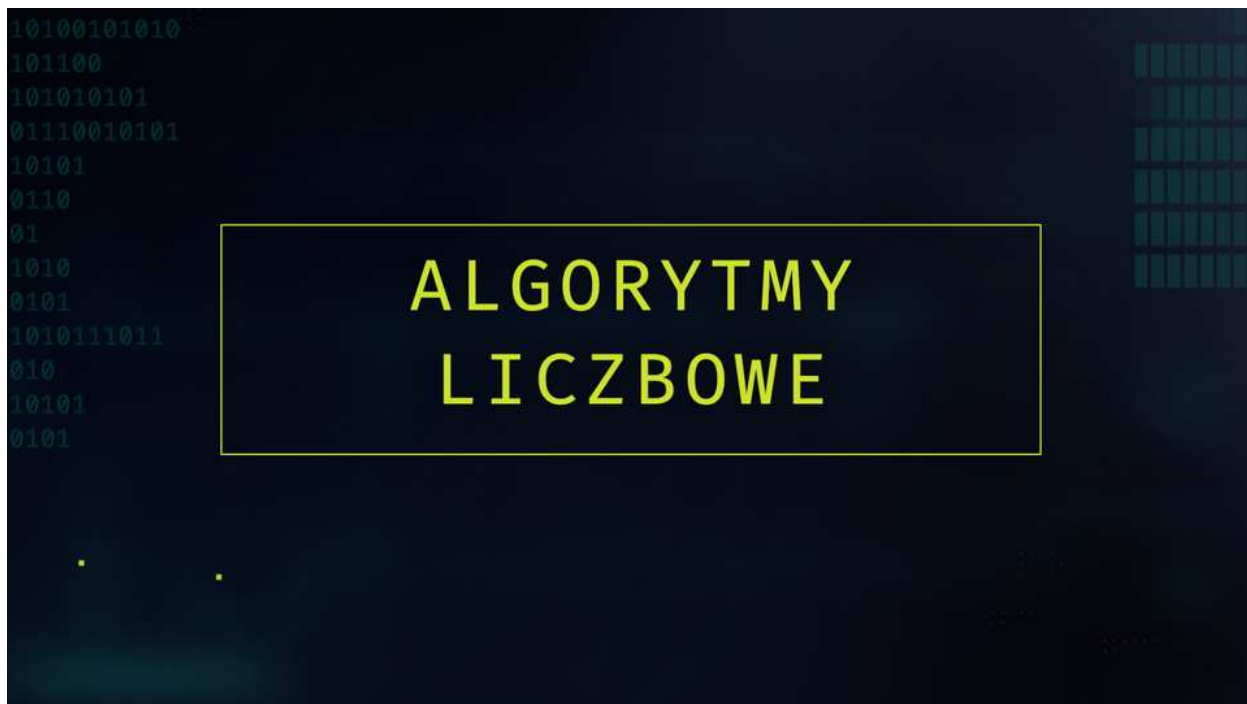
suma liczb podzielona przez ich liczbę

# Animacja

---

## Polecenie 1

Zapoznaj się z animacją, dotyczącą algorytmów liczbowych i wykonaj ćwiczenie.



Film dostępny pod adresem </preview/resource/RyteK9oLQ0Tuu>

Źródło: Contentplus.pl Sp. z o.o., licencja: CC BY-SA 3.0.

Film dotyczący algorytmów liczbowych.

---

## Ćwiczenie 1

Podaj przykład innego algorytmu liczbowego, który możesz wykorzystać do rozwiązania wybranego problemu matematycznego. Zapisz jego specyfikację.

## Polecenie 2

Przygotuj notatkę podsumowującą najważniejsze informacje przedstawione w animacji.

# Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

## Ćwiczenie 1



Zaznacz, które stwierdzenia są prawdziwe, a które fałszywe.

Stwierdzenie	Prawda	Fałsz
Licznik to zmienna używana w algorytmach iteracyjnych.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
Dzięki licznikowi możemy kontrolować zachowanie pętli.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
Licznik zawiera wartość określającą liczbę wykonanych iteracji pętli.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
Licznik to wielokrotne wykonywanie ciągu tych samych instrukcji.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>

## Ćwiczenie 2



Wskaż, jaka wartość zapisana jest w zmiennej `i` po trzeciej iteracji pętli w algorytmie obliczania średniej geometrycznej 25 kolejnych liczb naturalnych, gdzie użytkownik podaje liczby w kolejności 1, 2, ..., 25.

