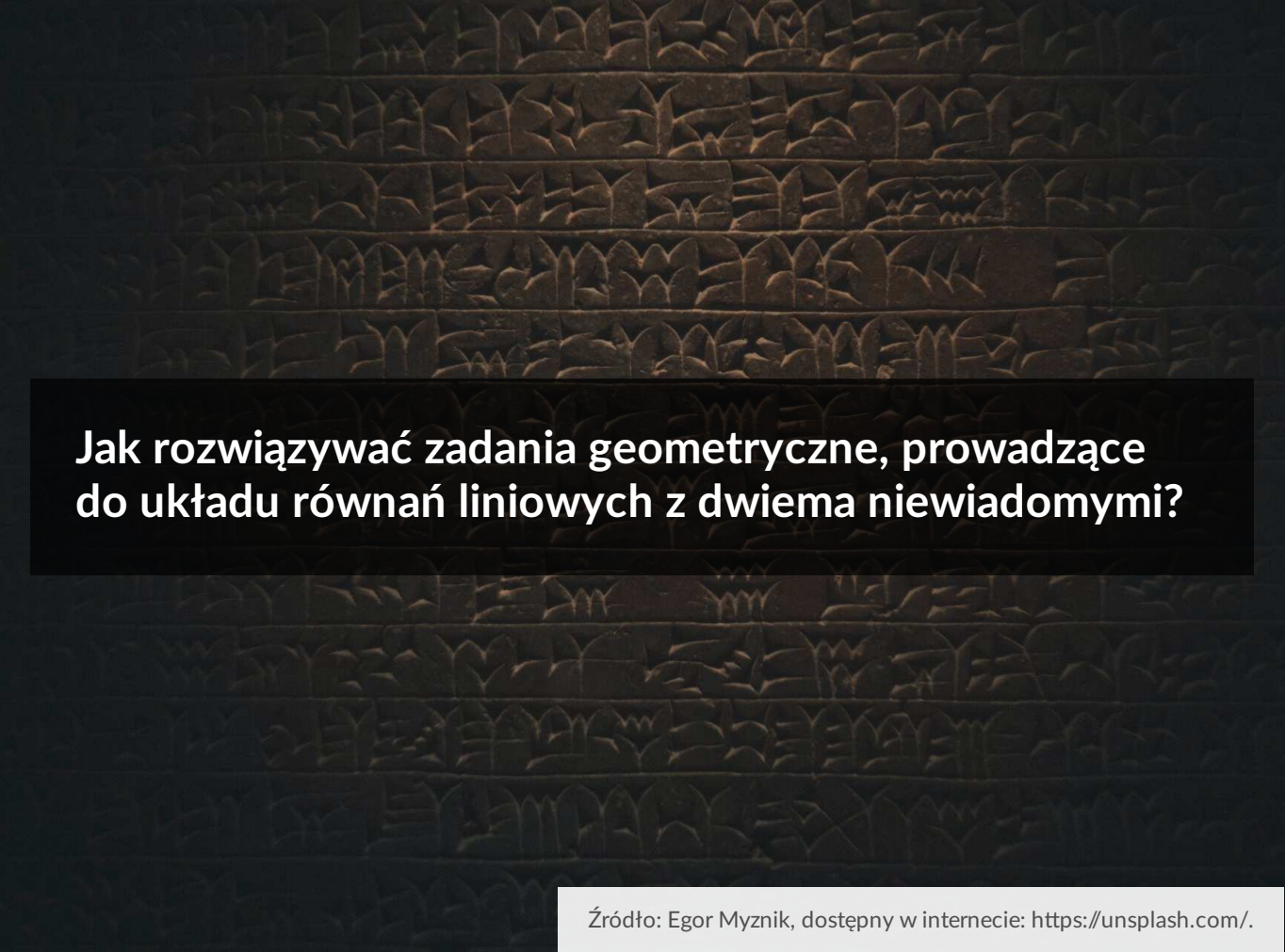




Jak rozwiązywać zadania geometryczne, prowadzące do układu równań liniowych z dwiema niewiadomymi?

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Prezentacja multimedialna](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Jak rozwiązywać zadania geometryczne, prowadzące do układu równań liniowych z dwiema niewiadomymi?

Źródło: Egor Myznik, dostępny w internecie: <https://unsplash.com/>.

Geometria jest jednym z działów matematyki, w którym niezwykle istotną rolę odgrywa umiejętność zapisywania zależności pomiędzy obiektami geometrycznymi za pomocą wyrażeń algebraicznych. W planimetrii, czyli gałęzi matematyki zajmującej się geometrią na płaszczyźnie, rozwiązywanie problemów dotyczących wielokątów zazwyczaj wymusza zapisanie odpowiedniego równania lub układu równań.

Długości odcinków w wielokącie np. boków, przekątnych, wysokości oraz miary kątów są ze sobą wzajemnie powiązane, dlatego umiejętność rozwiązywania równań oraz układów równań jest kluczem do sukcesu w rozwiązywaniu zadań problemowych z planimetrii.

