



Wielkości wprost proporcjonalne

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Schemat interaktywny
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela



Wielkości wprost proporcjonalne

Źródło: dostępny w internecie: pxfuel.com, domena publiczna.

Istnieje wiele modeli matematycznych, które opisują i pomagają w rozwiązaniu problemów z życia codziennego. Jednym z takich modeli są wielkości wprost proporcjonalne, które spotykamy na przykład w przepisach kulinarnych. Poniżej przedstawiono przepis na wykonanie pączków. Z zaproponowanej ilości składników wykonamy 15 pączków.

Pączki

Składniki:

Ciasto drożdżowe:

- 500 g mąki pszennej
- 50 g świeżych drożdży (lub 14 g drożdży instant)
- 100 g masła (lub margaryny)
- 100 g cukru
- 4 żółtka
- 1 jajko
- 250 ml mleka

Dodatkowo:

- 1 jajko
- do wyboru: dowolny dżem, powidła, krem orzechowo-czekoladowy



Bazując na wiedzy teoretycznej oraz omówionych przykładach, rozwiążemy ćwiczenia interaktywne.

Twoje cele

- Rozpoznasz wielkości wprost proporcjonalne.
- Podasz przykłady wielkości wprost proporcjonalnych.
- Wyznaczysz wielkości wprost proporcjonalne.
- Wykorzystasz własności proporcji do rozwiązywania zadań.

Przeczytaj

W życiu codziennym spotykamy się z sytuacjami, gdy iloraz pewnych wielkości jest stały:

- iloraz odległości w jakiej uderza piorun do czasu, po jakim usłyszymy grzmot,
- iloraz odległości w terenie do odpowiadającej jej odległości na mapie,
- iloraz wartości zakupionego towaru do jego masy,
- iloraz stawki podatku do kwoty, która podlega opodatkowaniu.

Definicja: wielkości wprost proporcjonalne

Dwie dodatnie wielkości są wprost proporcjonalne, gdy iloraz odpowiadających sobie wartości tych wielkości jest stały.

W przypadku wielkości wprost proporcjonalnych, wzrost lub zmniejszenie jednej wielkości, powoduje wzrost lub odpowiednio zmniejszenie drugiej wielkości tyle samo razy.

Wielkościami wprost proporcjonalnymi są na przykład:

- długość boku kwadratu i jego obwód,
- długość promienia koła i jego obwód,
- liczba jednakowych pojemników i objętość wody, którą możemy do nich wlać.

Jeżeli wprowadzimy oznaczenia:

$a : b$ – iloraz liczb a i b , gdzie $b \neq 0$,

$c : d$ – iloraz liczb c i d , gdzie $d \neq 0$,

to równość dwóch ilorazów $a : b = c : d$ nazywa się **proporcją**.

Liczby a i d nazywamy wyrazami skrajnymi, a liczby b i c wyrazami środkowymi.

W obliczeniach stosuje się zapis $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, co jest równoważne zapisowi $a \cdot d = b \cdot c$ (iloczyn wyrazów skrajnych jest równy iloczynowi wyrazów środkowych). Taki zapis proporcji zastosujemy do rozwiązywania zadań. Mówimy, że do rozwiązywania proporcji stosujemy metodę „na krzyż”.

Przykład 1

W tabeli przedstawiono wielkości x i y , które są wprost proporcjonalne. Wyznacz wartości liczb k , l oraz m .

x	5	k	9	m
y	8	10	l	12

Rozwiązanie:

Jeżeli wielkości x i y są wprost proporcjonalne, to możemy ułożyć następujące proporcje:

$$\frac{5}{8} = \frac{k}{10}, \text{ zatem } k = 6,25,$$

$$\frac{5}{8} = \frac{9}{l}, \text{ zatem } l = 14,4,$$

$$\frac{5}{8} = \frac{m}{12}, \text{ zatem } m = 7,5.$$

Przykład 2

Rozwiążemy równanie zapisane w postaci proporcji $\frac{3x-5}{4} = \frac{2x+3}{3}$.

Rozwiązanie:

Iloczyn wyrazów skrajnych jest równy iloczynowi wyrazów środkowych, zatem:

$$3 \cdot (3x - 5) = 4 \cdot (2x + 3), \text{ czyli } 9x - 15 = 8x + 12.$$

Rozwiązaniem równania jest liczba $x = 27$.

Przykład 3

W pewnej szkole uczy się 520 uczniów. Stosunek liczby dziewcząt do liczby chłopców jest równy 6 : 7. Wyznamy liczbę dziewcząt i liczbę chłopców w tej szkole.