24

6

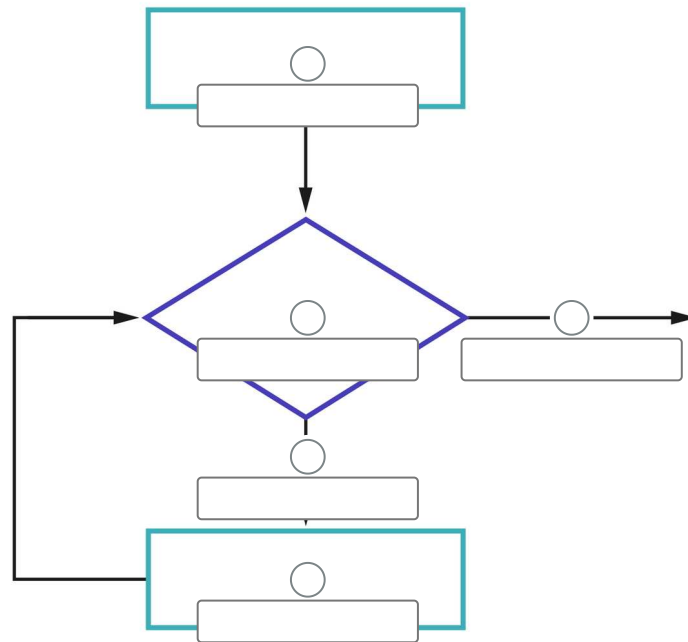
3

2

### Ćwiczenie 3



Uzupełnij część schematu blokowego pętli wykorzystującej licznik do kontrolowania zachowania pętli.



Zródło: Contentplus.pl Sp. z o.o., licencja: CC BY-SA 3.0.

## Ćwiczenie 4



Uzupełnij pseudokod algorytmu obliczania sumy kwadratów  $n$  liczb podanych przez użytkownika.

wczytaj

suma

dla licznik = 1, 2, ...,  wykonuj:

wczytaj a

kwadrat :=  \*

suma := suma

wypisz

## Ćwiczenie 5



Zapisz algorytm obliczający średnią ważoną z  $n$  liczb o wagach podanych przez użytkownika za pomocą pseudokodu lub listy kroków.

Średnią ważoną wyraża się wzorem

$$x = \frac{w_1x_1 + w_2x_2 + \dots + x_nw_n}{w_1 + w_2 + \dots + w_n},$$

gdzie  $x_1, x_2, \dots, x_n$  to zbiór elementów, których średnią ważoną chcemy obliczyć, a  $w_1, w_2, \dots, w_n$  to ich wagi.

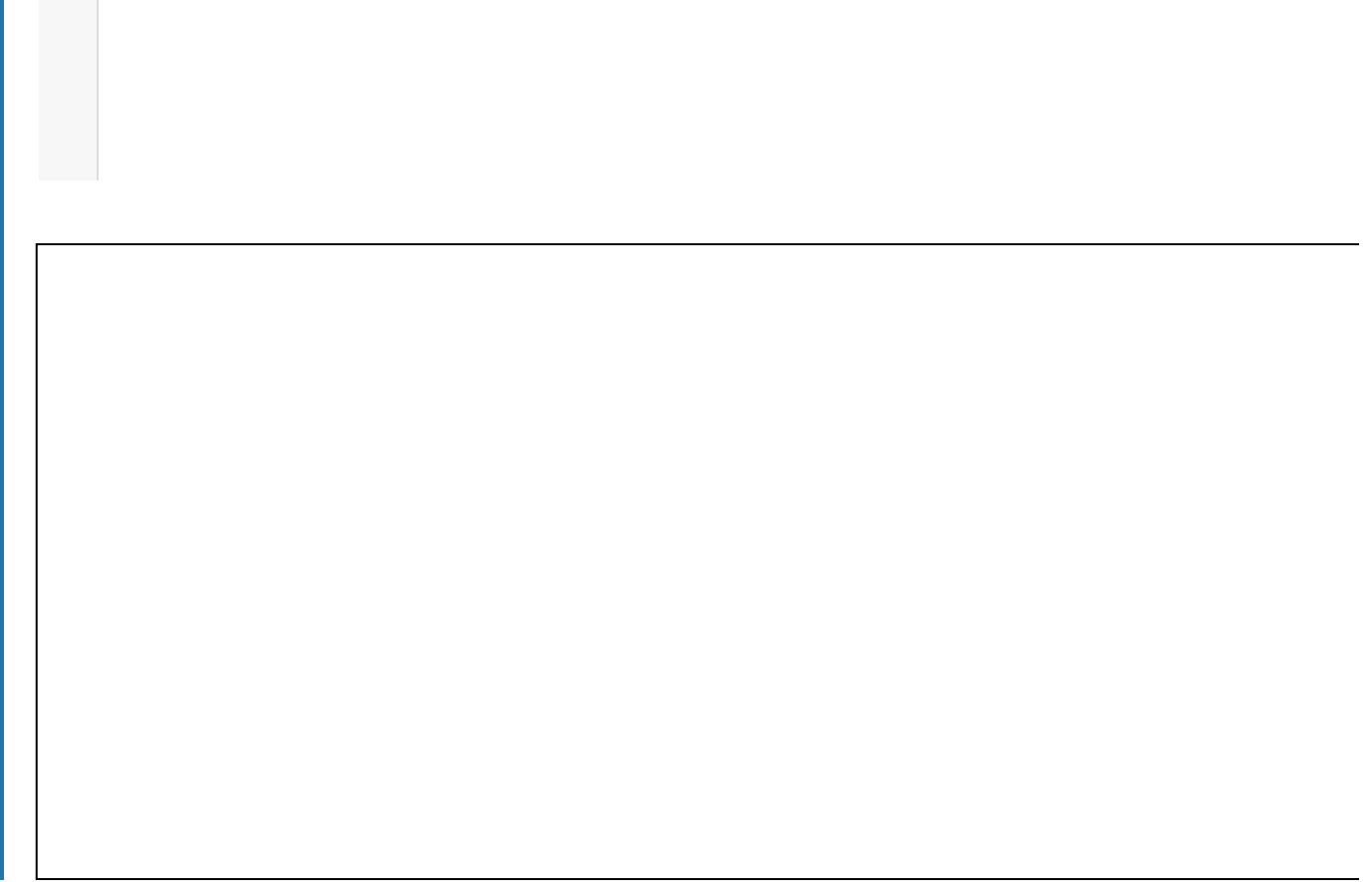
### Specyfikacja:

*Dane:*

- $n$  – ilość danych (liczba naturalna),
- $\langle x_1, x_n \rangle$  – zbiór liczb podanych przez użytkownika,
- $\langle w_1, w_n \rangle$  – zbiór wag podanych przez użytkownika

*Wynik:*

- `srednia` – średnia ważona wprowadzonych przez użytkownika liczb



## Ćwiczenie 6



Bakteria w hodowli dzieli się na dwie średnio co  $x$  minut. Zapisz algorytm obliczający liczbę bakterii po  $z$  godzinach, zakładając, że na początku mamy  $y$  bakterii. Algorytm zapisz w postaci pseudokodu lub listy kroków. Swoje rozwiązanie spróbuj przygotować w taki sposób, aby parametry wejściowe można było łatwo zmienić.

Swoje rozwiązanie przetestuj dla hodowli, w której bakterie dzielą się średnio co 9,8 minuty. Jej stan początkowy wynosi 4 bakterie i chcemy sprawdzić, ile bakterii będzie liczyć hodowla po 2 godzinach.

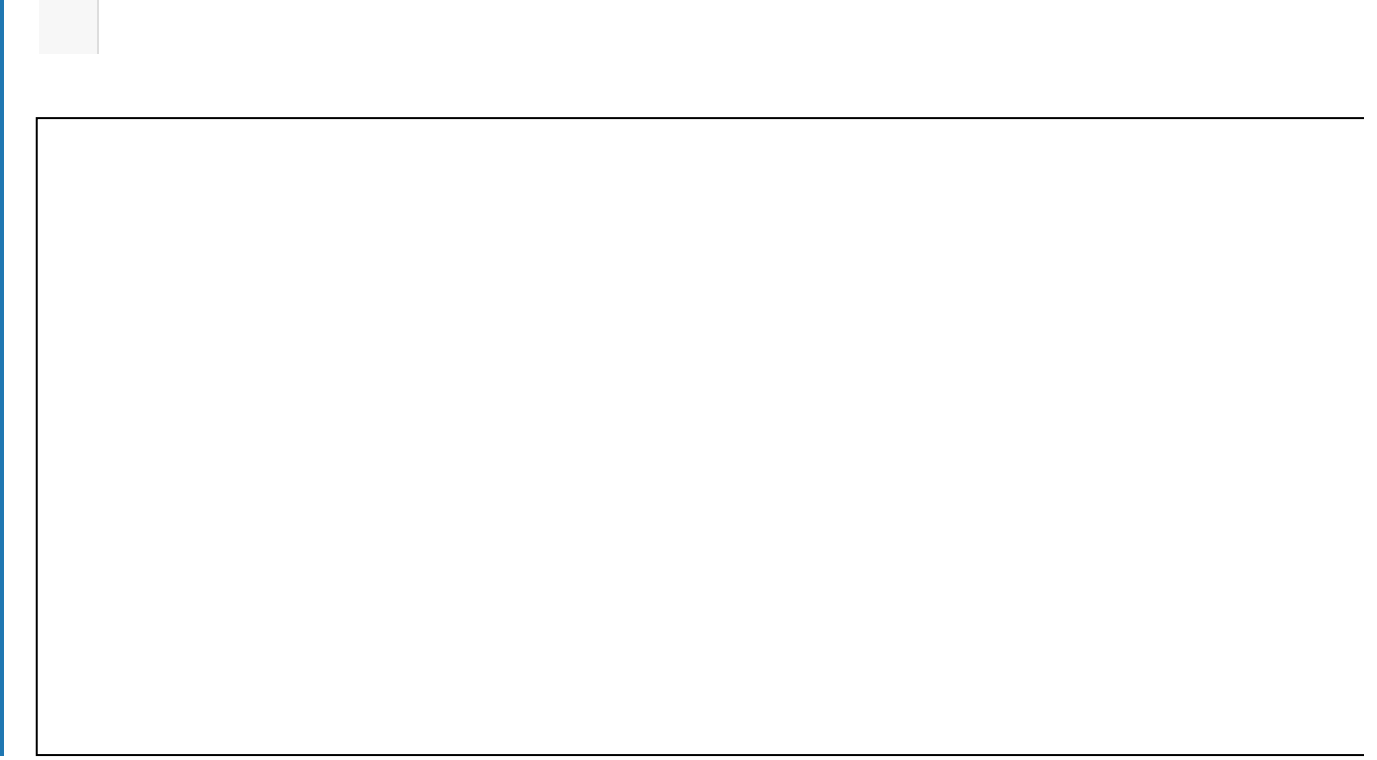
### Specyfikacja:

#### *Dane:*

- $y$  – liczba bakterii (liczba naturalna),
- $z$  – liczba godzin hodowli (liczba naturalna),
- $x$  – podany w minutach czas, po którym następuje podział bakterii; dodatnia liczba rzeczywista

#### *Wynik:*

- $y$  – liczba bakterii po  $z$  godzinach (liczba naturalna)



## Ćwiczenie 7



Ułóż podane czynności w odpowiedniej kolejności. Jeden krok został podany błędnie i nie powinien być nigdzie dopasowany.

Wyobraź sobie, że chcesz pomalować kilka ścian w swoim mieszkaniu. Aby wiedzieć, ile farby jest potrzebne, musisz znać sumę powierzchni wszystkich ścian, które chcesz pomalować.