W niniejszym materiale przygotowaliśmy liczne przykłady zadań z planimetrii, które prowadzą do układu równań z dwiema niewiadomymi.

Twoje cele

- Przeanalizujesz treść zadania tekstowego z geometrii.
- Wskażesz i oznaczysz niewiadome.
- Ułożysz zależności pomiędzy odcinkami, kątami, obwodami i polami wielokątów oraz zapiszesz je w postaci układu równań.
- Rozwiążesz układy równań prowadzące do rozwiązywania zadań geometrycznych.

Przeczytaj

Jednym z najprostszych problemów geometrii, prowadzącym do układu równań liniowych, jest wyznaczanie długości boków wielokąta w sytuacji, gdy znamy jego obwód oraz zależności zachodzące pomiędzy jego bokami. Ponieważ najprostszymi wielokątami są prostokąty, więc pierwszy przykład będzie dotyczył właśnie tej figury geometrycznej.

Pole prostokąta o bokach długości a i b obliczamy ze wzoru

$$P = ab,$$

a obwód

$$L = 2(a + b).$$

Przykład 1

Oblicz **pole prostokąta**, którego obwód wynosi 72, a jeden z boków jest o 10 dłuższy od drugiego.

Rozwiązanie

Oznaczmy przez a długość krótszego, a przez b długość dłuższego boku i zapiszmy podane w zadaniu informacje w formie układu równań:

$$\begin{cases} b = a + 10 \\ 2(a + b) = 72 \mid : 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b - a = 10 \\ a + b = 36 \end{cases}$$

Gdy dodamy równania stronami, to otrzymamy $2b = 46$, więc $b = 23$, a stąd $a = 13$. Teraz możemy już obliczyć pole $P = 13 \cdot 23 = 299$.

Szczególnym prostokątem jest kwadrat. W dowolnym kwadracie długość przekątnej d zależy od długości jego boku a : $d = a\sqrt{2}$. Gdy mamy informację o dodatkowej zależności pomiędzy bokiem, a przekątną kwadratu, np. o ile przekątna jest dłuższa od boku, to zapisując i rozwiązując odpowiedni układ równań możemy wyliczyć ich długości.

Przykład 2

Oblicz **pole kwadratu**, którego przekątna jest o 12 dłuższa od boku.

Rozwiązanie

Niech a oznacza bok szukanego kwadratu, a d jego przekątną. Wiedząc, że d jest o 12 dłuższa od a , możemy zapisać układ równań:

$$\begin{cases} d = a + 12 \\ d = a\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} d = a + 12 \\ a\sqrt{2} = a + 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} d = a + 12 \\ a\sqrt{2} - a = 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} d = a + 12 \\ a(\sqrt{2} - 1) = 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} d = a + 12 \\ a = \frac{12}{\sqrt{2}-1} \end{cases}$$

Usuwamy niewymierność z mianownika: $\frac{12 \cdot (\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = \frac{12\sqrt{2}+12}{2-1} = 12\sqrt{2} + 12$

i otrzymujemy, że bok kwadratu ma długość $a = 12\sqrt{2} + 12$, a jego przekątna $d = 12\sqrt{2} + 24$.

Pozostało obliczyć pole:

$$P = a^2 = (12\sqrt{2} + 12)^2 = 288 + 288\sqrt{2} + 144 = 432 + 288\sqrt{2}.$$

Innymi przykładami wykorzystania układów równań w zadaniach geometrycznych, są zadania o kątach w wielokątach, w tym również o kątach trójkąta.

Suma miar wszystkich kątów wewnętrznych trójkąta jest równa 180° . W przypadku trójkąta prostokątnego z tego faktu wynika, że suma miar jego kątów ostrych jest równa 90° .

Przykład 3

Wyznacz miary kątów ostrych trójkąta prostokątnego, w którym miara jednego z kątów ostrych jest o 40% większa od miary drugiego kąta ostrego.

Rozwiązanie

Oznaczmy miarę mniejszego z kątów przez α , a większego przez β . Suma miar kątów ostrych trójkąta prostokątnego jest równa 90° . Ponieważ kąt β jest o 40% większy niż α , więc $\beta = 140\% \cdot \alpha = 1,4\alpha$.

Zatem:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 90^\circ \\ \beta = 1,4\alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha + 1,4\alpha = 90^\circ \\ \beta = 1,4\alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2,4\alpha = 90^\circ \quad | : 2,4 \\ \beta = 1,4\alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = 37,5^\circ \\ \beta = 1,4\alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = 37,5^\circ \\ \beta = 52,5^\circ \end{cases}$$

Odpowiedź:

Kąty ostre tego trójkąta mają miary $37,5^\circ$ i $52,5^\circ$.