Rozwiązanie:

Jeżeli przez x oznaczymy liczbę dziewcząt w tej szkole, to liczba chłopców wynosi $520 - x$ oraz $0 < x < 520$.

Układamy i rozwiązujemy równanie zapisane w postaci proporcji:

$$\frac{x}{520-x} = \frac{6}{7}.$$

Zatem $7 \cdot x = 6 \cdot (520 - x)$, czyli

$$x = 240,$$

$$520 - x = 280.$$

Liczba dziewcząt uczęszczających do tej szkoły wynosi 240, a chłopców 280.

Przykład 4

Motocykl pokonał trasę 180 km w ciągu 4,5 h. Obliczymy, jaką długość miałaby trasa, którą pokonałby ten motocykl w ciągu 6 godzin, gdyby utrzymał tę samą średnią prędkość.

Rozwiązanie:

Jeżeli przez x oznaczymy trasę pokonaną w ciągu 6 h, to do wyznaczenia długości tej trasy rozwiążemy równanie zapisane w postaci proporcji:

$$\frac{180}{4,5} = \frac{x}{6}, \text{ zatem } 6 \cdot 180 = 4,5 \cdot x, \text{ czyli } x = 240.$$

Przy tej samej prędkości, motocykl w ciągu 6 h pokonałby trasę długości 240 km.

Przykład 5

Odcinek podzielono na dwa mniejsze odcinki, których stosunek długości wynosi 3 : 5. Wyznaczymy, jaka jest długość tego odcinka, jeżeli mniejsza część jest o 10 krótsza od większej części.

Rozwiązanie:

Wprowadźmy następujące oznaczenia:

x – długość krótszej części odcinka,

$x + 10$ – długość dłuższej części odcinka.

Układamy i rozwiązujemy równanie zapisane w postaci proporcji:

$$\frac{3}{5} = \frac{x}{x+10}, \text{ zatem } 5 \cdot x = 3 \cdot (x + 10).$$

Po rozwiązaniu równania otrzymujemy, że $x = 15$, zatem krótsza część odcinka ma długość 15, a dłuższa 25.

Wobec tego cały odcinek ma długość 40.

Przykład 6

Wiadomo, że 40 ziarenek kawy waży 4,8 g. Obliczymy, ile waży jedno ziarenko kawy.

Rozwiązanie:

Jeżeli przez x oznaczymy masę jednego ziarenka kawy, to do wyznaczenia wartości x rozwiązujemy równanie zapisane w postaci proporcji:

$$\frac{4,8}{40} = \frac{x}{1}, \text{ zatem } x = 0,12.$$

Jedno ziarenko kawy ma masę 0,12 g.

Słownik

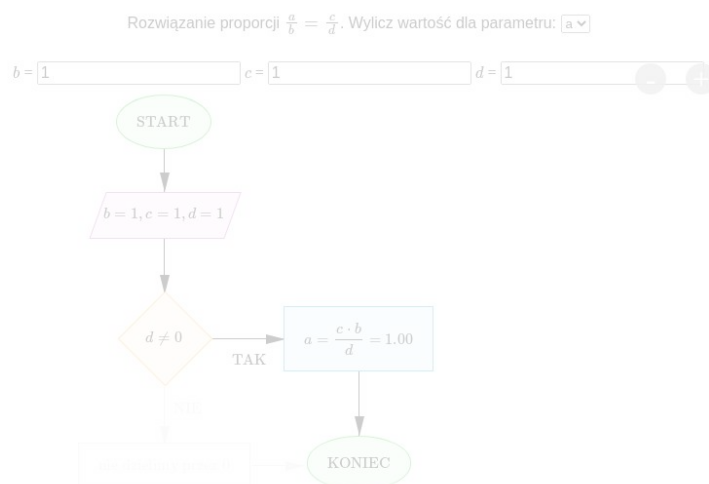
proporcja

równość dwóch ilorazów

Schemat interaktywny

Polecenie 1

Przeanalizuj działanie schematu interaktywnego, dotyczącego rozwiązywania równania w postaci proporcji, a następnie wykonaj poniższe polecenie.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DWpyzZ663>

Polecenie 2

Rozwiąż równania:

a) $\frac{x-1}{3} = \frac{2}{x+1}$


b) $\frac{2x-3}{x-2} = \frac{5}{3}$

c) $\frac{x-5}{x} = \frac{2x}{x-1}$

Polecenie 3

W poniższym schemacie przygotuj algorytm wyliczający wybraną wartość parametru z proporcji.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Ćwiczenie 2