Ułóż listę kroków algorytmu obliczającego całkowitą powierzchnię ścian, pobierając od użytkownika liczbę ścian  $n$ , a także wysokość i szerokość każdej ściany.

1. Rozpocznij algorytm.

2.

3. Wczytaj liczbę  $n$ .

4.

5.

6.

7.

8.

9.

10. Zakończ algorytm.

Wypisz wartość całkowita\_powierzchnia.

Pomnóż wysokość razy szerokość i zapisz wynik w pole\_ściany.

Dodaj do całkowita\_powierzchnia wartość pole\_ściany.

Zmiennej całkowita\_powierzchnia przypisz wartość 0, a licznik wartość 1.

Jeżeli licznik  $\leq n$  przejdź do kroku 5, w przeciwnym wypadku do kroku 9.

Wypisz wartość pole\_ściany.

Zwiększ licznik o jeden i przejdź do kroku 4.

Wczytaj wartości zmiennych wysokość oraz szerokość.

## Ćwiczenie 8



Uzupełnij pseudokod algorytmu stworzonego w poprzednim zadaniu.

wczytaj

całkowita\_powierzchnia :=

dla  = 1, 2, ... n wykonuj

    wczytaj szerokość

    wczytaj

    pole\_ściany := szerokość \*

    całkowita\_powierzchnia := całkowita\_powierzchnia +

wypisz

# Dla nauczyciela

---

**Autor:** Zespół autorski [Contentplus.pl](https://www.contentplus.pl) sp. z o.o.

**Przedmiot:** Informatyka

**Temat: Wprowadzenie do algorytmów liczbowych**

**Grupa docelowa:**

Liceum ogólnokształcące i technikum, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres podstawowy i rozszerzony

**Podstawa programowa:**

Cele kształcenia – wymagania ogólne

I. Rozumienie, analizowanie i rozwiązywanie problemów na bazie logicznego i abstrakcyjnego myślenia, myślenia algorytmicznego i sposobów reprezentowania informacji.