Jest wiele wzorów na **pole trójkąta**, ale najpopularniejszym z nich jest $P = \frac{1}{2}ah$, gdzie a to długość jednego z boków trójkąta, a h – długość wysokości opuszczonej na ten bok. Ponieważ trójkąt ma trzy boki, więc ma również trzy wysokości, a z tego wynika, że

$$P = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c,$$

gdzie h_a , h_b i h_c to wysokości trójkąta opuszczone odpowiednio na boki długości a , b i c .

Zauważmy, że z powyższego wynika, że w dowolnym trójkącie iloczyny długości boków i odpowiadających im wysokości są równe.

Przykład 4

Suma długości dwóch boków pewnego trójkąta wynosi 87, a wysokości opuszczone na te boki są równe odpowiednio 28 i 30. Oblicz pole tego trójkąta.

Rozwiązanie

Oznaczmy boki trójkąta przez a , b i c i załóżmy, że $a + b = 87$. Przypuśćmy, że 28 jest wysokością opuszczoną na bok a , a 30 – wysokością opuszczoną na bok b . Pole rozważanego trójkąta jest równe $\frac{1}{2}a \cdot 28 = 14a$. Z drugiej strony, pole możemy obliczyć jako $\frac{1}{2}b \cdot 30 = 15b$. W obydwu przypadkach otrzymamy ten sam wynik, a więc $14a = 15b$. Zapiszmy i rozwiążmy odpowiedni układ równań:

$$\begin{cases} a + b = 87 \\ 14a = 15b \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + b = 87 \quad | \cdot 14 \\ 14a - 15b = 0 \quad | \cdot (-1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 14a + 14b = 1218 \\ -14a + 15b = 0 \end{cases}$$

Po dodaniu do siebie równań otrzymujemy: $29b = 1218$, więc $b = 42$, a $a = 87 - 42 = 45$. Pole trójkąta jest równe $P = 14a = 14 \cdot 45 = 630$.

Odpowiedź:

Pole trójkąta jest równe 630.

Definicja: Kąt środkowy

Kątem środkowym nazywamy kąt, którego wierzchołek leży w środku okręgu, a ramiona są półprostymi zawierającymi promienie tego okręgu.

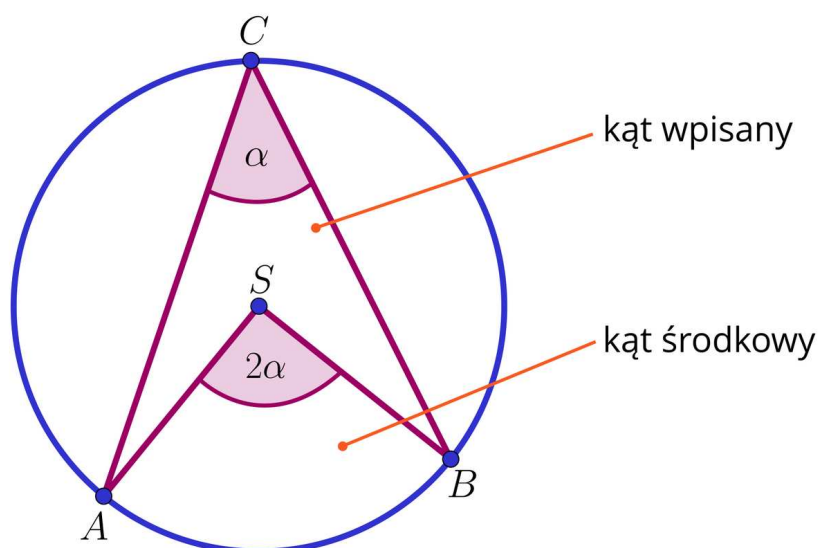
Definicja: Kąt wpisany

Kątem wpisanym nazywamy kąt, którego wierzchołek jest dowolnym punktem okręgu, a ramiona są półprostymi zawierającymi cięciwy okręgu.

Jeśli w danym okręgu ramiona kąta środkowego i wpisanego przecinają się, to wyznaczają łuk, na którym są oparte.

Twierdzenie: o kącie środkowym

Kąt środkowy ma miarę dwukrotnie większą od miary kąta wpisanego opartego na tym samym łuku.



Przykład 5

Suma miar kątów środkowego i wpisanego opartych na tym samym łuku okręgu jest równa 219° . Wyznacz miary tych kątów.

Rozwiązanie

Oznaczmy przez α miarę kąta wpisanego, a przez β miarę kąta środkowego i korzystając z faktu, że $\beta = 2\alpha$ rozwiążmy zadanie:

$$\begin{cases} \beta = 2\alpha \\ \alpha + \beta = 219^\circ \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta = 2\alpha \\ \alpha + 2\alpha = 219^\circ \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta = 2\alpha \\ 3\alpha = 219^\circ \quad | : 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta = 146^\circ \\ \alpha = 73^\circ \end{cases}$$

Odpowiedź:

Kąt wpisany ma miarę 73° , a kąt środkowy 146° .

Gdy wiemy, jak zmienia się pole prostokąta, jeśli wydłużymy bądź skrócimy jego boki na dwa sposoby, to rozwiązując odpowiedni układ równań, możemy obliczyć jego boki.