Ćwiczenie 3



Ćwiczenie 4



Ćwiczenie 5



Ćwiczenie 6



Ćwiczenie 7



Ćwiczenie 8



Rozwiąż zadania:

a) Na upieczenie 18 babeczek potrzeba 540 dag mąki. Ile mąki potrzeba na wykonanie 30 takich babeczek?

b) Zegarek spóźnia się 3 sekundy w ciągu 2 minut. Po jakim czasie spóźnienie będzie wynosiło 1,5 minuty?

Dla nauczyciela

Autor: Tomasz Wójtowicz

Przedmiot: Matematyka

Temat: Wielkości wprost proporcjonalne

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

Treści nauczania – wymagania szczegółowe:

V. Funkcje. Zakres podstawowy. Uczeń:

5) interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji liniowej;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- rozpoznaje wielkości wprost proporcjonalnych,
- podaje przykłady wielkości wprost proporcjonalnych,
- wyznacza wielkości wprost proporcjonalne,
- wykorzystuje pojęcie proporcji do rozwiązywania zadań.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja;
- praca z ekspertem;
- liga zadaniowa.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda;
- komputery z dostępem do internetu dla uczniów.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel określa temat lekcji: „Wielkości wprost proporcjonalne” oraz cele, wybrana osoba formułuje kryteria sukcesu.
2. Nauczyciel prosi o przygotowanie w parach pytań związanych z tematem. Czego się uczniowie chcą dowiedzieć? Co ich interesuje w związku z tematem lekcji?

Faza realizacyjna:

1. Przed lekcją nauczyciel wyłania wśród uczniów ekspertów, którzy zapoznają się z materiałem zawartym w sekcji „Przeczytaj”. Na lekcji uczniowie pracują w grupach pod kierunkiem ekspertów. Eksperci proponują grupom rozwiązywanie zadań, które przygotowali w domu (zadania oparte na przykładach z sekcji „Przeczytaj”). W razie problemów – służą pomocą, wyjaśniają niezrozumiałe elementy.
2. Uczniowie zapoznają się z materiałem w sekcji „Schemat interaktywny”, a następnie na forum klasy wspólnie wyjaśniają ewentualne wątpliwości po wykonaniu poleceń.
3. W kolejnym kroku uczniowie indywidualnie rozwiązują ćwiczenia numer 1 i 2 w sekcji „Sprawdź się”. Po ustalonym czasie wybrani uczniowie przedstawiają odpowiedzi, a reszta klasy wspólnie ustosunkowuje się do nich. Nauczyciel w razie potrzeby koryguje odpowiedzi, dopowiada istotne informacje, udziela uczniom informacji zwrotnej.
4. Nauczyciel dzieli klasę na 4-osobowe grupy. Uczniowie rozwiązują zadania 3-5 na czas (od zadania łatwiejszego do trudniejszych). Grupa, która poprawnie rozwiąże zadania jako pierwsza, wygrywa, a nauczyciel może nagrodzić uczniów ocenami za aktywność. Rozwiązania są prezentowane na forum klasy i omawiane krok po kroku.
5. Uczniowie realizują indywidualnie ćwiczenia 6-8 z sekcji „Sprawdź się”. Po ich wykonaniu nauczyciel omawia najlepsze rozwiązania zastosowane przez uczniów.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.

2. Wybrany uczeń podsumowuje zajęcia, zwracając uwagę na nabyte umiejętności, odnosząc się do wyświetlonych na tablicy interaktywnej celów z sekcji „Wprowadzenie”.

Praca domowa:

1. Zadanie dla kolegi/koleżanki. Uczniowie dobierają się w pary i opracowują zadania analogiczne do ćwiczeń 7 i 8 z sekcji „Sprawdź się”. Następnie przesyłają je do siebie mailem, rozwiązują i na następnej lekcji porównują wyniki.

Materiały pomocnicze:

- [Wielkości wprost proporcjonalne.](#)

Wskazówki metodyczne:

- Materiał w sekcji „Schemat interaktywny” można potraktować jako zadanie domowe dotyczące analizy problemu wykorzystania proporcji i wielkości wprost proporcjonalnych lub do rozwiązywania równań zapisanych w postaci proporcji.
- Można też wykorzystać schemat na zajęciach poświęconych rozwiązywaniu równań.