Treści nauczania – wymagania szczegółowe

I. Rozumienie, analizowanie i rozwiązywanie problemów.

Zakres podstawowy. Uczeń:

2) stosuje przy rozwiązywaniu problemów z różnych dziedzin algorytmy poznane w szkole podstawowej oraz algorytmy:

e) obliczania wartości elementów ciągu metodą iteracyjną i rekurencyjną, w tym wartości elementów ciągu Fibonacciego.

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

2) do realizacji rozwiązania problemu dobiera odpowiednią metodę lub technikę algorytmiczną i struktury danych;

II. Programowanie i rozwiązywanie problemów z wykorzystaniem komputera i innych urządzeń cyfrowych.

Zakres podstawowy. Uczeń:

1) projektuje i programuje rozwiązania problemów z różnych dziedzin, stosuje przy tym: instrukcje wejścia/wyjścia, wyrażenia arytmetyczne i logiczne, instrukcje

warunkowe, instrukcje iteracyjne, funkcje z parametrami i bez parametrów, testuje poprawność programów dla różnych danych; w szczególności programuje algorytmy z punktu I.2);

### **Kształtowane kompetencje kluczowe:**

- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii.

### **Cele operacyjne (językiem ucznia):**

- Poznasz pojęcie licznika w algorytmach iteracyjnych.
- Zapiszesz algorytmy iteracyjne rozwiązujące problemy z wykorzystaniem ciągów liczbowych.
- Przeanalizujesz algorytmy obliczania średniej arytmetycznej i geometrycznej za pomocą schematu blokowego, listy kroków oraz pseudokodu.

### **Strategie nauczania:**

- konstruktywizm;
- konektywizm.

### **Metody i techniki nauczania:**

- dyskusja;
- rozmowa nauczająca z wykorzystaniem multimediu i ćwiczeń interaktywnych;
- ćwiczenia praktyczne.

### **Formy pracy:**

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

### **Środki dydaktyczne:**

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda;
- telefony z dostępem do internetu.

### **Przebieg lekcji**

## Przed lekcją:

1. **Przygotowanie do zajęć.** Nauczyciel loguje się na platformie i udostępnia e-materiał: „Wprowadzenie do algorytmów liczbowych”. Nauczyciel prosi uczniów o zapoznanie się z multimedium w sekcji „Animacja”.

## Faza wstępna:

1. Nauczyciel wyświetla uczniom temat zajęć oraz cele. Prosi, by na ich podstawie uczniowie sformułowali kryteria sukcesu.
2. Prowadzący prosi uczniów, aby zgłaszali swoje propozycje pytań do tematu. Jedna osoba może zapisywać je na tablicy. Gdy uczniowie wyczerpią swoje pomysły, a pozostały jakieś ważne kwestie do poruszenia, nauczyciel je dopowiada.

## Faza realizacyjna:

1. **Praca z tekstem.** Uczniowie przystępują do cichego czytania tekstu e-materiału. Indywidualnie zapoznają się z treścią w sekcji „Przeczytaj”.
2. **Praca z multimedium.** Nauczyciel wyświetla zawartość sekcji „Animacja”. Uczniowie wspólnie zapoznają się z jego treścią. Zapisują ewentualne problemy i pytania. Po czym następuje dyskusja, w trakcie której nauczyciel wyjaśnia niezrozumiałe treści. Następnie uczniowie zastanawiają się, w jaki sposób można zmodyfikować pseudokod, aby obliczyć średnią geometryczną  $n+5$  liczb, a więc by instrukcje zawarte w pętli wykonały się  $n+5$  razy.
3. **Ćwiczenie umiejętności.** Uczniowie wykonują indywidualnie ćwiczenia nr 1-8. Po wykonaniu każdego z nich następuje omówienie rozwiązania przez nauczyciela.

## Faza podsumowująca:

1. Nauczyciel zadaje pytania podsumowujące, np.
  - jak nazywamy algorytm wykorzystujący działania na liczbach?
  - jak nazywamy zmienną określającą aktualną liczbę wykonanych iteracji pętli?
  - co to jest średnia arytmetyczna?
  - na czym polega iteracja?
2. Wybrany uczeń podsumowuje zajęcia, zwracając uwagę na nabyte umiejętności.

## Praca domowa:

1. Uczniowie wykonują polecenie:  
Zaprojektuj schemat blokowy, który przedstawi algorytm rozwiązania równania kwadratowego.

## Wskazówki metodyczne:

- Treści w sekcji „Animacja” można wykorzystać jako materiał służący powtórzeniu materiału.