Przykład 6

Jeśli krótsze boki pewnego prostokąta wydłużymy o 6, a dłuższe skrócimy o 6, to otrzymamy prostokąt o polu o 48 większym od pola początkowego prostokąta. Jeśli natomiast wszystkie boki tego prostokąta wydłużymy o 4, to otrzymamy prostokąt o polu o 104 większym od pola początkowego prostokąta. Znajdź długości boków tego prostokąta.

Rozwiązanie

Oznaczmy przez a długość krótszego boku, a przez b długość dłuższego boku początkowego prostokąta. Jego pole jest równe ab . Jeśli wydłużymy krótsze boki o 6, a dłuższe skrócimy o 6, to pole nowego prostokąta będzie wynosić:

$$(a + 6)(b - 6).$$

Jeśli natomiast wszystkie boki wydłużymy o 4, to otrzymamy prostokąt o polu

$$(a + 4)(b + 4).$$

Zapiszmy układ równań:

$$\begin{cases} (a + 6)(b - 6) = ab + 48 \\ (a + 4)(b + 4) = ab + 104 \end{cases}$$

$$\begin{cases} ab - 6a + 6b - 36 = ab + 48 \mid -ab + 36 \\ ab + 4a + 4b + 16 = ab + 104 \mid -ab - 16 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -6a + 6b = 84 \mid : 6 \\ 4a + 4b = 88 \mid : 4 \end{cases}$$

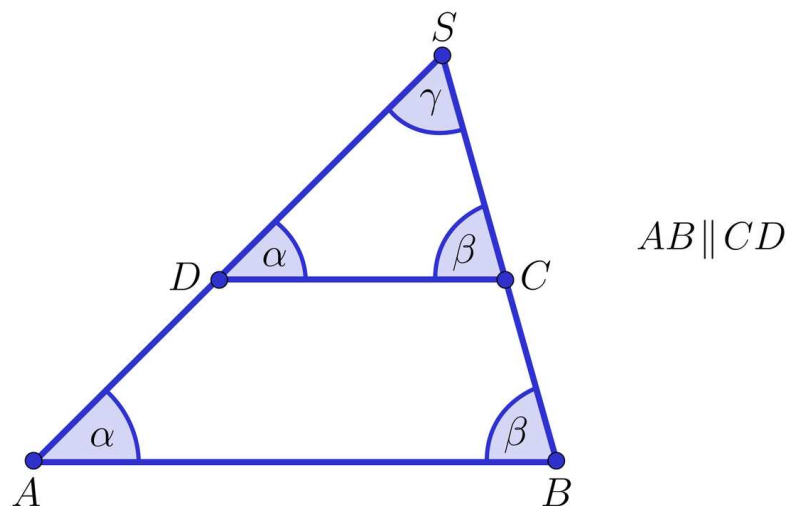
$$\begin{cases} -a + b = 14 \\ a + b = 22 \end{cases}$$

Gdy dodamy do siebie równania stronami, to otrzymamy $2b = 36$, a stąd $b = 18$ i $a = 22 - 18 = 4$.

Odpowiedź:

Boki tego prostokąta mają długości 4 i 18.

Rozważmy trapez $ABCD$, który nie jest równoległobokiem, o podstawach AB i CD . Przedłużamy ramiona trapezu aż do punktu przecięcia S .



Ponieważ AB i CD są równoległe, więc kąty $\angle BAD$ i $\angle CDS$ są kątami odpowiadającymi i mają równe miary. Analogicznie, kąty $\angle ABC$ i $\angle DCS$ mają równe miary. Z zasady kąt-kąt-kąt podobieństwa trójkątów wynika, że trójkąty ABS i DCS są podobne. Dlatego:

$$\frac{|DS|}{|DC|} = \frac{|AS|}{|AB|}$$

$$\frac{|CS|}{|DC|} = \frac{|BS|}{|AB|}$$

Przykład 7

Przedłużamy ramiona trapezu $ABCD$ o podstawach AB i CD aż do punktu przecięcia S (zobacz rysunek powyżej). Wiedząc, że odcinek DS ma długość 6, ramię $AD = 12$, wysokość – 7, a **pole** trapezu wynosi 35, oblicz długości podstaw tego trapezu.

Rozwiązanie

Oznaczmy przez a długość podstawy AB , a przez b długość podstawy CD .

Ponieważ $\frac{|DS|}{|DC|} = \frac{|AS|}{|AB|}$, więc

$$\frac{6}{b} = \frac{18}{a}, \text{ a stąd } 6a = 18b.$$

Zapiszmy układ równań:

$$\begin{cases} 6a = 18b & | : 6 \\ \frac{(a+b) \cdot 7}{2} = 35 & | \cdot \frac{2}{7} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 3b \\ a + b = 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 3b \\ 3b + b = 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 3b \\ 4b = 10 & | : 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 7,5 \\ b = 2,5 \end{cases}$$

Odpowiedź:

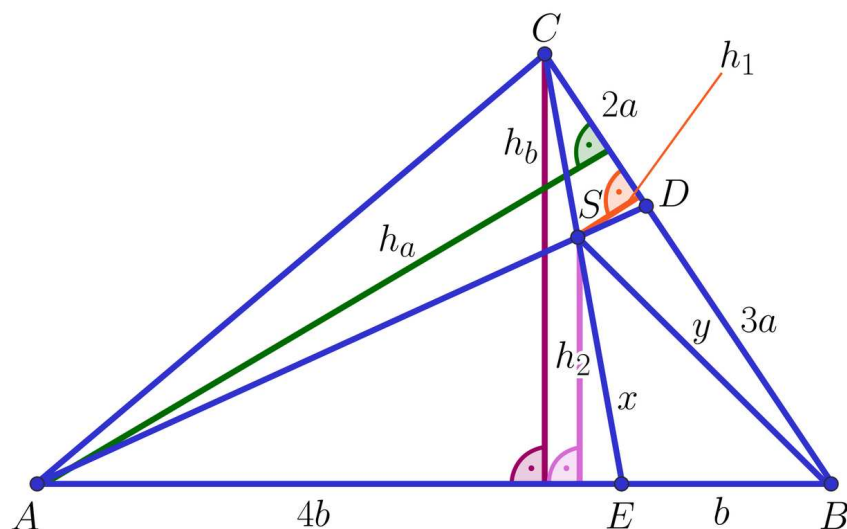
Podstawa AB ma długość 7,5, a CD – długość 2,5.

W niektórych zadaniach z geometrii niewiadomymi mogą być pola figur płaskich. Zapoznajmy się z przykładem.

Przykład 8

W trójkącie ABC na boku BC zaznaczono taki punkt D , że stosunek długości odcinka CD do DB jest równy 2 : 3. Na boku AB zaznaczono natomiast punkt E tak, że stosunek długości odcinków AE i EB wynosi 4 : 1, odpowiednio. Punkt S jest punktem przecięcia odcinków AD i CE . Oblicz pola trójkątów EBS i DBS wiedząc, że pole trójkąta ABC wynosi 110.

Rozwiązanie



Ponieważ $|CD| : |DB| = 2 : 3$, więc istnieje liczba dodatnia a taka, że $|CD| = 2a$ i $|DB| = 3a$. Podobnie, ponieważ $|AE| : |EB| = 4 : 1$, więc istnieje liczba dodatnia b taka, że $|AE| = 4b$ i $|EB| = b$.

Zauważmy, że wysokość h_1 trójkąta BCS opadająca na bok BC jest jednocześnie wysokością trójkąta DBS (opadającą na bok DB) oraz wysokością trójkąta DCS (opadającą na bok CD). Wyznamy pola tych trójkątów:

$$P_{BCS} = \frac{5ah_1}{2}, P_{DBS} = \frac{3ah_1}{2}, P_{DCS} = \frac{2ah_1}{2}.$$

Oznaczmy pole trójkąta P_{DBS} przez y i zauważmy, że $P_{DCS} = \frac{2}{3}y$.

Zauważmy, że wysokość h_2 trójkąta ABS opadająca na bok AB jest jednocześnie wysokością trójkąta EBS (opadającą na przedłużenie boku EB) oraz wysokością trójkąta EAS (opadającą na bok AE). Wyznamy pola tych trójkątów:

$$P_{ABS} = \frac{5bh_2}{2}, P_{EBS} = \frac{bh_2}{2}, P_{EAS} = \frac{4bh_2}{2}.$$

Oznaczmy pole trójkąta P_{EBS} przez x i zauważmy, że $P_{EAS} = 4x$.

Ponieważ wysokość h_a trójkąta ABC opadająca na bok BC jest jednocześnie wysokością trójkąta ABD opadającą na bok BD i bok $|BD| = \frac{3}{5}|BC|$, więc

$$P_{BAD} = \frac{3}{5}P_{ABC} = \frac{3}{5} \cdot 110 = 66.$$

Z drugiej strony,

$$P_{BAD} = P_{EAS} + P_{EBS} + P_{DBS} = 4x + x + y = 5x + y.$$

Podobnie, ponieważ wysokość h_b trójkąta ABC opadająca na bok AB jest jednocześnie wysokością trójkąta BCE opadającą na bok BE i bok $|BE| = \frac{1}{5}|AB|$, więc

$$P_{BCE} = \frac{1}{5}P_{ABC} = \frac{1}{5} \cdot 110 = 22$$

Z drugiej strony,

$$P_{BCE} = P_{EBS} + P_{DBS} + P_{DCS} = x + y + \frac{2}{3}y = x + \frac{5}{3}y$$

Zapiszmy układ równań:

$$\begin{cases} 5x + y = 66 & | \cdot 5 \\ x + \frac{5}{3}y = 22 & | \cdot (-3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 25x + 5y = 330 \\ -3x - 5y = -66 \end{cases}$$

Gdy dodamy do siebie równania stronami, to otrzymamy: $22x = 264$, a stąd $x = 12$ i $y = 66 - 5 \cdot 12 = 6$.

Odpowiedź:

Pole trójkąta EBS wynosi 12, a pole trójkąta DBS jest równe 6.

Słownik

pole trójkąta

pole trójkąta o bokach a, b, c i wysokościach odpowiednio h_a, h_b, h_c odpowiadającym tym bokom można obliczyć ze wzorów:

$$P = \frac{1}{2}ah_a \text{ lub } P = \frac{1}{2}bh_b \text{ lub } P = \frac{1}{2}ch_c$$

z tego wynika, że

$$\frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c$$

suma miar wewnętrznych trójkąta jest równa 180° ;

w trójkącie prostokątnym o kątach ostrych 30° i 60° oraz przyprostokątnej leżącej naprzeciw kąta 30° długości a , druga przyprostokątna ma długość $a\sqrt{3}$, a przeciwprostokątna ma długość $2a$

pole prostokąta

pole prostokąta o bokach a i b wyznaczamy ze wzoru

$$P = ab$$

a obwód ze wzoru

$$L = 2(a + b)$$

pole kwadratu

pole kwadratu o boku a wyznaczamy ze wzoru

$$P = a^2$$

obwód

$$L = 4a$$

a jego przekątna jest równa

$$d = a\sqrt{2}$$

pole trapezu

pole trapezu o podstawach a i b oraz wysokości h jest równe

$$\frac{(a+b)h}{2}$$

odcinek łączący środki ramion trapezu ma długość

$$\frac{a+b}{2}$$

w trapezie równoramiennym wysokość poprowadzona z wierzchołka górnej podstawy dzieli dolną podstawę na dwa odcinki długości odpowiednio $\frac{a-b}{2}$ i $\frac{a+b}{2}$

kąt środkowy

kąt, którego wierzchołek leży w środku okręgu, a ramiona są półprostymi zawierającymi promień tego okręgu

kąt wpisany

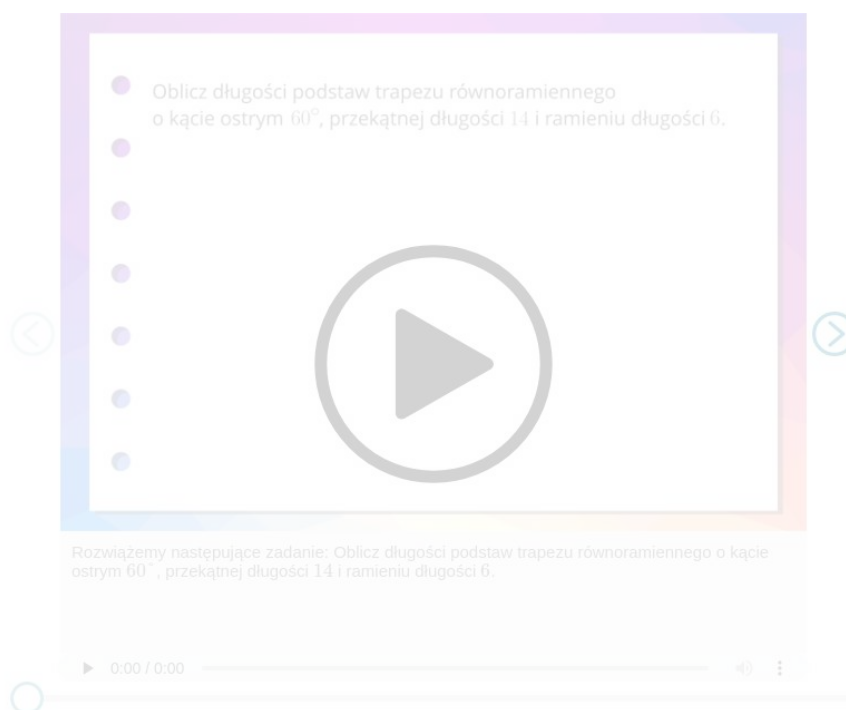
kąt, którego wierzchołek jest dowolnym punktem okręgu, a ramiona są półprostymi zawierającymi cięciwy okręgu;

miara kąta środkowego w danym okręgu jest dwa razy większa od miary kąta wpisanego opartego na tym samym łuku

Prezentacja multimedialna

Polecenie 1

Zapoznaj się z prezentacją multimedialną. Spróbuj najpierw samodzielnie rozwiązać zadanie, a następnie sprawdź poprawność rozwiązania, analizując poszczególne slajdy.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DM0x8Dhun>

Polecenie 2

Oblicz długości podstaw trapezu równoramiennego wiedząc, że jego kąt rozwarty ma miarę 120° , przekątna ma długość $5\sqrt{7}$, a ramię ma długość 10.

Ustaw podane czynności w odpowiedniej kolejności.

Wykonaj rysunek (analogiczny, jak w prezentacji).

Oblicz a i b rozwiązując odpowiedni układ równań.

Oblicz miarę kąta ostrego. Wykorzystaj fakt, że suma miar kątów trapezu leżących przy tym samym ramieniu jest równa 180° .

Wykorzystując Twierdzenie Pitagorasa oblicz $y = \frac{a+b}{2}$.

Wykorzystując własności trójkąta prostokątnego o kątach ostrych 30° i 60° , oblicz wysokość trapezu i $x = \frac{a-b}{2}$.

Oznacz literami (np. $a, b, c, d, x, y, \alpha, \beta$) odpowiednie odcinki i kąty.

Wypisz dane.

Polecenie 3

Wiedząc, że odcinek łączący środki ramion trapezu równoramiennego ma długość 14, wysokość ma długość $2\sqrt{3}$, a kąt ostry ma miarę 30° , wyznacz długości podstaw tego trapezu.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Zaznacz poprawną odpowiedź. Jeśli różnica pomiędzy miarą kąta środkowego i wpisanego opartego na tym samym łuku jest równa 35° , to możesz obliczyć miary tych kątów, rozwiązując układ równań:

☐
$$\begin{cases} \alpha - \beta = 35^\circ \\ \alpha = 2\beta \end{cases}$$

☐
$$\begin{cases} \alpha + \beta = 180^\circ \\ \alpha - \beta = 35^\circ \end{cases}$$

☐
$$\begin{cases} \alpha - \beta = 35^\circ \\ \beta = 2\alpha \end{cases}$$

☐
$$\begin{cases} \alpha + \beta = 180^\circ - 35^\circ \\ \alpha = 2\beta \end{cases}$$

Ćwiczenie 2



Dany jest układ równań: $\begin{cases} a + b = 20 \\ a = \frac{7}{5}b \end{cases}$. Bokami którego z czworokątów mogą być a i b ?

Zaznacz wszystkie prawidłowe odpowiedzi.

☐ Prostokąt o obwodzie 40, którego jeden bok jest o 40% dłuższy od drugiego boku.

☐ Równoległobok o obwodzie 40, którego jeden bok jest o 20% dłuższy od drugiego boku.

☐ Równoległobok o obwodzie 40, którego jeden bok jest o 40% dłuższy od drugiego boku.

☐ Prostokąt o obwodzie 20, którego jeden bok jest o 40% dłuższy od drugiego boku.

Ćwiczenie 3



Oceń prawdziwość zdań. Zaznacz czy zdanie jest prawdziwe czy fałszywe.

Zdanie	Prawda	Fałsz
Znając długości dwóch boków trójkąta oraz długość wysokości opadającej na jeden z tych boków możemy obliczyć wysokość opadającą na drugi bok.	☐	☐
W dowolnym trójkącie ostrokątnym znając długość jednego z boków i miarę jednego z kątów przy tym boku możemy obliczyć długości pozostałych boków.	☐	☐
Jest nieskończenie wiele prostokątów o następującej własności: Jeśli wszystkie boki prostokąta wydłużymy o 2, to otrzymamy prostokąt o polu większym o 28 od pola pierwszego prostokąta. Jeśli skrócimy wszystkie boki tego prostokąta o 2, to otrzymamy prostokąt o polu mniejszym o 20 od pola pierwszego prostokąta.	☐	☐
Znając długość odcinka łączącego środki ramion trapezu równoramiennego oraz jego wysokość, możemy obliczyć pole tego trapezu.	☐	☐

Ćwiczenie 4



W trójkącie o kącie rozwartym 100° jeden z kątów ostrych ma miarę trzy razy większą od miary drugiego kąta ostrego. Wyznacz miary kątów wewnętrznych tego trójkąta.

Ćwiczenie 5



Jeden z boków prostokąta stanowi 30% jego obwodu i jest jednocześnie o 2 dłuższy od drugiego boku. Oblicz pole i obwód tego prostokąta.

Ćwiczenie 6

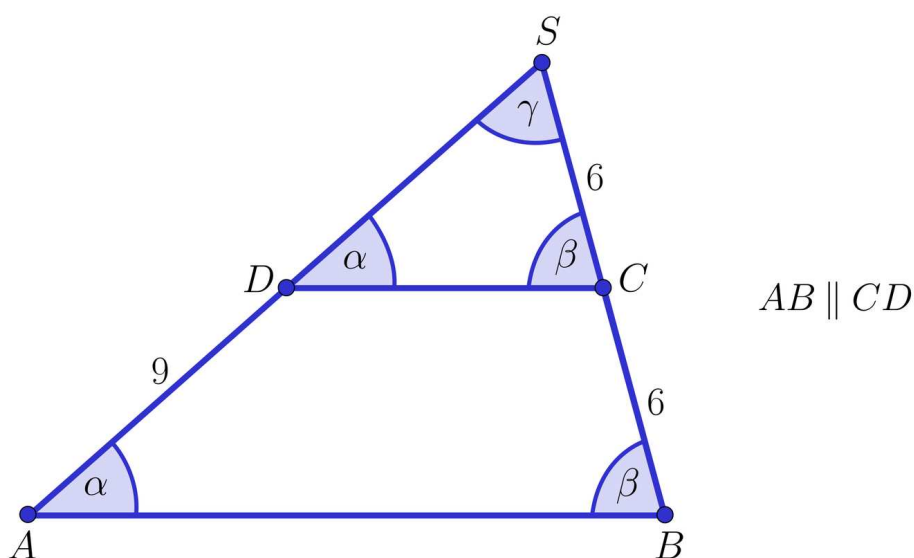


Jeśli zwiększymy obydwa boki prostokąta o 3, to otrzymamy prostokąt o polu o 45 większym. Jeśli krótszy bok prostokąta zwiększymy o 1, a dłuższy zmniejszymy o 1, to otrzymamy kwadrat. Oblicz pole i obwód tego prostokąta.

Ćwiczenie 7



Przedłużamy ramiona trapezu $ABCD$ o podstawach AB i CD aż do punktu przecięcia S , jak na poniższym rysunku. Wiedząc, że odcinek CS oraz ramię BC mają długość 6, ramię AD – 9, a obwód – 48, oblicz długości podstaw tego trapezu.



Ćwiczenie 8



W trójkącie ABC na boku AC zaznaczono taki punkt D , że stosunek długości odcinka AD do DC jest równy $3 : 1$. Na boku AB zaznaczono natomiast punkt E , który dzieli bok AB na dwa odcinki AE i EB tej samej długości. Punkt S jest punktem przecięcia odcinków BD i CE . Oblicz pola trójkątów EBS i DCS wiedząc, że pole trójkąta ABC wynosi 36.

Dla nauczyciela

Autor: Marta Frankowska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Jak rozwiązywać zadania geometryczne, prowadzące do układu równań liniowych z dwiema niewiadomymi?

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

IV. Układy równań.

Zakres podstawowy. Uczeń:

- 1) rozwiązuje układy równań liniowych z dwiema niewiadomymi, podaje interpretację geometryczną układów oznaczonych, nieoznaczonych i sprzecznych;
- 2) stosuje układy równań do rozwiązywania zadań tekstowych.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się;

Cele operacyjne:

Uczeń:

- analizuje treść zadania tekstowego;
- wskazuje i oznacza niewiadome;
- zapisuje zależności pomiędzy odcinkami, kątami figur, obwodami i polami geometrycznych w postaci układu równań;
- stosuje znane metody do rozwiązania układu równań;
- łączy układ równań.

Strategie nauczania:

- asocjacyjna;

- operacyjna.

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona klasa;
- ćwiczenia;
- dyskusja.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda;
- rzutnik multimedialny.

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

- Uczniowie zapoznają się z treściami zapisanymi w sekcji „Przeczytaj”.

Faza wstępna:

1. Nauczyciel przedstawia temat i cele lekcji. Uczniowie wspólnie ustalają kryteria sukcesu.
2. Uczniowie w grupach dzielą się uzyskanymi w domu informacjami. .

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie oglądają prezentację multimedialną.
2. Następnie nauczyciel pyta, czy rozwiązania zadań przedstawionych w prezentacji są dla wszystkich zrozumiałe. W razie wątpliwości, tłumaczy zadania.
3. Cała klasa wspólnie wykonuje pierwsze polecenie zamieszczone pod prezentacją.
4. Wybrany uczeń rozwiązuje na tablicy drugie polecenie zamieszczone pod prezentacją.
5. Nauczyciel dzieli klasę na trzy grupy. Uczniowie w grupach rozwiązują ćwiczenia 1–3 z sekcji „Sprawdź się”. Grupa, która jako pierwsza zakończy rozwiązywanie ćwiczeń, przedstawia rozwiązanie wybranego ćwiczenia. Jeśli jej rozwiązanie jest poprawne, typuje następną grupę do rozwiązania kolejnego zadania. Rozwiązanie ostatniego ćwiczenia przedstawia trzecia grupa.

6. Uczniowie samodzielnie wykonują pozostałe ćwiczenia z sekcji „Sprawdź się”. Wybrani uczniowie z klasy prezentują swoje rozwiązania na tablicy.

Faza podsumowująca:

- Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.

Praca domowa:

Uczniowie wykonują ćwiczenia, które nie zostały rozwiązane na zajęciach.

Materiały pomocnicze:

- [Opisywanie i rozwiązywanie za pomocą układów równań zadań z kontekstem praktycznym](#)

Wskazówki metodyczne:

Nauczyciel powinien się upewnić, że uczniowie znają metody rozwiązywania układów równań. Może też zachęcić uczniów do zapoznania się z prezentacją multimedialną przed lekcją.

Prezentację można wykorzystać na lekcji geometrii, poświęconej związkom miarowym w trójkącie.